Julius–Maximilians–Universität Würzburg
Fakultät für Mathematik und Informatik
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Prof. Dr. Hans–Joachim Vollrath

Seminararbeit
zur
Didaktik der Geometrie

Die Bedeutung des exemplarischen Lehrens im Geometrieunterricht

Dargestellt anhand zweier Beispiele Wagenscheins

vorgelegt von
Jürgen Roth
WS 1993/94

1 Die Bedeutung des exemplarischen Lehrens bei Wagenschein

Eine oft gehörte Kritik am gegenwärtigen Schulsystem ist die Stoffülle. Mit anderen Worten werden die Schüler mit Fakten (Wissen) eingedeckt, womit man ihnen sicher nicht gerecht wird. Dies ist um so bedauerlicher, als bereits Heraklit um 500 v. Chr. konstatierte: „Vielwisserei bringt noch keinen Verstand.“ Es kann ja nun wirklich nicht das Ziel der Schule sein, die Schüler als wandelnde Lexika zu entlassen. Man sollte sie vielmehr lehren, aus eigenem Antrieb und auch durch selbständige, intensive Auseinandersetzung mit einer interessanten Materie ein Verständnis zu entwickeln, daß nicht nur für diesen speziellen Fall trägt. Wagenschein und auch andere schlagen dem Lehrer das „Exemplarische Lehren“ als eine dem Schüler angemessene Methode vor, Inhalte zu vermitteln. „Versucht man ... eine erste Definition des exemplarischen Lehrens, so könnte man sagen: Es ist die Art der Gründlichkeit, die von einem einzelnen aufs Ganze geht — und zwar, indem es durch eindringliches Verweilen den ganzen Menschen anfordert und auch das ganze des Faches (ja unter Umständen der geistigen Welt) erhellt, insofern das Beispiel repräsentativ ist.“[1] Exemplarisches Lehren ist folglich für Wagenschein keine reine Stoffbeschränkung, sondern eine Vertiefung an einzelnen ausgewählten Beispielen. Dies stützt sich auf die praktische Erfahrung, daß Schüler mit der „dozierten“ Stoffülle insofern nichts anzufangen wissen, als sie im wesentlichen memorieren, aber kein Verständnis entwickeln. Letzteres läßt sich aber nur erreichen, wenn man nicht den gesamten Stoff gleichmäßig kompakt (und „zügig“) vermittelt, sondern eben an einzelnen Stellen verweilt und den Schülern die Zeit und Gelegenheit bietet, sich intensiv mit der Problematik auseinanderzusetzen. Diese Auseinandersetzung findet in der Regel aber nur statt, wenn die Schüler in ihrer Lebenswirklichkeit abgeholt werden, d.h. wenn das ausgewählte Themengebiet (Ausgangsthema) in ihren Augen interessant ist (am besten so interessant, daß sie sich auch in ihrer Freizeit damit auseinandersetzen würden, falls sie der Problematik begegneten). Erst dies ermöglicht es gerade die alten und inhaltlich relativ gefestigten Fächern, wie z.B. die Geometrie in der Schulmathematik, „nicht im Stoff ersticken und als 'Erledigungsmaschinerie, umkommen“[2] zu lassen. Ein sytematischer (bereitstellender) Lehrgang mag zwar logisch sein, er führt aber nur zu leicht dazu, daß der Unterricht an den Schülern und ihren geistigen Fähigkeiten und Bedürfnissen vorbeigeht. Es ist, zumindest in den Augen Wagenscheins, leider immer wieder eine Verwechslung der Systematik des Stoffes mit der Systematik des Denkens zu konstatieren. Es ist den Schülern und ihren Bedürfnissen nicht damit gedient, wenn man die Geometrie ausschließlich nach Gesichtspunkten der Systematik und der Bereitstellung von Werkzeugen betreibt. In diesem Zusammenhang muß man sich immer wieder

[1] aus [Wagenschein 65a]
[2] aus [Wagenschein 68]

folgendes vor Augen halten: „Bildung ist kein addierender Prozeß.“[3] Sie ist vielmehr eine, durch Fehler, eigene Erfahrungen und intensive Auseinandersetzung mit Problemen, fortschreitende Entwicklung, die immer dann rückläufig ist oder mindestens anhält, wenn man nicht intensiv und ausdauernd an der selbständigen Lösung einzelner Fragestellungen arbeitet.

Die Idee, auf die sich das Prinzip des „Exemplarische Lehrens“, vor dem Hintergrund dieses Wissens stützt ist folgende: „Ursprüngliche Phänomene der geistigen Welt können am Beispiel eines einzelnen vom Schüler wirklich erfaßten Gegenstandes sichtbar werden.“[4] Sie will „den Lernenden vom einzelnen aus in das *Ganze* der Sache führen und, zugleich, ihn, den Lernenden, wirklich mit der Sache in Fühlung ... bringen, seine Spontaneität herausfordern und damit auch *sein* Ganzes, *seine* Mitte in Resonanz ... bringen. Das Exemplarische Lehren drängt auf das Ganze, der Sache wie des Lernenden.“[5] Dazu geht man von einem geeigneten Knotenpunkt aus und läßt hierauf basierend die systematischen Beziehungen entdecken. Folgt man einem Bild Wagenscheins, dann heißt das auch, daß hier die Schienen ins Gelände gelegt werden und man eben nicht den von anderen gelegten Schienen nachfährt. Nach diesem Versuch, den Begriff des „Exemplarischen Lehrens“ wie ihn Wagenschein sieht in etwa abzustecken, ist es nun an der Zeit, sich anhand von zwei Beispielen Wagenscheins anzusehen, wie ein darauf beruhender Geometrieunterricht aussehen könnte. Dies soll in den nächsten beiden Abschnitten geschehen.

[3] aus [Wagenschein 68]

[4] Zitiert aus [Wagenschein 68]. Dort wird als Quelle allerdings die „Tübinger Resolution“ angegeben, die z.B. in der Zeitschrift „Die Pädagogische Provinz“, 1951, S. 623ff abgedruckt ist.

