

● Dynamik von DGS – Wozu und wie sollte man sie nutzen?

Jürgen Roth, Würzburg

In der Literatur zum Einsatz von dynamischer Geometriesoftware (DGS) im Unterricht wird immer wieder darauf verwiesen, dass der wesentliche Vorteil dieser Software die Möglichkeit ist, sehr einfach Bewegungen bzw. Veränderungen von Konfigurationen realisieren zu können. Es stellt sich allerdings die Frage, bei welchen Inhalten diese Möglichkeit sinnvoll eingesetzt werden kann. Selbst nach einer Beantwortung bleibt weiterhin zunächst offen, *wie* ein Einsatz von DGS im Unterricht aussehen sollte, um diese Möglichkeiten auch auszuschöpfen. Ferner darf die Entwicklungsarbeit nicht unterschätzt werden, die notwendig ist, um entsprechende DGS-Dateien zu erzeugen. Diese Problemstellungen werden hier diskutiert. Dabei wird deutlich, dass Konzeptionen zum DGS-Einsatz zwei Dimensionen berücksichtigen müssen. Dies ist zum einen die "Inhaltsdimension", die den Zweck des Einsatzes betrifft und zum anderen die "Unterstützungsdimension", die den Grad der zur Verfügung gestellten Fokussierungshilfen betrifft. Es wird an konkreten Beispielen dargestellt, welche Aspekte diese beiden Dimensionen beinhalten und wie sie ineinander greifen.

1 Alte Idee der beweglichen Konfigurationen

Die alte Idee, sich Konfigurationen beweglich vorzustellen und dies als Argumentationsgrundlage zu nutzen, wird spätestens seit der Meraner Reform immer wieder in der didaktischen Diskussion aufgegriffen und für den Geometrieunterricht (GU) propagiert. (Vgl. etwa Bender (1989).) Auswirkungen auf den realen Mathematikunterricht waren bisher allerdings kaum festzustellen. Krüger (2000) spricht diesbezüglich sogar vom "Scheitern der Meraner Reform". Als ein Grund dafür wird angeführt, dass es früher schwierig war, derartige Bewegungen zu visualisieren oder der Aufwand zur Herstellung von entsprechenden Medien, z.B. Mathematikfilme oder gegenständliche Modelle, ganz erheblich ist bzw. war. Darüber hinaus haben Unterrichtsfilme den Nachteil, dass Eingriffe in den Ablauf eines einmal erstellten Films nur in geringem Umfang durchführbar sind. Damit sind aber entdeckendes Lernen und das Beschreiten eigener Lernwege nur sehr eingeschränkt möglich. Diese Problematik hat sich durch die Verfügbarkeit von Computern und die Entwicklung von dynamischer Geometriesoftware (DGS) grundlegend geändert. Mit ihrer Hilfe können Visualisierungen mathematischer Konfigurationen relativ einfach erzeugt und dynamisch variiert werden. Wichtig ist dabei die Möglichkeit, einzelne Variable der Konfiguration gezielt und stetig bzw. "quasistetig" zu verändern. Diese Variation kann z.B. mit Hilfe von Schiebereglern reali-

siert werden. Diese Vorgehensweise bietet sich dann an, wenn viele verschiedene, vorab bereits feststehende Veränderungsmöglichkeiten nebeneinander zur Verfügung gestellt werden sollen. Darüber hinaus bietet DGS infolge des Zugmodus große Freiheiten in den Variationsmöglichkeiten und ist einfach und intuitiv zu bedienen. Der letztgenannte Aspekt ist insbesondere im Hinblick darauf, dass das Arbeiten mit Bewegungen und Veränderungen meiner Ansicht nach den Mathematikunterricht spätestens ab der 5. Jahrgangsstufe begleiten sollte, ein entscheidendes Kriterium beim Einsatz von Computern im Unterricht.

2 Funktionen des DGS-Einsatzes (Wozu?)

Die Tatsache, dass Veränderungen mit Hilfe geeigneter Computerprogramme sehr einfach durchgeführt und von Schülerinnen und Schülern in gewissen Grenzen selbst gesteuert werden können, birgt alleine allerdings noch keinen didaktischen Vorteil. Die Bewegung bzw. Veränderung muss zwar nicht mehr hineingesehen werden, weil sie bereits bildhaft vor dem Auge der Schülerin bzw. des Schülers abläuft, um aber aus dieser Bewegung Informationen oder Ideen für eine Argumentation zu erhalten, ist eine intensive Auseinandersetzung mit der Problematik notwendig, die nicht einfach durch oberflächliches Betrachten von Bewegungen erreicht wird. Genau genom-

men setzt ein Gewinn bringender Einsatz von Software, die "benutzergesteuerte" dynamische Veränderungen zulässt, bereits die *Fähigkeiten des Beweglichen Denkens* (Roth 2005b) voraus. Es handelt sich dabei um folgende drei Fähigkeiten:

1. Bewegung hineinsehen
und damit argumentieren

Hier geht es um die Fähigkeit, in ein (statisches) Phänomen eine Bewegung bzw. eine Veränderung hineinsehen zu können. Darüber hinaus gehört zu dieser Komponente des Beweglichen Denkens aber auch die Fähigkeit, diese vorgestellte Bewegung bzw. Veränderung zur Argumentation beim Lösen von Problemen, Entdecken von Zusammenhängen und ganz allgemein beim Erforschen von (mathematischen) Phänomenen benutzen zu können.

