Jürgen Roth: Bewegliches Denken im Geometrieunterricht
In: Hans-Wolfgang Henn (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2003,
Verlag Franzbecker, Hildesheim, 2003, S. 537 - 540

Jürgen ROTH, Würzburg

Bewegliches Denken im Geometrieunterricht

Die alte Idee, sich Figuren oder Figurenteile beweglich vorzustellen und dies als Argumentationsgrundlage zu nutzen, wird spätestens seit der Meraner Reform immer wieder in der didaktischen Diskussion aufgegriffen und für den Geometrieunterricht (GU) propagiert. Auswirkungen des Prinzips der Bewegung auf den realen GU sind bisher allerdings kaum festzustellen. Als ein Grund für dieses Phänomen wird angeführt, dass es (bisher) schwierig war derartige Bewegungen zu visualisieren. Dies hat sich durch die Verfügbarkeit von Dynamischer Geometriesoftware (DGS) grundlegend geändert. Mit Hilfe des Zugmodus ist die Realisierung von Bewegungen auf dem Bildschirm sehr einfach geworden (vgl. z. B. Abb. 1 – 5). Diese Tatsache alleine birgt allerdings noch keinen didaktischen Vorteil. Gefragt ist nämlich eine intensive Auseinandersetzung mit der Problematik, die durch oberflächliches Betrachten von Bewegungen nicht erreicht wird.

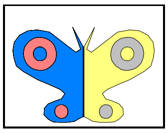
Abb. 1

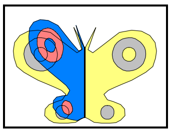
Abb. 2

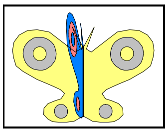
Abb. 3

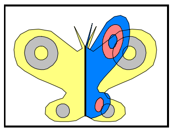
Abb. 4

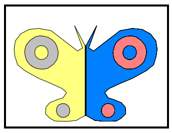
Abb. 5

Damit sich das Prinzip der Bewegung zu einer Hilfe für Schüler bei wesentlichen Aktivitäten des Geometrieunterrichts[1] entfalten kann, ist eine Reihe von kognitiven Fähigkeiten zu entwickeln, die wir unter dem Begriff Bewegliches Denken[2] zusammenfassen. Diese kognitiven Fähigkeiten lassen sich am Besten am konkreten Beispiel erfassen. Wir betrachten dazu folgende Aufgabe und gehen der Frage nach, welche Fähigkeiten man besitzen (oder sich erarbeiten) muss, um sie lösen zu können.

> Wie viele gleichschenklige Dreiecke mit einem 45°-Innenwinkel gibt es, wenn eine Dreiecksseite (z. B. [AB]) fest vorgegeben ist?

Zunächst muss man sich das Dreieck ABC mit fester Seite [AB] und (jedenfalls potentiell) beweglichem Eckpunkt C vorstellen. Man muss also in ein statisches Dreieck eine **Bewegung** des Eckpunktes C **hineinsehen** und **argumentieren**, dass durch diese Bewegung die Seitenlängen von [AC] und [BC] sowie Winkelgrößen des Dreiecks verändert werden.

Um die Aufgabe in den Griff zu bekommen ist es sicher sinnvoll, die beteiligten Aspekte einzeln zu betrachten. Es stellen sich dann zwei Fragen:

---

[1] Wesentliche Aktivitäten des Geometrieunterrichts sind unserer Meinung nach: Entdecken, Begriffe bilden, Konstruieren, Problembewusstsein schärfen, Probleme lösen, Begründen bzw. Beweisen

[2] Die Komponenten des Beweglichen Denkens sind (vgl. ROTH):

- Hineinsehen & Argumentieren
- Erfassen & Analysieren
- Änderungsverhalten realisieren

Für welche Lagen von C entstehen Dreiecke,

1. die gleichschenklig sind,
2. die (mindestens) einen 45°-Innenwinkel besitzen?