[5] aus [Wagenschein 69]

2 Einstieg in die Geometrie (Mathematik aus der Erde)

Wagenschein möchte die (Schul-)Mathematik nicht, wie oft geschehen, ausschließlich als Lieferant von Werkzeugen zur Lösung von Problemen in anderen Disziplinen sehen. Er macht deutlich, daß die „Gewohnheit, auf Vorrat zu stapeln, was dann später, irgendwann einmal, unter tausend anderen solchen Dingen ‚angewandt' werden soll"[6] für Schüler langweilig ist, „weil es ohne vernünftigen Anlaß traktiert wird"[6]. Ihm geht es im Kontext des exemplarischen Lehrens und hier beim „Einstieg" in die Mathematik vielmehr um folgendes: „Erfahren lassen, wie Mathematik im ursprünglichen Umgang mit der Welt im Menschen entsteht, aus ihm also und aus den Dingen hervorgeht. Dann wird Mathematik nicht an-gewandt, sondern sie löst sich aus erdkundlichen, pysikalischen und anderen *Sach*problemen heraus und ist *zugleich* ein Mittel zu ihrer Bewältigung."[6] Wie das im einzelnen zu verstehen ist, soll mit dem folgenden Beispiel Wagenscheins deutlich gemacht werden. Er kontrastiert darin sein Vorgehen mit anderen Unterrichtsformen (-methoden), indem er den hier zu behandelnden Stoff wie folgt beschreibt: „Wie tötlich langweilig ist es und allzu leicht zu verstehen, daß an zwei parallelen geraden Linien, die von einer dritten gekreuzt werden, Winkel sich finden lassen (mit schwer zu behaltenden Namen), die gleich groß sind."[6] Er ist nun aber der Ansicht, daß die Schüler völlig anders mit dem Problem umgehen, wenn es sich im Zusammenhang mit einer ganz anderen, für Schüler viel interessanteren Fragestellung wie von selbst ergibt und deren Lösung bedeutet. Dabei ist darauf zu achten, daß die aufgeworfene Problematik die Schüler wirklich interessiert und sie bei deren Lösung möglichst ständig selbst Hand anlegen. Bei der Fragestellung in Wagenscheins Beispiel ist diese Forderung nicht ganz erfüllt, weil es sich um ein historisches Problem handelt, das zunächst vom Lehrer geschildert wird. Doch hierauf soll nicht im einzelnen eingegangen werden. Nun aber zum Beispiel selbst. Zunächst werden das Problem und die Details vorgestellt, die bekannt sind und zur Lösung der Fragestellung herangezogen werden können:
Eratosthenes, der von 275 bis 195 v. Chr. gelebt hat, wollte feststellen, wie groß eigentlich die Erdkugel ist. Da er sie nicht einfach umrunden und so den Umfang ausmessen konnte (entsprechende Transportmittel fehlten damals noch völlig), mußte er sich anderer Methoden bedienen, um seinen Zweck zu erreichen. Was er wußte, war folgendes: Am 21. Juni jeden Jahres steht die Sonne senkrecht über Assuan (Südägypten). Mit anderen Worten wirft an diesem Tag z.B. der Obelisk auf dem Marktplatz keinen Schatten. Nun stellt man aber fest, daß zur gleichen Zeit ein Obelisk in Alexandria (Nordägypten) sehrwohl einen (sichtbaren) Schatten wirft. Es stellt sich zunächst die Frage, woran das liegt. Hierfür bieten sich zwei Möglichkeiten an, die Wagenschein nach Meinung des Autors bei der Beschreibung seines Beispiels zu schnell formuliert. Exemplarisches Lehren

[6] aus [Wagenschein 65c]

im eigentlichen Sinn würde an dieser Stelle eine Diskussion mit den Schülern zu diesem Thema erfordern. Dabei sollten sie (*notfalls* mit kleinen Hinweisen vom Lehrer) selbst auf die Erklärungsmöglichkeiten stoßen und diese anschließend auf ihre Brauchbarkeit hin untersuchen. Natürlich ist Wagenschein zugute zu halten, daß er im Unterricht wahrscheinlich so vorgegangen wäre, in diesem Zusammenhang aber nur die Breite des sich auftuenden Problemfeldes darstellen wollte. Dies soll hier auch geschehen, indem ein kurzer Abriß der notwendigen Gedankengänge und Überlegungen gegeben wird. Die Begründung dafür, daß ein Obelisk einen Schatten wirft und der andere keinen, könnte auf den „Straßenlampeneffekt", den „Igeleffekt", oder auf eine Kombination beider Effekte zurückzuführen sein. Um dies entscheiden zu können, muß man sich zunächst klarmachen, was damit jeweils gemeint ist. Der erste beschreibt die Erfahrung, daß eine Person, die direkt unter einer Straßenlaterne steht, keinen Schatten wirft, während eine etwas entfernt von der Lampe stehende Person durchaus einen wirft. Der „Igeleffekt" führt den unterschiedlichen Schattenwurf auf die Krümmung der Erdoberfläche zurück. Da beide Obelisken radial aus der Erdoberfläche ragen, kann nur einer von beiden direkt auf die Sonne weisen, während der andere (je nach Krümmung der Erdoberfläche (d.h. hier: Größe der Erdkugel) bzw. Entfernung zum ersten) einen mehr oder weniger großen Winkel mit der Linie 1. Obelisk – Sonne bildet. (Die Obelisken verhalten sich also wie die Stacheln auf dem Rücken eines Igels, daher der Name des Effekts.) Daß der „Straßenlampeneffekt" hier keine Rolle spielt hat sich schon Eratosthenes klar gemacht und auch in der Schule sollte es nicht schwierig sein, darauf hinzuarbeiten. Dieser Effekt wird nämlich immer geringer, je höher die Laterne hängt. (Dies läßt sich mit Hilfe einer starken Lampe und zweier Stecknadeln sehr schnell *sehen.*) Nun ist aber die Entfernung Sonne – Erde erheblich größer als jede Entfernung auf der Erde (auch die läßt sich nicht nur aus Büchern lernen, sondern auch beim bewußten Betrachten des Mondes und der Sonne *sehen*[7], wie es übrigens auch Eratosthenes getan hat), woraus sich schließen läßt, daß die Sonnenstrahlen, die die Spitzen der beiden Obeliske treffen (für alle praktischen Zwecke) parallel sind. Folglich ist der unterschiedliche Schattenwurf ausschließlich darauf zurückzuführen, daß die beiden Obelisken infolge des „Igeleffektes" eben nicht parallel sind. Letzteres kann man sich zusätzlich klar machen, wenn man zwei Streichhölzer in Plastilinsockeln auf den entsprechenden Stellen eines Globusses postiert und mit einer Lampe beleuchtet. Überträgt man anschließend das wesentliche der Globuskonstellation auf die Tafel, so ergibt sich aus diesem Bild wie von selbst die Figur mit den zwei Parallelen und der dritten sie schneidenden Geraden (siehe Abbildung 1 auf Seite 5). Aus der Sicht des Autors ist nun mit den Schülern zu erarbeiten, wie man mit Hilfe des Tafelbildes und der bekannten Entfernung Assuan – Alexandria (knapp 1000km) auf den Umfang der Erde schließen kann. Dazu benötigt man nämlich die Einsicht, daß der Bruchteil des Vollkreiswinkels (360°) der vom Winkel zwischen den beiden Obelisken

