

Jürgen Roth

Wirksamer Mathematikunterricht – Ausrichtung an Kernideen der mathematischen Inhalte und den Lernenden

Welches fachwissenschaftliche und fachdidaktische Wissen und Können der Lehrperson sind aus Ihrer Sicht für die Qualität des Mathematikunterrichts besonders wichtig?

Für einen wirksamen Mathematikunterricht muss die Lehrperson selbst so tief in die Fachwissenschaft Mathematik eingedrungen sein, dass sie aus eigener Erfahrung weiß, was mathematisches Arbeiten bedeutet. Diese vertiefte Auseinandersetzung mit der Mathematik kann durchaus exemplarisch erfolgt sein. Noch viel wichtiger ist aus meiner Sicht aber die Durchdringung der Schulmathematik vom höheren Standpunkt. Hierzu gehört das vertiefte Wissen darüber, wie die Inhalte der Schulmathematik in späteren Klassen und in der Hochschulmathematik aufgegriffen und elaboriert werden. Nur auf dieser Basis sind adäquate didaktische Reduktionen möglich, die den mathematischen Inhalt nicht verfälschen. Aus dieser stoffdidaktischen Perspektive lassen sich Kernideen der Lehrplaninhalte herausarbeiten. Gallin und Ruf (1994) haben das Konzept der *Kernidee* in die didaktische Diskussion eingebracht haben und damit die jeweils individuelle Perspektive der Lernenden und Lehrenden auf den Grundgehalt, „das Ganze“, eines Stoffgebietes gemeint. Sie plädieren für einen „Unterricht, der die Suche nach sach- und schülergerechten Kernideen an den Anfang stellt (...). Die Lehrperson ist aufgefordert, Kernideen zu formulieren, die dem Anfänger einen Blick aufs Ganze des Fachs oder eines großen Stoffgebiets ermöglichen“ (Gallin & Ruf 1994, S. 53). Lernende werden diese Kernideen aufgreifen und eigene Ideen zum Stoffgebiet formulieren, die sehr produktiv sein können. Der Umgang damit erfordert von der Lehrperson „nicht nur Geduld und Zurückhaltung, sondern auch die Fähigkeit zur Übersetzung singulärer Sehweisen und Ideen aus der oft noch sehr rudimentären Sprache der Lernenden in fachlich ergiebige Fragestellungen“ (Gallin & Ruf 1994, S. 53). Mit Leuders et al. (2011) bin ich der Meinung, dass Kernideen gleichzeitig (kontextbezogene) subjektive und fachliche Aspekte umfassen. Sie bieten damit einen Anker für die Vorschauerspektive der Lernenden, die das Wesen(tliche) des Stoffgebiets als Ganzes schlaglichtartig erfassen und sich von da aus das Gebiet erschließen wollen. Gleichzeitig sind sie in der Rückschauerspektive der Lehrenden ein Vehikel um Konzepte der fertigen Mathematik und normative Grundvorstellungen zu Inhaltsbereichen (vgl. Siller & Roth 2016) für lebensweltliche Vorstellungen von Lernenden fassbar zu machen.

Kernideen sind wichtig, um (1) Aufgaben und Lernumgebungen zu entwickeln, die es Lernenden ermöglichen selbst das Wesentliche eines mathematischen Inhaltsbereichs zu erarbeiten, (2) den erreichten Erkenntnisstand von Lernenden zu diagnostizieren und ihnen adäquate Hilfen anbieten zu können und (3) den erarbeiteten Wissensstand mit hilfreichen Vorstellungskankern geeignet zu sichern sowie mit verwandten mathematischen Inhalten zu vernetzen. Um dies leisten zu können, müssen sich Lehrpersonen im Rahmen ihrer Aus- und Weiterbildung, vom höheren fachlichen Standpunkt und mit fachdidaktischer Perspektive, intensiv und explizit mit der Schulmathematik sowie deren Vernetzungen auseinandersetzen. Um einen wirksamen Mathematikunterricht umsetzen zu können, müssen Lehrpersonen diesen nicht nur an fachwissenschaftlich und stoffdidaktisch fundierten Kernideen, sondern auch an den Lernenden ausrichten. Dies gelingt nur, wenn für alle Lernbereiche typische systematische Schülerfehler bekannt sind, anhand von geeigneten Aufgabenstellungen als solche identifiziert und mit adäquaten Grundvorstellungen kontrastiert werden können (vgl. Siller & Roth 2016 für den Inhaltsbereich Terme). Es ist aber auch notwendig, verschiedene Zugangsweisen und Repräsentationen zu einem mathematischen Inhalt zu kennen und deren jeweilige gemeinsame Strukturen identifizieren und ineinander übersetzen zu können. Eine

geeignete mathematikdidaktische Ausbildung muss die Grundlagen dafür legen und die Lehrpersonen dazu befähigen, sich im Sinne des lebenslangen Lernens (neue) mathematikdidaktische Erkenntnisse zu den aktuell unterrichteten Inhalten selbst anzulesen und in Unterrichtshandeln umzusetzen.