2. Gesamtkonfiguration
erfassen und analysieren

Zum Beweglichen Denken gehört die Fähigkeit, eine reale bzw. vorgestellte ("hineingesehene") Bewegung/Veränderung in ihren Auswirkungen auf die Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren zu können. Dies erfordert, die Fokussierung auf bestimmte Aspekte wechseln und so jeweils für gerade betrachtete Fragestellungen relevante Veränderungen bzw. Invarianten in den Blick nehmen zu können.

3. Änderungsverhalten
erfassen und beschreiben

Der dritte Aspekt des Beweglichen Denkens ist die Fähigkeit, die Frage nach der Art und Weise der Veränderung beantworten, also das Änderungsverhalten qualitativ erfassen und beschreiben zu können.

Für einen Menschen, der versiert im Beweglichen Denken ist, kann der Computer mit entsprechender Software drei wesentliche Funktionen erfüllen:

Kontrollinstanz:

Er ist eine externe Kontrollinstanz, mit der im Kopf abgelaufene bewegliche Denkvorgänge auf ihre Tragfähigkeit hin überprüft und kritisch hinterfragt werden können.

"Denkzeug":

Der Computer ist ein Werkzeug, das das Bewegliche Denken unterstützt, in Anlehnung an Dörfler (1991) also ein "Denkzeug", weil er bei komplexen Problemstellungen, die

nicht mehr im Kopf erfassbar sind, dazu dient, die Komplexität in den Griff zu bekommen. Dies geschieht dadurch, dass das Gedächtnis entlastet wird und einzelne Fähigkeitsaspekte des Beweglichen Denkens an den Rechner delegiert werden. Folgende Aspekte sind hier zu nennen:

- Am Computer arbeitende Menschen benötigen die Fähigkeit "Bewegung hineinsehen" nicht mehr im gleichen Umfang wie jene ohne Werkzeug, da die Bewegung zwar noch geplant, aber nicht mehr mental realisiert werden muss.
- Das Gedächtnis wird nicht mehr so stark belastet, weil die Gesamtkonfiguration ständig zur Verfügung steht und nötige Fokussierungen auf jeweils relevante Details nur noch antizipiert werden müssen. Geeignete Hilfsmittel, die das Computerprogramm bietet, können zur Konzentration der Aufmerksamkeit auf diesen Aspekt genutzt werden.
- Diese Entlastung in den genannten kognitiven Bereichen erlaubt beim Problemlösen mit Hilfe des Beweglichen Denkens die Konzentration auf Aspekte der Planung, Interpretation, Analyse und Argumentation. Voraussetzung dazu ist allerdings die Fähigkeit, mit der jeweiligen Software umgehen und ihren zielgerichteten Einsatz planen und im Laufe des verteilten Denkprozesses ggf. auch reorganisieren zu können.

Kommunikationsmittel:

Der Computer ist ein Hilfsmittel, um Ergebnisse beweglicher Denkvorgänge und ihr Zustandekommen gerade auch solchen Menschen zu vermitteln, deren Fähigkeit zum Beweglichen Denken weniger stark ausgeprägt ist. Dabei spielen die Möglichkeiten des dynamischen "Vorführens" von Veränderungen und der Aufmerksamkeitsfokussierung eine wichtige Rolle.

Diese drei genannten Funktionen des Computers gelten für Personen, deren kognitives Standardrepertoire das Bewegliche Denken als selbstverständlichen Bestandteil umfasst. Sie eröffnen aber auch einen Zugang zu sinnvollen Einsatzmöglichkeiten des Computers im Mathematikunterricht, wenn es um die Entwicklung Beweglichen Denkens geht. Dabei sind zwei wesentliche Zielrichtungen, dass die Schülerinnen und Schüler auch mit Hilfe des Computereinsatzes dazu befähigt werden,

- ohne Computer, also im Kopf, Bewegungen hineinzusehen, zu analysieren und Änderungsverhalten zu erfassen, sowie
- bei komplexeren Gegebenheiten einen geeigneten Computereinsatz zu planen, vorzustrukturieren und während des Denkprozesses ggf. zu reorganisieren.