[7] siehe hierzu [Wagenschein 60] S. 45 – 49

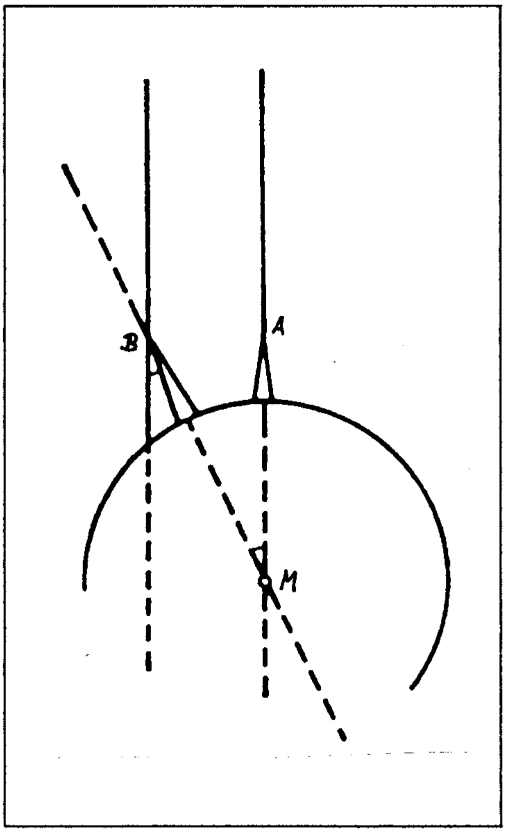

Abbildung 1: Wagenscheins Skizze zum Problem von Eratosthenes (Bestimmung des Erdumfangs)

($\angle AMB$) festgelegt wird, genau den Bruchteil des Erdumfangs bestimmt, den der Abstand Assuan – Alexandria ausmacht. Hat man dies erkannt, so stellt sich die Frage, wie man den fraglichen Winkel, der ja tief im Erdinneren steckt beschaffen kann. Mit Blick auf die Tafelskizze (vgl. Abbildung 1) werden die Schüler schnell eine Vermutung aufstellen, die sie kaum ausgedacht, sofort als richtig akzeptieren. Sie stoßen hier fast zwangsläufig und wie selbstverständlich auf die (mathematische) Tatsache, daß sich der Winkel der in der Erde steckt nocheinmal an der Spitze des Obelisken in Alexandria findet, wo er für die Messung zugänglich ist. Mit dieser Methode ist kann man den Schülern ein Gefühl für die „Macht" der Mathematik ermöglichen, mit deren Hilfe sich Dinge (er–)schließen lassen, die weder der Messung noch der direkten Betrachtung zugänglich sind, und oft nur in der „Vorstellung" existieren. So konnte Eratosthenes, nachdem er den Winkel an der Spitze des Obelisken gemessen hatte, es war ein fünfzigstel Kreis, auf den Winkel in der Erde schließen, und wußte damit, daß die Strecke Assuan – Alexandria ein fünfzigstel des Erdumfangs ausmacht.

Dieses Beispiel macht deutlich, was Wagenschein meint, wenn er davon spricht, daß es ihm darauf ankommt, „die übliche Form des Vorgehens (erst das mathematische System, dann seine Anwendungen) durch ein kontrastierendes Verfahren (von einem Sachproblem zu einem mathematischen Satz und von ihm aus zum System) zu relativieren.“[8] Es kann aber nur den ersten Schritt verdeutlichen und steht damit quasi „‚exemplarisch‘ für das Verhältnis der Mathematik zur physischen Welt.“[8] Weitere Schritte wären: Die aus dem Beispiel gewonnenen „Tatsachen“ als mathematische Sätze formulieren, die man losgelöst von der „materiellen Wirklichkeit“ beweisen kann und die dann aufeinander aufbauend ein von der materielen Wirklichkeit unabhängiges, selbständiges System bilden.

Man kann an diesem Beispiel auch weiterarbeiten, indem man sich überlegt, daß es doch zumindest mühsam ist, den Obelisken hinaufzuklettern um an dessen Spitze den Winkel zu messen ...