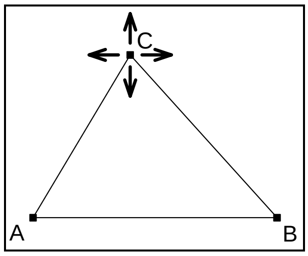

Abb. 6

Bei der 1. Frage fällt zunächst ins Auge, dass für alle Lagen von C auf der Mittelsenkrechten $m_{[AB]}$ von [AB] gleichschenklige Dreiecke entstehen. Haben wir damit aber alle möglichen gleichschenkligen Dreiecke erfasst? Um diese Frage beantworten zu können ist eine kognitive Fähigkeit notwendig, die wir als Komponente des Beweglichen Denkens betrachten. Es handelt sich um die Fähigkeit, die Gesamtfigur als Ganzes **erfassen** und jeweils relevante Teilaspekte fokussieren, also die Figur **analysieren** zu können. Im konkreten Fall bedeutet das, zu erkennen, dass bei der Bewegung von C nicht nur die Längen der Seiten [AC] und [BC] verglichen werden müssen, sondern auch zu überprüfen ist, wann die Länge von [AC] (bzw. [BC]) gleich der Länge der festen Seite [AB] wird. Gefragt ist hier eine Bewegung von C, die den Abstand von C zu A (bzw. B) konstant gleich der Länge der Strecke [AB] hält. Nun muss man geometrisch **argumentieren**. Alle Punkte, die einen festen Abstand zu einem vorgegebenen Punkt haben, liegen auf einem Kreis um den vorgegebenen Punkt mit dem festen Abstand als Radius.

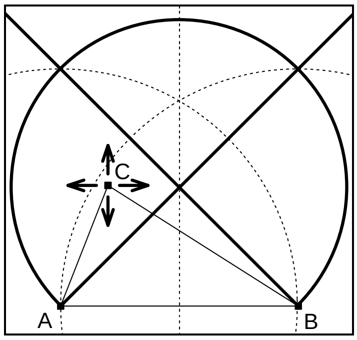

Abb. 7

Damit sind alle Lagen von C bestimmt, die gleichschenklige Dreiecke ABC liefern, nämlich: $C \in m_{[AB]} \cup k\left(A; \overline{AB}\right) \cup k\left(B; \overline{AB}\right)$. Die Kurven, auf denen C bewegt werden kann, sind in Abb. 7 gestrichelt dargestellt.

In ähnlicher Weise muss für die 2. Frage vorgegangen werden.[3] (Ergebnis: Fette Linien in Abb. 7.) Die Lösung der Aufgabe ergibt sich aus einer Konstruktion der entsprechenden Punktmengen (Kurven) und anschließender (optischer) Schnittmengenbildung.[4]

Lösung: Abb. 7 ist zu entnehmen, dass es, bei vorgegebener Seite [AB], 6 Dreiecke mit mathematisch positivem Umlaufsinn gibt, die gleichschenklig sind und (mindestens) einen 45°-Innenwinkel besitzen.[5]

An diesem Beispiel wird deutlich, dass entsprechende Fähigkeiten im MU

---

[3] Hier kann es hilfreich sein zunächst den analogen Fall eines rechten Innenwinkels zu betrachten und sich zu überlegen, was sich ändert, wenn man vom rechten Winkel zum 45°-Winkel übergeht.

[4] Es ist sicher eine höhere Anforderungsstufe, wenn das Problem vollständig im Kopf gelöst werden soll.

[5] Akzeptiert man Dreiecke mit negativem Umlaufsinn, so erhält man 12 Dreiecke. (Symmetrie bzgl. AB) Variationen der Aufgabenstellung ergeben vertiefende Fragestellungen. (Z. B.: Welchen Einfluss hat eine Änderung der Bedingung „45°-Winkel" auf die Anzahl der entsprechenden gleichschenkligen Dreiecke?)

langsam aufgebaut werden müssen. Der Autor hat ein Unterrichtskonzept für den gesamten Geometrieunterricht der 7. Jahrgangsstufe entwickelt, das es sich zum Ziel setzt, die kognitiven Fähigkeiten, die wir unter dem Begriff Bewegliches Denken zusammenfassen, durchgängig zu entwickeln und gewinnbringend anzuwenden. Im Folgenden wird schlaglichtartig eine Unterrichtssequenz vorgestellt, die Bewegliches Denken entwickeln und gleichzeitig die Begriffe gleichschenkliges, rechtwinkliges, stumpfwinkliges und spitzwinkliges Dreieck deutlich flexibler verfügbar machen soll als dies mit Hilfe statischer Prototypen möglich ist.