3 Fokussierungshilfen

Auf dem Weg zu diesen Zielen ermöglicht der Einsatz des Computers der Lehrkraft die Komplexität des beweglichen Denkprozesses dadurch zu reduzieren, dass Strukturierungs- bzw. Fokussierungshilfen bereits in eine Lernumgebung eingebaut werden und den Schülerinnen und Schülern so eine Konzentration auf Analyse- und Argumentationsprozesse ermöglicht wird. Dabei wird man im Zuge der Entwicklung des beweglichen Denkens die Strukturierungshilfen in den Lernumgebungen schrittweise verringern. In der Endform erzeugen die Schülerinnen und Schüler die zu untersuchenden Konfigurationen mit Hilfe von DGS komplett selbst, planen selbstständig Fokussierungshilfen und setzen sie um bzw. nutzen DGS zur Kontrolle der Ergebnisse des im Kopf abgelaufenen Beweglichen Denkens. Diese Endform kann aber nur das Ziel eines langfristigen, sich über mehrere Jahre erstreckenden Prozesses sein. Für diesen Zeitraum müssen von Lehrern und Didaktikern auf DGS basierende Lernumgebungen entwickelt werden, die jeweils angemessene Fokussierungshilfen enthalten. Die Gestaltung von Fokussierungshilfen erfordert dabei einen erheblichen und nicht zu unterschätzenden Aufwand im Hinblick auf die Konzeption, aber auch auf die Umsetzung der gewünschten Fokussierungshilfen. Oft sind dazu trickreiche und nicht nahe liegende Konstruktionen notwendig, die ein DGS so nicht unmittelbar zur Verfügung stellt. Auch wäre eine einzelne Lehrkraft überfordert, wollte sie zu allen Themen des Lehrplanes geeignete auf DGS basierende Lernumgebungen entwickeln. Hier ist eine Internet-Plattform notwendig, auf der bereits fertige Lernumgebungen zu verschiedenen Themen vorliegen. Dort findet man – im Idealfall – bereits eine Umsetzung zu einem gewünschten Thema, die man als Lehrkraft an die eigenen Bedürfnisse anpassen kann, oder man erhält zumindest Anregungen dazu, wie eigene Ideen mit Hilfe von DGS umgesetzt werden können. Einen Ansatz dazu stellt meine Homepage dar, die unter der Adresse <http://www.juergen-roth.de> erreichbar ist.

Hier stelle ich unter der Rubrik "EUKLID DynaGeo" eine ganze Reihe von Lernumgebungen zur Verfügung, die von mir konzipiert und umgesetzt wurden und die auf DynaGeoX-Applets basieren. Sie können online genutzt, aber auch heruntergeladen und gemäß den eigenen Vorstellungen und Bedürfnissen geändert werden. Außerdem zeigen sie exemplarisch, welche Arten von Fokussierungshilfen möglich sind.

Grundsätzlich kann man drei Stufen der Fokussierungshilfen unterscheiden:

1. Eine Konfiguration ist vollständig vorgegeben.
 - Für die wesentlichen zu beobachtenden Aspekte sind bereits Fokussierungshilfen (z.B. durch Farbgebung, Linienstärken, die Mitführung von Messwerten u.ä.) enthalten.
 - Evtl. sind Variationsmöglichkeiten an der Konfiguration bewusst eingeschränkt.
 - Evtl. können einzelne Elemente ein- und ausgeblendet werden.
 - Beispiele hierfür sind in Abb. 1 und Abb. 2 wiedergegeben. Die zugehörigen EUKLID DynaGeoX-Applets findet man im Internet unter

<http://www.juergen-roth.de>
→ EUKLID DynaGeo

und dort unter → N → Nebenwinkel bzw. → S → Schachtel.

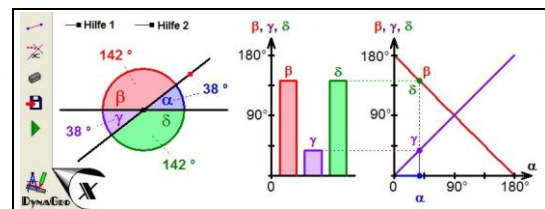


Abb. 1: Scheitel- und Nebenwinkel (Eigenschaften)

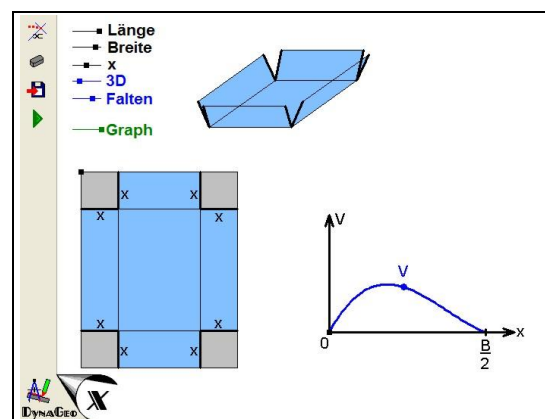


Abb. 2: Oben offene Schachtel

2. Eine veränderbare (Teil-)Konfiguration ist vorgegeben.

- Sie kann (bzw. muss) ergänzt oder verändert werden.
- Es sind nur einzelne Fokussierungshilfen vorhanden.
- Ein Beispiel hierfür ist in Abb. 3 wiedergegeben. Das zugehörige EUKLID DynaGeoX-Applet findet man im Internet unter

<http://www.juergen-roth.de>
 → EUKLID DynaGeo → D
 → Dreiecksgrundformen
 → gleichschenkliges Dreieck

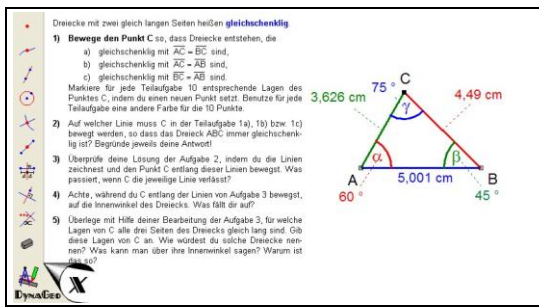


Abb. 3: Begriffsumfang: "Gleichseitiges Dreieck"

3. Es wird mit einer leeren, unstrukturierten DGS-Datei gearbeitet.

- Eine dynamische Geometriesoftware wird völlig selbstständig und ohne Vorgaben als Werkzeug benutzt.