An dieser Stelle soll das Beispiel nicht weiter verfolgt werden. Es hat seinen Zweck erfüllt, wenn deutlich geworden ist, wie der „Einstieg“ beim „Exemplarischen Lehren“ aussehen kann und was Wagenschein meint, wenn er sagt: „Wir steigen also beim ‚Einstieg‘ von dem Problem aus hinab ins Elementare, wir suchen das, wonach es zu seiner Erklärung verlangt. Eine Auswahl ist damit gegeben: wir häufen nicht mehr auf Vorrat, sondern suchen, was wir brauchen, wir verfahren als wie in der ursprünglichen Forschung. *Das Seltsame fordert uns heraus, und wir fordern ihm das Einfache ab.*“[9]

---

[8]aus [Wagenschein 65c]
[9]aus [Wagenschein 68]

3 Der Satz des Pythagoras und das Exemplarisches Lehren

Im letzten Abschnitt wurde an einem langen und relativ ausführlich dargestellten Beispiel ein Aspekt des Exemplarischen Lehrens, nämlich der „richtige“ Einstieg dargestellt. In diesem Beispiel wird weniger ausführlich auf Einzelheiten eingegangen. Es wurde aus dem selben Grund gewählt, den auch schon Wagenschein angegeben hat: „Wenn ich als Thema den Satz von ‚Pythagoras‘ wähle, so deshalb, weil man an ihm gut alles zeigen kann, was zum ‚exemplarischen‘ (oder ‚paradigmatischen‘) Lehren dazugehört.“[10] Zum einen nimmt er eine „Schlüsselstellung“ ein, und zum anderen gehört er zu den Themen „(nicht zu einfach, nicht zu kompliziert), in die man ohne Vorkenntnisse hineinspringen und die man aufklären kann; und dies, ohne daß dabei der systematische Aufbau der Mathematik zu kurz käme, im Gegenteil.“[10] Wagenschein meint, daß man dieses Thema bereits mit Schülern ab zwölf Jahren bearbeiten kann, die nur rechnen können und verstehen sollten, wie man den Flächeninhalt eines Rechtecks findet. Dabei kommt es Wagenschein entscheidend darauf an, daß nicht „der Pythagoras“ selbst das Thema ist, weil man damit die Spontaneität der Schüler nicht herausfordern würde. „Das Thema darf, ja muß zwar auf eine Schlüsselstellung zielen, aber nicht dort schon einsetzen. Es muß eine die Spontaneität des Lernenden herausfordernde Staunensfrage sein, die dem ‚Leben‘ möglichst nahe stehen sollte. ... Hier beim ‚Pythagortas‘, könnte die Zugangs–Frage diese sein: Was steckt dahinter, daß Eisenbahner und Zimmmerleute, wenn sie im Gelände einen rechten Winkel abstecken wollen, drei Latten mit den Maßen 3, 4, 5 zu einem Dreieck zusammenfügen?“[10] Der Lehrer muß den Schülern die Zeit geben, sich für die Frage zu erwärmen, vielleicht sogar Feuer zu fangen, erst dann hat der im folgenden skizzierte Unterrichtsgang Aussichten auf Erfolg.

Nachdem der Lehrer angeregt hat die Latten mit einem Seil zu vertauschen, an dem in gleichen Abständen Kugeln befestigt sind, wird er die Frage aufwerfen, ob das mit dem Dreieck (3,4,5) „Zufall“ war, oder man noch andere Dreiecke legen kann, die einen rechten Winkel beinhalten. — Nach einiger Zeit wird das Dreieck (6,8,10) gefunden werden, das man nach gemeinsamer Überlegung (Wähle andere, nämlich halbe Längeneinheit!) als nichts substantiell Neues durchschaut. Wenn man sehr geduldig sucht, kann man vielleicht noch das wirklich neue, rechtwinklige, aber schmälere Dreieck (5,12,13) finden.

Hier stellt sich nun die Frage, was die beiden gefundenen Zahlentripel mit dem rechten Winkel zu tun haben. Um das zu klären werden sie gegenübergestellt und untersucht, ob sie wenigstens etwas untereinander *Gemeinsames* haben.

$$\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 12 & 13 \end{array}$$

[10] aus [Wagenschein 69]

Der Lehrer sollte erst nachdem die Schüler einige Zeit mit den Zahlen gespielt haben, den Vorschlag machen, die Zahlen doch jeweils mit sich selbst zu multiplizieren,

$$\begin{array}{ccc} 9 & 16 & 25 \\ 25 & 144 & 169 \end{array}$$

und dann zu sehen:

$$\begin{aligned} 9 + 16 &= 25 \\ 25 + 144 &= 169 \end{aligned}$$

Drückt man dies in den ursprünglichen Zahlen aus,

$$\begin{aligned} 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 &= 5 \cdot 5 \\ 5 \cdot 5 + 12 \cdot 12 &= 13 \cdot 13 \end{aligned}$$

dann werden die Schüler ganz ohne Vorkenntnisse das Schema

$$a \cdot a + b \cdot b = c \cdot c$$

entdecken bzw. erkennen (und so anfangen, „allgemeine Zahlen“ zu verstehen).[11] Hier schließt sich die Frage an, ob und wenn ja, was diese gemeinsame Formel mit der rechtwinkligen Form der Dreiecke zu tun hat. Wäre dies der Fall, so müßte es auch nicht-ganzzahlige Werte geben, die diese Gleichung erfüllen. Dies wird nun untersucht, indem ein Seil ohne Kugeln irgendwie zu einem Rechtwinkligen Dreieck gelegt, die Längen der Dreiecksseiten gemessen und die erhaltenen Werte in die Formel eingesetzt werden. Dies wird mit verschiedenen Dreiecken wiederholt. Schließlich werden die Schüler absolut überzeugt davon sein, daß „es“ immer stimmt. Hier muß (wenn es kein Schüler tut) der Lehrer darauf aufmerksam machen, daß noch nicht klar ist, ob es genau (für Schüler: „auf den hundertstel Millimeter“) stimmt und ob bei jedem zukünftigen, rechtwinkligen Dreieck die Formel ($a \cdot a + b \cdot b = c \cdot c$) so stimmt. Um dies zu klären ist es hilfreich sich unter $a \cdot a$ etwas Anschauliches vorzustellen. Mit diesem Hinweis werden die Schüler sehr schnell die Fläche des Quadrats ins Spiel bringen, das sich über der einen Seite des Dreiecks aufbauen läßt. „Damit wird ($a \cdot a + b \cdot b = c \cdot c$) vorstellbar und sagt aus, daß ein gewisses großes Quadrat (das nämlich über der größten Seite c des rechtwinkligen Dreiecks steht) genausoviel Fläche hat wie die zwei Quadrate, die über den beiden kleineren Seiten gebaut werden können, zusammen. Die bekannte Pythagoras-Figur steht da.
($a \cdot a + b \cdot b = c \cdot c$) verstehen heißt nun also: *dies* verstehen: daß es bei jedem rechtwinkligen Dreieck der Fall sein soll. ... Wir wissen jetzt endlich anschaulich, *was* wir verstehen wollen.“[12] Hier hat nun der Einstieg seine Schuldigkeit getan