Schüler erforschen in dieser Sequenz verschiedene Dreieckstypen in Partnerarbeit am Computer. Um das oben angesprochene oberflächliche Betrachten von Bewegungen zu vermeiden wird einerseits die Aufmerksamkeit der Schüler in den Arbeitsaufträgen klar fokussiert und andererseits von den Schülern verlangt, alle Ergebnisse und Begründungen schriftlich zu fixieren. In Teilaufgabe 1 zum gleichschenkligen Dreieck wird das oben beschriebene **Erfassen und Analysieren** im Sinne eines gestuften Voranschreitens der Schwierigkeiten noch nicht gefordert. Spätere Arbeitsaufträge der Sequenz sind zum Teil wesentlich offener.

Dreiecke mit zwei gleich langen Seiten heißen **gleichschenklig**.

1) **Bewege den Punkt C** so, dass Dreiecke entstehen, die
   a) gleichschenklig mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ sind,
   b) gleichschenklig mit $\overline{AC} = \overline{AB}$ sind,
   c) gleichschenklig mit $\overline{BC} = \overline{AB}$ sind.

   Markiere für jede Teilaufgabe 10 entsprechende Lagen des Punktes C, indem du einen neuen Punkt setzt. Benutze für jede Teilaufgabe eine andere Farbe für die 10 Punkte.
2) Auf welcher Linie muss C in der Teilaufgabe 1a), 1b) bzw. 1c) bewegt werden, so dass das Dreieck ABC immer gleichschenklig ist? Begründe jeweils deine Antwort!
3) Überprüfe deine Lösung der Aufgabe 2, indem du die Linien zeichnest und den Punkt C entlang dieser Linien bewegst. Was passiert, wenn C die jeweilige Linie verlässt?
4) Achte, während du C entlang der Linien von Aufgabe 3 bewegst, auf die Innenwinkel des Dreiecks. Was fällt dir auf?
5) Überlege mit Hilfe deiner Bearbeitung der Aufgabe 3, für welche Lagen von C alle drei Seiten des Dreiecks gleich lang sind. Gib diese Lagen von C an. Wie würdest du solche Dreiecke nennen? Was kann man über ihre Innenwinkel sagen? Warum ist das so?

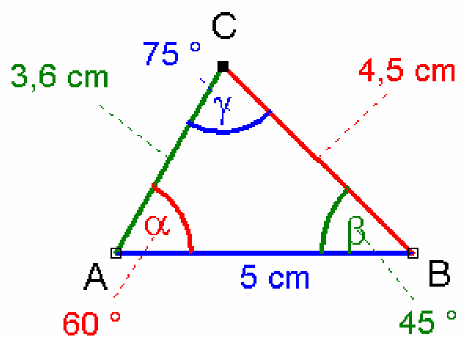

Abb. 8

Nach und nach erarbeiten die Schüler ein (scheinbar) statisches „Merkbild“ (vgl. Abb. 9), in dem die beweglichen Vorstellungen kondensiert sind. Um hieraus das Wissen wieder verfügbar zu machen, ist Bewegliches Denken (Hineinsehen & Argumentieren sowie Erfassen & Analysieren) notwendig.

Dann sollen auch Probleme wie das folgende gelöst werden: Der Punkt C in Abb. 10 wird entlang der eingezeichneten Kurve nach rechts bewegt. Welche Dreiecksgrundformen nimmt das Dreieck ABC dabei an?