Insgesamt muss darauf hingearbeitet werden, dass die Schülerinnen und Schüler sich beim Arbeiten mit dem Computer intensiv mit den beobachtbaren Veränderungen und Invarianten auseinander setzen und auch beginnen ihr Vorgehen (Welche Veränderungen sollten als nächstes mit welchem Ziel untersucht werden?) zu planen. Geschieht dies nämlich nicht, besteht die Gefahr, dass der Computereinsatz die Entwicklung des Beweglichen Denkens nicht nur nicht unterstützt, sondern ggf. sogar kontraproduktiv wirkt, weil evtl. nur "wild mit der Maus gezogen wird", man nette Effekte auf dem Bildschirm betrachtet (Computerspiel!) und kein Denkvorgang einsetzt. Erleben die Schülerinnen und Schüler aber nicht, dass man mit Bewegungen argumentieren kann und sie das Verständnis unterstützen, so wird der Computereinsatz an dieser Stelle immer nur als "Spielerei" eingeordnet und der erwünschte Aufbau der Fähigkeiten des Beweglichen Denkens findet nicht statt.

Neben den oben angesprochenen Hilfen zur Aufmerksamkeitsfokussierung wird versucht, die Auseinandersetzung mit den beobachteten Veränderungen dadurch zu intensivieren, dass Vorhersagen, Begründungen und Ergebnisfixierungen in Wort und Schrift eingefordert werden. Darüber hinaus ist es notwendig, die Schülerinnen und Schüler durch regelmäßiges Aufgreifen und explizites Ansprechen an heuristische Strategien bzw. Arbeitsstrategien zu gewöhnen, die charakteristisch für das Arbeiten im Sinne des Beweglichen Denkens sind. Solche Strategien sind z.B.:

- In ein statisch formuliertes Phänomen eine Bewegung hineinsehen.
- Bedingungen jeweils einzeln und kontrolliert variieren.
- Veränderungen bewusst bis hin zu Extremlagen ausführen.

4 Sinnvoller Einsatz der dynamischen Möglichkeiten von DGS (Wie?)

Im Folgenden werden verschiedene Einsatzweisen für eine DGS im Rahmen eines Unterrichts beschrieben, der das Bewegliche Denken der Schülerinnen und Schüler fördern will.

1. Eine DGS wird genutzt, um die Idee einer Argumentation zu kommunizieren, die Elemente des Beweglichen Denkens nutzt.

Ich möchte dies anhand des Beweises zu folgendem Satz knapp erläutern:

Satz: Jeder Punkt P, der nicht auf der Achse a liegt, ist unterschiedlich weit von einem Punkt A und dessen Bildpunkt A' bei Achsenspiegelung an der Achse a entfernt.

Eine mit einer DGS erzeugte Konfiguration wird im Unterricht als dynamische Grundlage für ein Unterrichtsgespräch genutzt (vgl. Abb. 4, Abb. 5 und Abb. 6). Das zugehörige EUKLID DynaGeoX-Applet findet man im Internet unter

<http://www.juergen-roth.de>
 → EUKLID DynaGeo → K
 → Kongruenzabbildungen
 → Eigenschaften von Achsenpunkten

Dabei werden bewusst Fokussierungshilfen verwendet. (Hier dienen die unterschiedliche Färbung der Strecken [AP] und [A'P] sowie das Einzeichnen des Schnittpunktes S von

[AP] bzw. [A'P] und a als Fokussierungshilfen.) Im Unterrichtsgespräch wird herausgearbeitet, welchen Vorteil die Vorstellung der Bewegung für die Argumentation bietet. Bereits die einfache Strategie, zunächst Grenzlagen zu erzeugen und wieder zu verlassen, führt auf die entscheidende Idee. Bewegt man nämlich P von a weg, so stellt man fest, dass abhängig von der Bewegungsrichtung eine der beiden Strecken [AP] oder [A'P] die Achse a im Punkt S schneidet. Als Achsenpunkt ist er von A und A' gleich weit entfernt. Die Strecke [A'P] in Abb. 4 lässt sich also aus den Seiten [AS] und [SP] des Dreiecks $\triangle ASP$ zusammensetzen. Die Summe dieser beiden Streckenlängen ist größer als [AP] (Dreiecksungleichung). Damit ist aber der Satz bereits bewiesen, weil das dynamische Argument sofort ergibt, dass jede Bewegung von P von der Achse a weg einen Schnittpunkt S erzeugt.

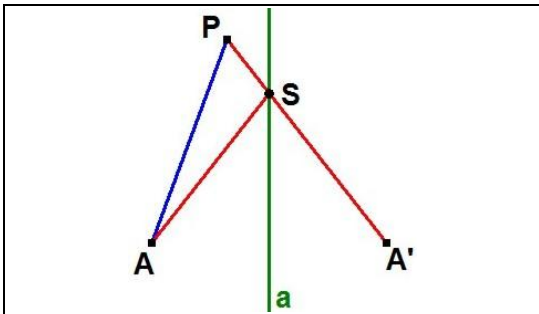


Abb. 4: Eigenschaft von Achsenpunkten (1)