[11] Wagenschein ist der Überzeugung, daß das Zeichen a^2 hier überflüssig, ja störend ist.
[12] aus [Wagenschein 69]

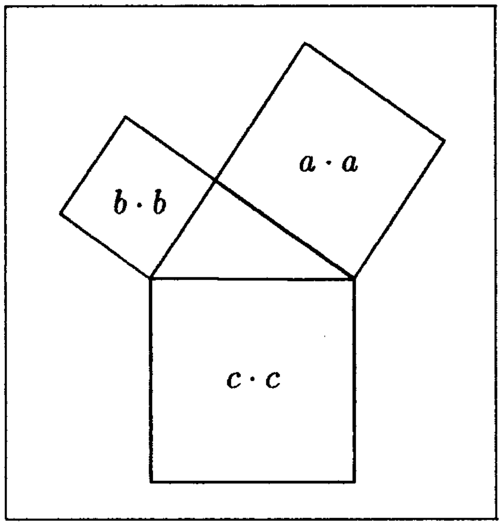

Abbildung 2: Pythagoras–Figur

und (die Sache mit den Eisenbahnern) ist fast vergessen. Hier unterstellt Wagenschein den Schülern neben dem sicher vorhandenen Prakmatismus auch noch die spontane Absicht, das Problem durch wiegen der aus Pappe ausgeschnittenen beteiligten Quadrate zu ermitteln. Letzteres hält der Autor zumindest für etwas gewagt. Trotzdem steckt dahinter die absolut zutreffende Erfahrung, daß Schüler sich sehr leicht vom Augenschein überzeugen lassen. Hier ist wieder der Lehrer gefragt der den Schülern die folgenden Fragen stellen muß:

- Stimmt es genau?
- Warum stimmt es?
- „Muß" es so sein?
- Kann man das „einsehen"?

Eine Möglichkeit mit diesen Fragen umzugehen, wäre, das große Quadrat so zu zerschneiden, daß man die Stücke restlos in den beiden kleinen Quadraten unterbringt. Vielleicht ist das dann einzusehen. Den Schülern muß nun Zeit gegeben werden, Erfahrungen damit zu sammeln (Wagenschein schlägt eine halbe Stunde vor!), damit sie durch ihre vergeblichen Bemühungen einen Sinn für den genialen Einfall entwickeln, den der Araber Annairizi vor 1000 Jahren hatte und auf den der Lehrer hinaus will.

An dieser Stelle empfiehlt es sich kurz zusammenzufassen, welche Voraussetzungen für das Exemplarische Lehren sich aus dem bisherigen Verlauf des Beispiels herauskristalisiert haben. Dies sind:

- Die **Schlüsselstellung** des angezielten Themas innerhalb des Fachs

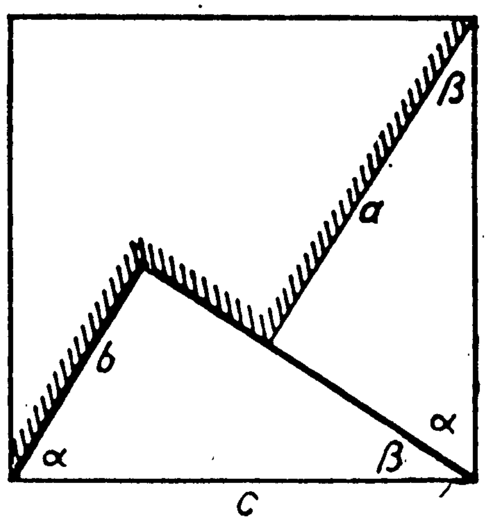

Fig. 1

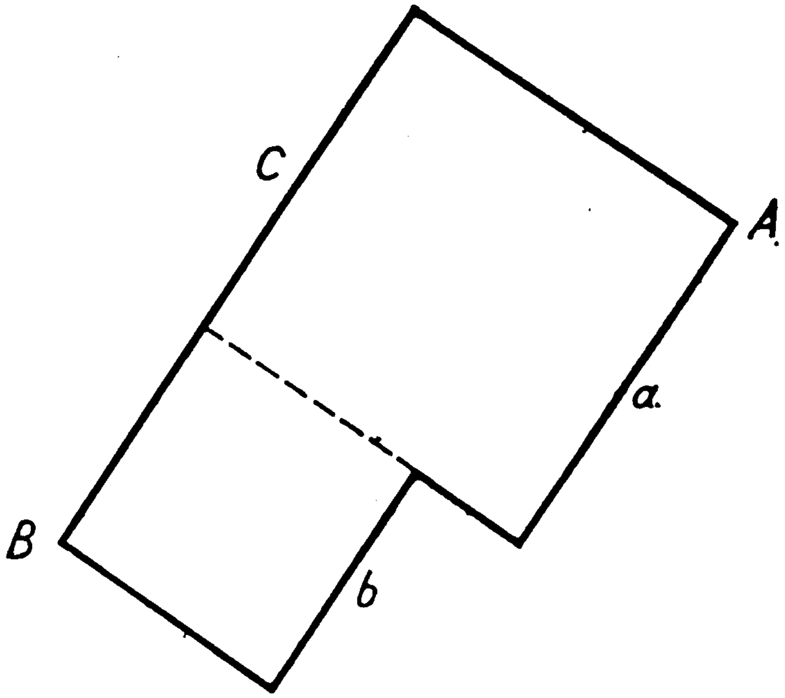

Fig. 2

Abbildung 3: Strategieskizzen auf dem Weg zu Annairizis Idee

- Der **Einstieg** als möglichst lebensnahe Staunensfrage
- Die **Selbsttätigkeit** der Lernenden, viel Zeit dafür und für Gründlichkeit
- Das **Ziel** ist es, „den Lernenden vom Einzelnen aus in das *Ganze* der Sache zu führen und, zugleich, ihn, den Lernenden, wirklich mit der Sache in Fühlung zu bringen, seine Spontaneität herauszufordern und damit auch *sein* Ganzes, *seine* Mitte in Resonanz zu bringen."[13]