Welche Qualitätsmerkmale halten Sie für den Mathematikunterricht für essenziell?

Um der Frage nach Qualitätsmerkmalen des Mathematikunterrichts nachzuspüren, kann es hilfreich sein, die Perspektive der Lernenden einzunehmen. Oft wird Mathematik von ihnen als Fach wahrgenommen, in dem man die Inhalte „verstehen“ muss und nicht „einfach lernen“ kann. Dies deckt sich mit der Wahrnehmung der Mathematik als Wissenschaft von den Mustern und Strukturen, die – einmal in ihrem Kern erfasst – vielfältig genutzt und angewandt werden können. Dementsprechend wird Mathematikunterricht von Lernenden dann als gelungen wahrgenommen, wenn die Lehrperson „erklären“ kann. Hinter solchen Schüleraussagen steht in der Regel nicht der Wunsch nach Frontalunterricht, sondern vielmehr nach kognitiver Aktivierung und individueller sowie passgenauer Unterstützung im Lernprozess. Die Qualität des Mathematikunterrichts macht sich also daran fest, ob er an Kernideen der Inhalte ausgerichtet ist und den Lernenden so ermöglicht, diese als vernetzt und spiralg aufeinander bezogen zu erfahren. Dazu müssen geeignete Lernumgebungen zum Entdecken sowie Aufgaben zum Diagnostizieren, Sichern und Leisten ausgewählt, konzipiert und weiterentwickelt werden. Gerade die Orientierung an Kernideen und Grundvorstellungen erleichtert nicht nur die Konzeption von Lernumgebungen und Aufgaben, sondern ist auch die Basis der Schülerorientierung. Kernideen sind Ausgangs- und Endpunkt jedes Unterrichts, der die Heterogenität der Lernenden ernst nimmt und versucht diese individuell zu fordern und zu fördern. Auf Kernideen basierende Problemstellungen ermöglichen allen Lernenden ggf. mit verschiedenen Zugangsweisen einen Zugriff zum Wesentlichen der dahinterliegenden mathematischen Struktur. Sie sind häufig Ausgangspunkt von jeweils individuell sehr unterschiedlichen Vertiefungen. Auf diese Weise lassen sich „Verständnisanker“ entwickeln, die später bei der Systematisierung und Sicherung des erarbeiteten Wissens eine zentrale Rolle spielen und – etwa im Wissensspeicher – unbedingt mitgesichert werden müssen. Das zentrale Qualitätsmerkmal für alle Phasen (Erarbeitung, Systematisieren und Sichern, Vertiefen) des Mathematikunterrichts ist also die Orientierung an Kernideen des mathematischen Inhalts und an den Lernenden. Letzteres lässt sich nur bei einem echten Interesse der Lehrperson an den Persönlichkeiten und den individuellen Bedürfnissen der Lernenden und einem dazu förderlich gestalteten Klassenklima erreichen.

Welche Lernumgebungen und Lehr-/Lernformen halten Sie für einen wirksamen Mathematikunterricht als besonders bedeutsam?

Eine Ausrichtung des Unterrichts an mathematischen Kernideen hilft, die gesteckten Inhaltsziele des Unterrichts fest im Auge zu behalten. Auf dieser Basis kann es gelingen, eine gesunde Mischung zwischen Konstruktion und Instruktion zu realisieren. Für die Selbsterarbeitungsphasen der Schüler/innen sind Lernumgebungen hilfreich, die nach Kernideen und Grundvorstellungen strukturierte Aufgaben, enaktiv nutzbare Materialien und/oder Computersimulationen sowie individuell abrufbare Hilfen umfassen. Wichtig ist auch, dass die Lernenden angehalten werden ihren Arbeitsprozess in Lernprotokollen schriftlich festzuhalten. In diese Lernprotokolle gehören Vorhersagen zum erwarteten Ergebnis von Experimenten, die Vorgehensweisen beim Erarbeiten und die Erarbeitungsergebnisse. Erst auf dieser Grundlage sind eine intensive Reflexion und ein Austausch über Kernideen der untersuchten mathemati-

schen Zusammenhänge sinnvoll möglich. Beispiele für derartige Lernumgebungen können auf der Internetseite zu unserem Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ unter <http://mathe-labor.de> eingesehen und die Materialien dort auch für den eigenen Unterricht heruntergeladen und genutzt werden.