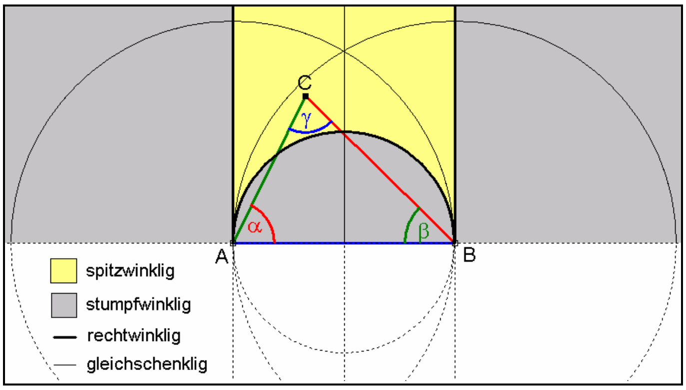

Abb. 9

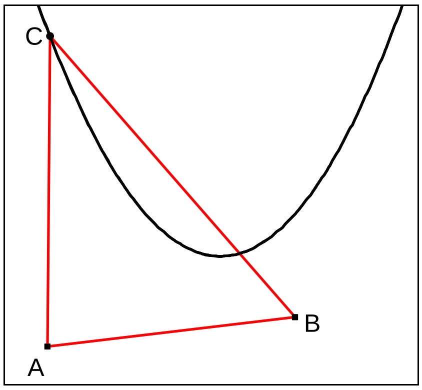

Abb. 10

Abschließend soll eine Aufgabe (vgl. dazu Abb. 11) verdeutlichen, wie sinnvoll es sein kann, auch die Fähigkeit **Änderungsverhalten** zu **realisieren** im GU zu entwickeln. Neben dem Aspekt der Verbindung von Geometrie und Algebra können so auch vertiefende Erkenntnisse über geometrische Konfigurationen gewonnen werden.[6]

a) Zeige: Wenn der Punkt C auf dem Halbkreis wandert, so ist stets $\gamma > \alpha$ oder $\gamma = \alpha$.
b) Wo liegt C, wenn $\gamma = \alpha$?
c) Wie ändert sich γ, wenn C gleichmäßig auf dem Halbkreis von P nach Q wandert?
d) Wie ändert sich α, wenn C gleichmäßig auf dem Halbkreis von P nach Q wandert?
e) Was passiert mit den Kurven, wenn A auf PB] in Richtung B wandert?
f) Wie sehen die Graphen aus, wenn A und P zusammenfallen?
g) Wie sehen die Graphen aus, wenn A und B zusammenfallen?

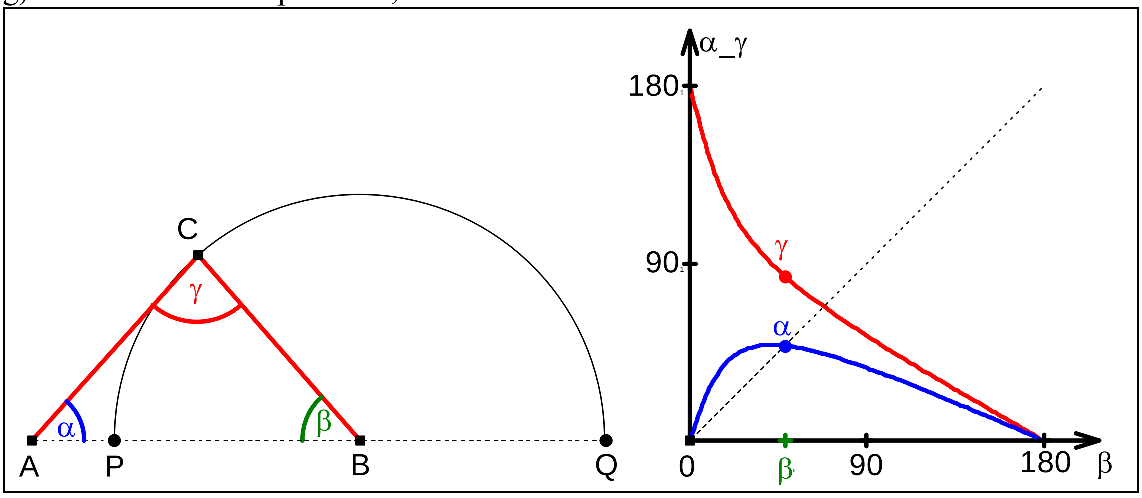

Abb. 11

Literatur

Roth, Jürgen: *Bewegliches Denken – ein wichtiges Prozessziel des Mathematikunterrichts*. In: Peschek, W. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2002, Verlag Franzbecker, Hildesheim, 2002, S. 423 – 426

[6] Für die Bearbeitung der Teilaufgaben a) bis d) sollte der rechte Teil von Abb. 11 abgedeckt werden.