In diesem Beispiel kommt die Selbsttätigkeit in sofern etwas zu kurz, als der Fortschritt stark vom Lehrer gelenkt werden muß. Andererseits wird den Schülern aber viel individuelle Zeit gelassen sich in die jeweilige Problematik einzuarbeiten und eigene Erfahrungen be–greifender und kognitiver Art zu machen. Im Folgenden wird der Ablauf, der sich eigentlich nach ähnlichem Schema fortsetzt stark gerafft dargestellt. In weiten Bereichen wird sie sich alleine auf die Tipps des Lehrers beschränken, die den sichtbaren „Fortschritt" markieren, über das gewonnene Verständnis der Schüler aber überhaupt nichts aussagen können und wollen. Natürlich werden wieder alle Schritte von jedem Schüler selbst ausgeführt.

Die erste Anregung ist, die beiden kleinen Quadrate aneinanderzulegen und als ein neue Figur zu betrachten (vgl. Figur 2 in Abbildung 3 auf Seite 10). Weiter werden sich die Schnitzel an die Seiten der Figur anlehnen und in ihre Ecken passen müssen, weshalb sich solche empfehlen, die gelegentlich einige Seiten des ursprünglichen Dreiecks aufweisen und wenigstens einen rechten Winkel haben. Da bietet sich natürlich das ursprüngliche Dreieck an. Wenn es, wie in Figur 1 (siehe Abbildung 3 auf Seite 10) dargestellt zweimal in das größte Quadrat hineingelegt wird,[14] dann fällt auf, daß sie nahtlos zusammenpassen. Da der Araber mit drei Schnitzeln auskam (das behauptet der Lehrer), sollte das bedeuten, daß mit diesen Teilen die Figur 2 gelegt werden kann. Wenn die Schüler die beiden Figuren der Abbildung 3 im direkten Vergleich sehen, merken sie vielleicht, daß das tatsächlich geht, nämlich (für die Einsicht) am geschicktesten durch Drehen der beiden Dreiecke. Wie das gemeint ist sieht man am deutlichsten in Abbildung 4 auf Seite 12. An dieser Stelle scheiden sich die Geister. „*Hier zeigt sich, wer von den Lernenden überhaupt soweit ist, daß er sich mit Mathematik abgeben sollte.*"[13] So (rigoros) sieht Wagenschein diejenigen, die sich mit dem bisherigen Ergebnis zufrieden geben und glauben eine Einsicht gewonnen zu haben und in denen nicht „das Organ" für folgende Fragen anspricht, mit denen laut Wagenschein erst die Mathematik beginnt:

- Bildet sich die Figur 2 wirklich? Gibt es wirklich rechte Winkel bei den Drehpunkten A und B und eine Greade ohne Knick bei C? (Siehe Abbildung 4 auf Seite 12)

[13] aus [Wagenschein 69]

[14] Dies ließe sich zwar öfter als die eingezeichneten zweimal tun, aber die so entstehenden drei Schnitzel reichen, wie sich zeigen wird für den gewünschten Zweck bereits aus.

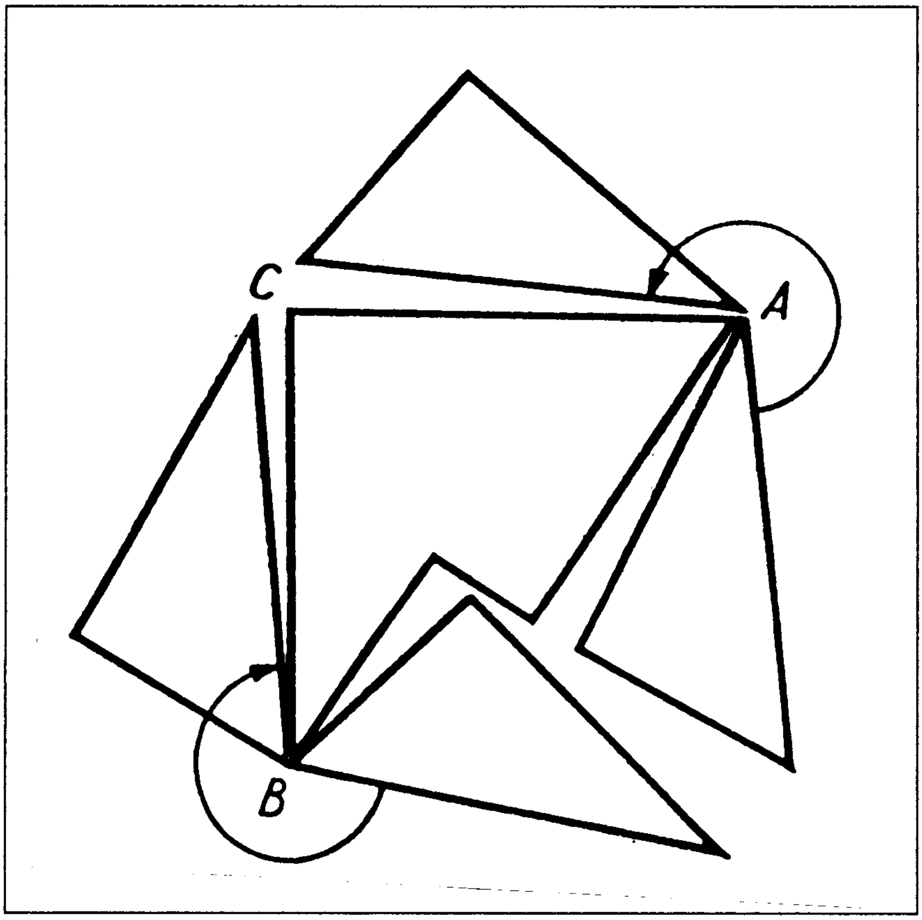

Abbildung 4: Annairizis Idee als Bewegungsmodell

- Kann man einsehen, daß es immer klappen muß?