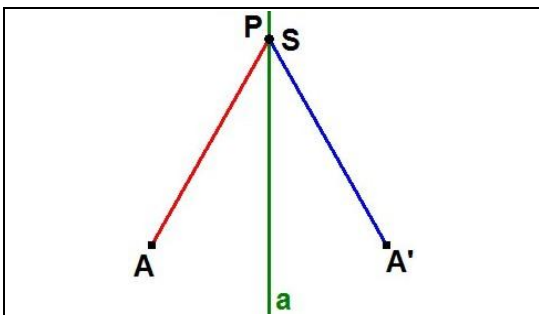


Abb. 5: Eigenschaft von Achsenpunkten (2)

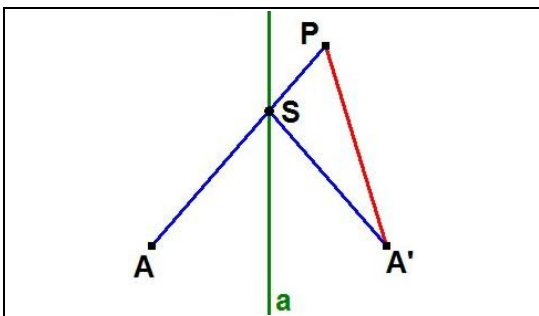


Abb. 6: Eigenschaft von Achsenpunkten (3)

Weitere interessante Beispiele findet man z.B. bei Danckwerts/Vogel (2003).

Abb. 4 bis Abb. 6 können noch in einer anderen Weise als oben gedeutet werden:

2. Mit einer DGS erzeugte dynamische Konfigurationen können bei Beweisen dazu eingesetzt werden, die gesamte Beweisidee zu vermitteln, sie also "auf einen Blick" erfass- und verstehbar zu machen.

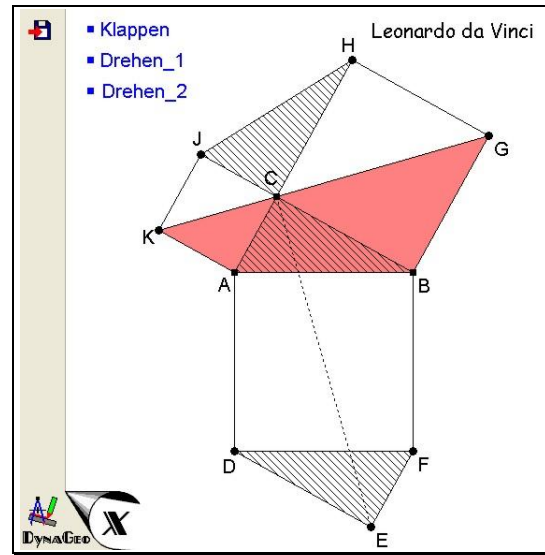


Abb. 7: Satz des Pythagoras – da Vinci-Beweis

Wenn man sich vor Augen hält, wie schwierig es oft für Lernende (nicht nur in der Schule!) ist, eine Beweisidee (d.h. den "roten Faden" des Beweisganges) zu erfassen, wird deutlich, welches Potenzial das Bewegliche Denken und (mit einer DGS erzeugte) dynamische Konfigurationen hier eröffnen. Ein anderes Beispiel für eine über Bewegungen eingefangene und dem Verständnis zugänglich gemachte Beweisidee ist in Abb. 7 für einen auf da Vinci zurückgehenden Beweis des Satzes des Pythagoras angedeutet. Das zugehörige EUKLID DynaGeoX-Applet findet man im Internet unter

<http://www.juergen-roth.de>
 → EUKLID DynaGeo → P → Pythagoras
 → Beweis des Leonardo da Vinci

Elschenbroich (2001) geht auf weitere Aspekte beim Einsatz von DGS im Zusammenhang mit dem Beweisen ein. Wichtig ist dabei insbesondere auch der unten unter "experimentelles Arbeiten" aufgeführte Aspekt "Finden von Ideen im Problemlöseprozess".

3. Mit einer DGS konstruierte Konfigurationen können dynamische, weil variierbare und damit in ihrem Umfang und in ihren

Grenzen besser erfassbare Verständnisgrundlagen für Begriffe und ihre Eigenschaften sein.

Abb. 8 zeigt dies exemplarisch für die Winkeltypen und die zugehörigen Winkelsätze an Parallelenkreuzungen. Das zugehörige EUKLID DynaGeoX-Applet findet man im Internet unter

<http://www.juergen-roth.de>
 → EUKLID DynaGeo → P
 → Parallelenkreuzung → Merkfigur

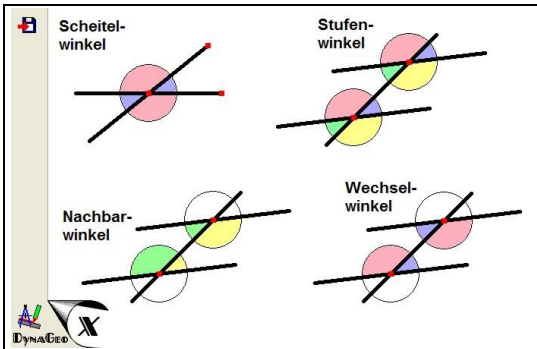


Abb. 8: Verständnisgrundlage für Winkel an Parallelenkreuzungen

Zu beachten ist dabei, dass diese dynamischen Verständnisgrundlagen den Schülerinnen und Schülern erst nach einer Erarbeitungsphase (im Sinne von Postorganizern nach Ausubel) zur Verfügung gestellt werden. Ein weiteres Beispiel hierzu zeigt Abb. 9. Das EUKLID DynaGeoX-Applet zu Begriffen am Dreieck findet man im Internet unter

<http://www.juergen-roth.de>
 → EUKLID DynaGeo → D → Dreieck

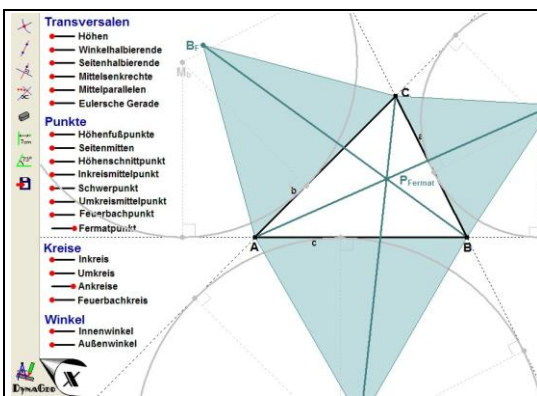


Abb. 9: Verständnisgrundlage für Begriffe am Dreieck

Es geht dabei insbesondere um den Aufbau und die Entwicklung von Grundvorstellungen

zu mathematischen Begriffen (hier Begriffen am Dreieck) im Sinne von vom Hofe (1995).

4. Mit DGS kann man im Hinblick auf Bewegliches Denken experimentell arbeiten.

Auf diese Weise können Zusammenhänge entdeckt werden. Dies erfolgt mit Hilfe von DGS-Dateien, die die zu erarbeitenden Beziehungen nicht bereits durch Fokussierungshilfen wie z.B. die Farbgebung, mitgeführte Messwerte u.ä. nahe legen. In Abb. 10 wird beispielsweise eine Konfiguration gezeigt, mit deren Hilfe Schülerinnen und Schüler in Partnerarbeit die Eigenschaften der Achsenspiegelung erarbeiten. Wichtig ist dabei, von Anfang an sehr viel Wert auf Begründungen von entdeckten Zusammenhängen zu legen. Dies erhöht die Chance auf eine intensive Auseinandersetzung. Das EUKLID DynaGeoX-Applet zu diesem Beispiel findet man unter

<http://www.juergen-roth.de>
 → EUKLID DynaGeo → K
 → Kongruenzabbildungen
 → Eigenschaften der Achsenspiegelung

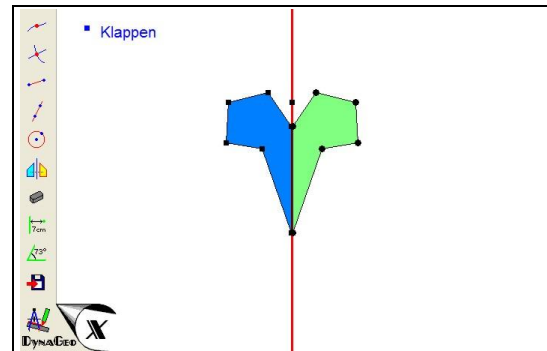


Abb. 10: Erarbeitung der Eigenschaften der Achsenspiegelung

Ein weiteres Beispiel zeigt Abb. 11. Dort wird in direkter Gegenüberstellung ein Dreieck jeweils verschiedenen Kongruenzabbildungen und einer schiefen Achsenspiegelung unterworfen. Durch dynamische Exploration wird den Schülerinnen und Schülern die Entdeckung ermöglicht, dass Längen-, Winkel- und Geradentreue als Abbildungseigenschaften etwas besonderes sind, und dass der rechte Winkel zwischen der Verbindungsstrecke von Punkt und Bildpunkt und der Symmetrieachse bei der Achsenspiegelung für diese Eigenschaften wesentlich ist.

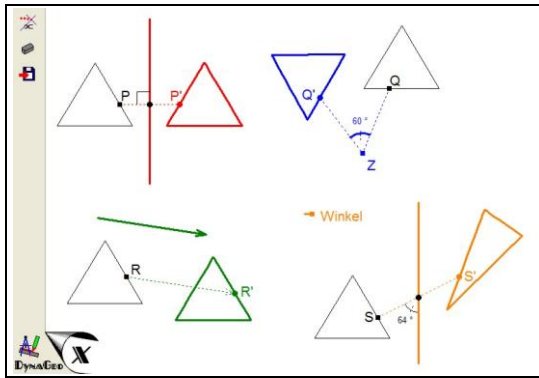


Abb. 11: "Längen-, Winkel- und Geradentreue"

Auch das *Finden von Ideen im Problemlöseprozess* geschieht im Rahmen eines experimentellen, zielgerichteten Arbeitens. Zur Illustration soll folgendes Problem dienen (vgl. Abb. 12):