Bei der letzten Frage heißt „einsehen“ soviel wie „verstehen worauf es beruht“, „immer“ nicht nur jederzeit sondern auch für jedes rechtwinklige Dreieck und „müssen“ steht für „Zwang“ bzw. „Notwendigkeit“. Erst mit solchen Überlegungen wird das Feld des spielerischen Zugangs verlassen und hier beginnt erst die „Mathematik“ und der „Beweis“.

Im folgenden wird kurz zusammengestellt, wie man die verschiedenen Schritte des vorgestellten Gedankengangs[15] „einsehen“ kann. Zunächst kann man das für die „Vermutung“, daß die beiden Dreiecke in Figur 1 (siehe Abbildung 3 auf Seite 10) immer aneinanderpassen müssen. Dazu formuliert „man (siehe Figur 1, rechte untere Ecke) den Befund ‚$\alpha + \beta$ =einem rechten Winkel‘ als eine *innere*

[15]Das Wort Gedankengang ist hier nicht ganz zutreffend, da „Exemplarisches Lehren“ immer auch die (Selbst-)Tätigkeit der Schüler im Blick hat. In diesem Fall (und eigentlich jedem Fall, den Wagenschein für geeignet hält) beinhaltet dies ein „Begreifen“ im engsten Sinn, also auch eine manuelle Auseinandersetzung mit der Materie.

Angelegenheit *desselben* Dreiecks ... (das sich ja hier *selbst* begegnet)"[16] und stellt fest: „Die zwei Dreiecke passen *dann* immer aneinander, wenn *immer* (d.h. in *jedem* rechtwinkligen Dreieck) die zwei kleinen Winkel zusammen genausoviel geben wie der dritte, der größte der rechte Winkel." ... Die[*se*] Einsicht gelingt, ... indem man die Winkel verschiebt: Wenn man nämlich den einen Winkel, α, längs der einen Seite bis zur nächsten Ecke fortgleiten läßt, und zwar so, daß der eine seiner Schenkel auf dieser Seite, sich mit ihr deckend, gleitet. Der andere bleibt dann immer zu sich selbst parallel, er weist immer in dieselbe Richtung, die er auch anfangs hatte ... [*vgl. Abbildung 5 auf Seite 13*]. Macht man das Entsprechende mit β und erkennt ferner γ in seinem Gegenüber wieder, so ist man schon fertig. (Und bemerkt *nebenbei*, daß dieses Vorgehen auch dann ‚geht', wenn das Dreieck gar nicht rechtwinklig ist!)"[17]

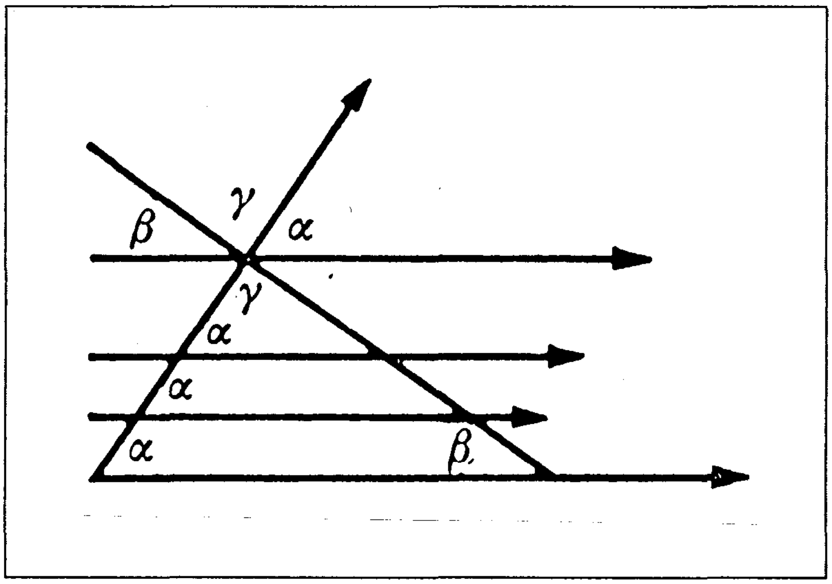

Abbildung 5: Figur die zur Erkenntnis führt, daß die Winkelsumme im Dreieck immer 180° ergibt.

Auch die Tatsache, daß in Abbildung 4 auf Seite 12 bei C kein Knick entsteht und sich an den Drehpunkten A und B rechte Winkel ergeben, geht aus demselben Satz von der Winkelsumme hervor. Dies soll hier allerdings nicht nocheinmal näher erläutert werden.

Für die Schüler ist damit alles klar, denn das „Winkelverschieben" funktioniert immer und auch die Gleichheit der Scheitelwinkel γ ist offensichtlich.[18] Damit

[16] aus [Wagenschein 69]
[17] aus [Wagenschein 69]
[18] Erst wenn man viel tiefer in mathematische Beweise eingestiegen ist, wird sich die Frage ergeben, ob der verschobene Schenkel wirklich Parallel bleibt (was ja z.B. bei einem aus Großkreisstücken bestehenden Dreieck der Kugeloberfläche nicht der Fall ist). Für die vorausgesetzte

ruht der Satz von der Winkelsumme nur noch auf dem „Axiom", daß es bei der Verschiebung Parallele gibt. Folglich ist der „Pythagoras" richtig, „weil der Satz von der Winkelsumme richtig ist, und der ist richtig, weil es Parallelen gibt. Und *das* ist ‚klar', ist ‚selbstverständlich'. Das versteht jedes gesunde Kind, das über zwölf Jahre alt ist. Es braucht dazu weder mathematische Vorkenntnisse noch die sagenhafte besondere Begabung, die als angebliche Voraussetzung immer wieder mit gruselnder Verehrung genannt wird."[19]