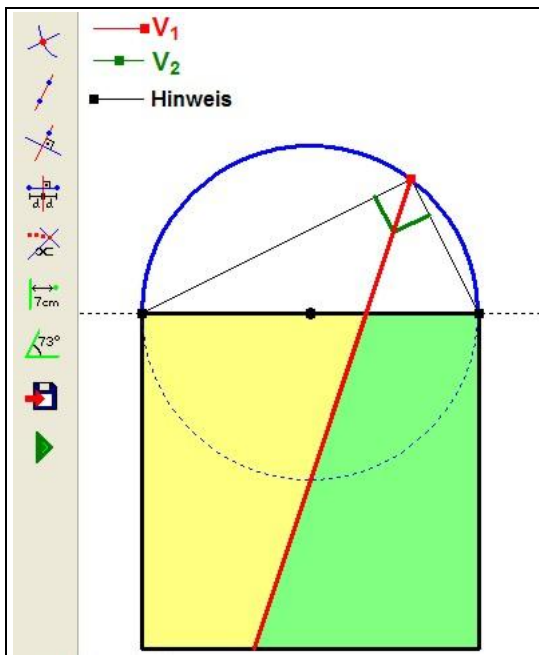


Abb. 12: "Halbierter Rechter" – Ideen finden beim Problemlösen

Die Winkelhalbierende des rechten Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck teilt das Quadrat über der Hypotenuse in zwei Teilflächen gleichen Flächeninhalts.

Hier hilft es weiter, wenn man sich die oben bereits erwähnten Strategien in Erinnerung ruft: Den Einfluss der *Bedingungen* auf ein Problem, kann man am einfachsten abschätzen, wenn man sie jeweils einzeln *variiert* und dabei die anderen Bedingungen konstant hält. Eine der möglichen Variationen, nämlich die Bewegung des Scheitelpunkt des rechten Winkels auf dem Thaleskreis führt zu einer entscheidenden Idee. Bei dieser Bewegung ändert sich auch die Lage der Winkel-

halbierenden des rechten Winkels. Man kann vermuten, dass es sich um eine Drehung handelt. Es stellt sich die Frage, um welchen Punkt diese Drehung erfolgt. Oft hilft es – zur Klärung von Fragen wie dieser – die *Veränderungen bis hin zu Extremlagen auszuführen*. Wendet man diese Strategie auf die hier betrachtete Bewegung an, so bedeutet das, den Punkt auf dem Thaleskreis so weit zu ziehen, dass er (fast) mit den Endpunkten der Hypotenuse zur Deckung kommt. In diesen Lagen scheint die Winkelhalbierende jeweils (näherungsweise) mit einer der Diagonalen des Hypotenusenquadrates zusammenzufallen. Die Diagonalen schneiden sich aber im Mittelpunkt des Quadrats. Dies legt die Vermutung nahe, dass der Drehpunkt der Winkelhalbierenden der Mittelpunkt des Hypotenusenquadrates ist. Das ist besonders deshalb interessant, weil sich in diesem Punkt auch die Mittelsenkrechte der Hypotenuse und der Thaleskreis schneiden. Diese Vermutung ist der Kern der Problemlösung. Alles weitere lässt sich nun mit einer einfachen Kongruenzüberlegung (Die Gerade durch den Scheitel des rechten Winkels und den Mittelpunkt des Quadrats halbiert die Quadratfläche.) bzw. mit Winkelbetrachtungen an gleichschenkligen Hilfsdreiecken (Die Gerade durch den Scheitel des rechten Winkels und den Mittelpunkt des Quadrats ist die Winkelhalbierende des rechten Winkels.) zeigen.

Das EUKLID DynaGeoX-Applet zu diesem Beispiel findet man unter

<http://www.juergen-roth.de>
 → EUKLID DynaGeo
 → K → Knobelaufgabe

Weitere Beispiele zum experimentellen und heuristischen Arbeiten mit DGS findet man etwa in Weth (2002).

5. Ein wesentlicher Aspekt des Einsatzes dynamischer Visualisierungen liegt in der Reflexion von Problemlöseprozessen, in denen ohne (Computer-)Werkzeug gearbeitet wird und bei denen Heuristiken und Fähigkeiten des Beweglichen Denkens eingesetzt werden.

Dabei werden die Schülerinnen und Schüler mit Problemen konfrontiert und erhalten als Werkzeuge (zunächst) nur Papier und Bleistift. Beim anschließenden Computereinsatz stehen drei Gesichtspunkte im Mittelpunkt, nämlich

- die Kontrolle der Richtigkeit der dynamischen Argumentation,
- die Kommunikation von Gedankengängen und Ergebnissen und

- die Reflexion über eingesetzte heuristische Strategien und deren Verallgemeinerbarkeit.

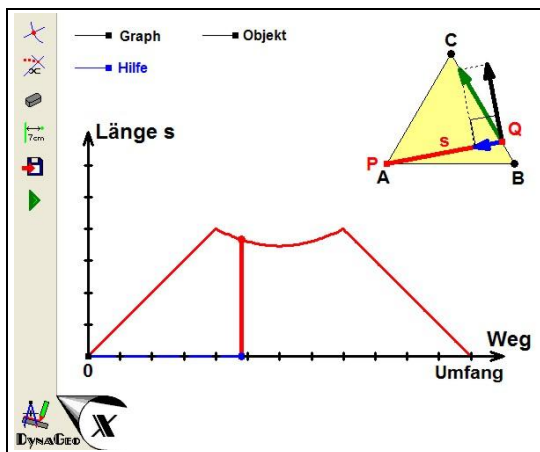


Abb. 13: "Dreieckssehne" – Reflexion von Problemlöseprozessen

Zur Illustration soll das Problem der Längenänderung einer "Sehne" im gleichseitigen Dreieck dienen. Dabei wird ein Endpunkt der Sehne festgehalten und der andere wird gleichmäßig (mit konstanter Bahngeschwindigkeit) entlang der Dreiecksperipherie bewegt. Wie ändert sich dabei die Länge der Sehne (vgl. Abb. 13)? Eine ausführliche Darstellung des Problems und seiner Lösung findet man in Roth (2005a). Dynamische Arbeitsblätter zur zugehörigen Unterrichtssequenz stehen im Netz unter

<http://www.juergen-roth.de>
 → EUKLID DynaGeo → S
 → Kurvenerzeugende Sehnen

4 Dimensionen des Einsatzes von DGS

Liest man die vorstehende Liste von Einsatzmöglichkeiten für eine DGS im Rahmen eines auf Bewegliches Denken ausgerichteten Mathematikunterrichts, so wird deutlich, dass (fast) bei jedem Punkt graduelle "Feineinstellungen" insbesondere im Hinblick auf Fokussierungshilfen möglich und nötig sind. Dies liegt darin begründet, dass der Einsatz von DGS (nicht nur) im Zusammenhang mit Beweglichem Denken zwei unabhängige Dimensionen besitzt, nämlich die "Inhaltsdimension", die das Ziel des DGS-Einsatzes betrifft und die "Unterstützungsdimension", die den Grad der Fokussierungshilfen umfasst. In Tabelle 1 wird für jeden Verwendungszweck durch ein Kreuz X gekennzeichnet,

welcher Grad der Fokussierungshilfen jeweils angemessen sein kann. Die in Klammern gesetzten "Kreuze" (X) in der Spalte "Leere, unstrukturierte DGS-Datei" bedeuten, dass hier geeignete Dateien zwar von fortgeschrittenen Schülerinnen und Schülern selbst erstellt werden können, der Einsatz im Hinblick auf das Inhaltsziel aber einen anderen Grad der Fokussierungshilfe erforderlich macht.

Literatur

- Bender, Peter (1989): Anschauliches Beweisen im Geometrieunterricht – unter besonderer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen bzw. Verformungen. In: Kautschitsch, Metzler (Hrsg.): Anschauliches Beweisen. 7. und 8. Workshop zur "Visualisierung in der Mathematik" in Klagenfurt im Juli 1987 und 1988, Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, Stuttgart: B. G. Teubner, 95-145
- Bender, Peter (2001): Schul-Geometrie und Computer-Geometrie. In: H.-J. Elschenbroich, Th. Gawlick, H.-W. Henn (Hrsg.): Zeichnung – Figur – Zugfigur, Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie-Software, Ergebnisse eines RiP-Workshops vom 12.-16. Dezember 2000 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, Hildesheim: Franzbecker, 31-40
- Dankwerts, Rainer und Dankwart Vogel (2003): Dynamisches Visualisieren und Mathematikunterricht – Ein Ausloten der Chancen an zwei Beispielen. In: Mathematik lehren, Heft 117, 19-22 und 39
- Dörfler, Willibald (1991): Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. In: Willibald Dörfler et al. (Hrsg.): Computer – Mensch – Mathematik: Beiträge zum 6. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik, Universität Klagenfurt, 23.-27.09.1990. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, Stuttgart: B. G. Teubner, 51-75
- Elschenbroich, Hans-Jürgen (2001): DGS als Werkzeug zum präformalen visuellen Beweisen. In: Hans-Jürgen Elschenbroich, Thomas. Gawlick, Hans-Wolfgang Henn (Hrsg.): Zeichnung – Figur – Zugfigur, Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie-Software, Ergebnisse eines RiP-Workshops vom 12.-16. Dezember 2000 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, Hildesheim: Franzbecker, 41-53
- Krüger, Katja (2000): Erziehung zum Funktionalen Denken – Zur Begriffsgeschichte eines Didaktischen Prinzips. Berlin: Logos Verlag
- Roth, Jürgen (2005a): Kurvenerzeugende Sehnen – Kurvendiskussion einmal anders. In: Mathematik lehren, Heft 130, 8-10

Roth, Jürgen (2005b): Bewegliches Denken im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker
 vom Hofe, Rudolf (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag

Weth, Thomas (2002): Der Computer als heuristisches Werkzeug im Geometrieunterricht. In: Werner Peschek (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2002, Hildesheim: Franzbecker, 511-514

▼ Ziel des DGS-Einsatzes	► Grad der Fokussierungshilfen		
	Fertig vorgegebene Konfiguration (evtl. Möglichkeit zum Ein- und Ausblenden von Elementen)	Veränderbare Konfiguration mit einzelnen Fokussierungshilfen	Leere, unstrukturierte DGS-Datei
Bewegliche Argumentation kommunizieren	X		(X)
Beweisideen vermitteln	X		(X)
Verständnisgrundlagen für Begriffe und ihre Eigenschaften bilden	X	X	(X)
Experimentelles Arbeiten <ul style="list-style-type: none"> • Entdecken von Zusammenhängen 	X	X	X
Experimentelles Arbeiten <ul style="list-style-type: none"> • Finden von Ideen im Problemlöseprozess 		X	X
Reflexion von Problemlöseprozessen	X		X

Tab. 1: Einsatzmöglichkeiten von DGS