Eigentlich könnte das letzte Zitat von Wagenschein hier ganz gut als Schlußwort stehen, aber dem Autor geht es, genau wie Wagenschein um mehr. Hier sollte nicht nur das „Exemplarische Lehren" als alternative Unterrichtsform vorgestellt sondern, zumindest in Ansätzen, eines der möglichen letzten Ziele eines solchen Unterrichts verdeutlicht werden. Hier ist nicht die formale Bildung oder das Denkenlernen überhaupt gemeint. (Letzteres läßt sich z.B. auch beim Übersetzen lateinischer Texte lernen.) Es geht vielmehr um etwas spezifisch Mathematisches, nämlich darum, „in welchem Sinn und Grade mathematische Wahrheiten gewiß sind. Sie stehen nicht voneinander isoliert. Sie ruhen aufeinander, sie tragen einander, sie bestehen zusammen. Zuunterst liegt Unbeweisbares, Hinzunehmendes, Selbstverständliches[20]"[21] Wie wichtig gerade das ist, wird erst bewußt, wenn man den Rahmen der Mathematik verläßt. Nirgendwo sonst ist man sich so einig wie in der Mathematik, weil man schließlich von gemeinsamen Grundlagen ausgeht, also dieselben Axiome anerkennt. Ganz anders sieht auf anderen Gebieten aus. Hier schließt sich ein Aspekt der Schulmathematik an, der oft übersehen wird, daß sie nämlich einen wichtigen Beitrag zur Erziehung leisten kann und auch (so sieht es zumindest der Autor) wenigstens immer zu leisten versuchen sollte. Was der Autor hier meint wird in folgendem Text von Wagenschein ziemlich deutlich, der gleichzeitig als Schlußwort zu verstehen ist:

In der Mathematik gibt es in obigem Sinn keinen Streit. „Wenn wir dagegen miteinander über politische, philosophische oder religiöse Probleme nachdenken oder streiten, sind wir nicht in dieser glücklichen Lage, daß es schlimmstenfalls Mißverständnisse geben kann. Trotzdem ist es aber wichtig, daß der politische Streiter das Vergleichsbild der Mathematik *kennt*, und *nicht* als Vorbild. Denn dann sieht er: Hier, im ‚weltanschaulichen' Bereich, sind die ‚Axiome' vom einen zum anderen, oder von einer Gruppe zur anderen, *verschieden*, sind letzte Entscheidungen, Glaubenssätze, Grund–Entschlüsse. Und jedes faire Streitgespräch, solange es sich *logischer* Argumente bedient, kann nur den Sinn haben, beiderseits auf die — nun verschiedenen — Axiome zurückzugehen, jeder auf seine. Das heißt im eigentlichen Sinn des Wortes: „sich auseinandersetzen". Ist das geschehen, so ist das logische Gespräch zu Ende. Jeder hat seine, unbeweisbare,

---

Altersstufe der Schüler (ca. 12 Jahre) kann man aber getrost davon absehen.

[19] aus [Wagenschein 69]

[20] Der Mathematiker würde sagen es liegen Axiome zugrunde.

[21] aus [Wagenschein 69]

Position bezogen. Man kann den Gegner überführen, daß seine Behauptungen logisch nicht miteinander harmonieren. Ob man seine letzten Grundsätze teilt oder als unerträglich bekämpft, das hat ernstere als nur logische ‚Gründe'.

Damit wird ein Ziel der Selbsterziehung deutlich, das Voraussetzung ist dafür, daß Gespräche einen anständigen Sinn haben: Jeder sollte in sich selbst darüber klar werden, auf welchen *letzten* Überzeugungen seine Urteile über ein bestimmtes, rational *nicht* auflösbares Wirklichkeitsgebiet beruhen. Er sollte Ordnung in seinen Überzeugungen haben, ‚mit sich ins reine kommen'."[22]

[22] aus [Wagenschein 69]

Literatur

[Wagenschein 60] M. Wagenschein: NATUR PHYSIKALISCH GESEHEN, Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt a.M., 1960

[Wagenschein 65a] M. Wagenschein: VIELWISSEREI VERNUNFT HABEN NICHT LEHRT
in: H. Roth, A. Blumenthal (Hrsg.): *Exemplarisches Lehren*, Reihe A (Auswahl), Grundlegende Aufsätze aus der Zeitschrift Die Deutsche Schule, Heft 6, Hermann Schroedel Verlag KG, Hannover, 1965, S. 6 - 12

[Wagenschein 65b] M. Wagenschein: ZUR KLÄRUNG DES UNTERRICHTSPRINZIPS DES EXEMPLARISCHEN LEHRENS
in: H. Roth, A. Blumenthal (Hrsg.): *Exemplarisches Lehren*, Reihe A (Auswahl), Grundlegende Aufsätze aus der Zeitschrift Die Deutsche Schule, Heft 6, Hermann Schroedel Verlag KG, Hannover, 1965, 13 - 26

[Wagenschein 65c] M. Wagenschein: MATHEMATIK AUS DER ERDE
in: H. Roth, A. Blumenthal (Hrsg.): *Exemplarisches Lehren*, Reihe A (Auswahl), Grundlegende Aufsätze aus der Zeitschrift Die Deutsche Schule, Heft 6, Hermann Schroedel Verlag KG, Hannover, 1965, 27 - 31

[Wagenschein 68] M. Wagenschein: VERSTEHEN LEHREN GENETISCH — SOKRATISCH — EXEMPLARISCH, Verlag Julius Beltz, Weinheim, 1968

[Wagenschein 69] M. Wagenschein: DAS EXEMPLARISCHE LEHREN ALS FÄCHERVERBINDENDES PRINZIP,
in: E. Meyer (Hrsg.): *Exemplarisches Lehren — Exemplarisches Lernen*, Reihe: Didaktische Studien, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1969, S. 20 - 37

[Wagenschein 70] M. Wagenschein: URSPRÜNGLICHES VERSTEHEN UND EXAKTES DENKEN, Band II, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1970