Nach dem Arbeiten an Lernumgebungen sollten wesentliche Ergebnisse und Verständnisanker, die häufig aus Skizzen und/oder ausgearbeiteten Beispielen bestehen, in Wissensspeichern festgehalten werden. Hier ist die Expertise der Lehrperson gefragt, wenn es darum geht, die individuellen Erkenntnisse der Lernenden mit den gesicherten mathematischen Fachstrukturen abzugleichen und kohärent zu verbinden. Als strukturierendes Element hat sich dabei das Ich-Du-Wir-Prinzip (vgl. Barzel et al. 2007, S. 118-123) bewährt. Die Wissensspeicher dienen der langfristigen Sicherung von Grundvorstellungen, Grundwissen und Grundfertigkeiten, die regelmäßig – etwa durch geeignete Kopffübungen – aufgefrischt, wachgehalten und mit den aktuellen Kernideen vernetzt werden müssen.

Wie sieht eine gute Differenzierung/Individualisierung Ihrer Meinung nach im Mathematikunterricht aus?

Für den Mathematikunterricht ist der Kern der Differenzierung ein Unterricht, der für alle Lernenden auf inhaltliches Verstehen abzielt und kognitiv aktivierend gestaltet ist. Inhaltliches Verstehen macht sich daran fest, ob der Unterricht an Kernideen ausgerichtet ist und den Aufbau von Grundvorstellungen anregt. Wesentlich dabei ist, dass alle, auch vermeintlich schwächere Lernende, auf dieser Basis unterrichtet und nicht mit „Rezepten“ abgespeist werden. Letzteres wäre nicht nachhaltig und würde sich im weiteren Lernprozess sehr schnell rächen. Die kognitive Aktivierung lässt sich im Mathematikunterricht durch problemorientiertes Vorgehen und die konsequente Einforderung von Argumentationen sowie das schriftlichen Festhalten von Vorhersagen, Vorgehensweisen und Ergebnissen von (Gruppen-)Arbeitsprozessen erreichen. Gute Differenzierung zeichnet sich dadurch aus, dass sie adaptiv ist, also den Bedürfnissen, Lernständen und Zugangsweisen von Lernenden individuell angepasst ist. Dieser hohe Anspruch lässt sich in Reinform kaum erreichen, kann aber durch konsequentes Arbeiten an Kernideen und Grundvorstellungen sowie der lebenslangen Weiterentwicklung der diagnostischen Kompetenz von Lehrenden unterstützt werden. Auf dieser Basis kann der Lernprozess von Lernenden durch passgenaue Feedbacks und Leitfragen von Lehrenden adaptiv gestaltet werden. Mittel und langfristig ist es dabei nötig, die Verantwortung für den Lernprozess mehr und mehr in die Eigenverantwortung der Lernenden zu übergeben. Der Weg dahin ist lang und muss durch geeignete methodische Settings und die sich mehr und mehr zurücknehmende – eben adaptive – Begleitung durch die Lehrenden unterstützt werden.

Welche immer wiederkehrenden fachspezifischen Herausforderungen im Unterrichtshandeln müssen Ihrer Meinung nach die Lehrpersonen beherrschen, um im Mathematikunterricht eine angemessene Unterrichtsqualität garantieren zu können?

Herausforderungen für den Mathematikunterricht sind vielfältig. Sie beginnen mit (1) der Gestaltung von Lernumgebungen für selbständige (Gruppen-)Arbeitsphasen von Lernenden die an Kernideen der jeweiligen fachlichen Inhalte orientiert sind und beim Bearbeiten das Herausarbeiten von zentralen Grundvorstellungen ermöglichen. (2) Entscheidend für die Qualität des Unterrichts ist auch die Fähigkeit jeweils geeignete Aufgaben zum Lernen und zum Leisten (also für Prüfungen) auszuwählen und weiterzuentwickeln bzw. zu entwickeln.

(3) Innerhalb der Arbeitsphasen der Lernenden ist eine passgenaue Unterstützung der Lernenden wesentlich. Dies erfordert Diagnosekompetenz seitens der Lehrenden auf der Basis von sicherem Vernetzungswissen zu den fachlichen Inhalten und der Kenntnis von typischen Schülerfehlern, geeigneten Repräsentationsformen sowie zentralen Grundvorstellungen. Passgenaue Unterstützung kann häufig bedeuten eben nicht zu intervenieren, weil die Lernenden auf einem guten Weg sind, aber ggf. auch geeignete Feedbacks zu geben bzw. weiterführende Denkfragen zu stellen. (4) Nach jeder Erarbeitungsphase ist es essentiell die individuell erarbeiteten Ergebnisse zusammenzuführen und Kernideen herauszuarbeiten, zu systematisieren und festzuhalten. Dies stellt eine große Herausforderung für Lehrende dar und gelingt nur auf der Grundlage einer fundierten fachlichen und fachdidaktischen Vorbereitung. (5) Neben allen diesen zentralen Aspekten sollte die Lehrperson in der Lage sein, Wesentliches mit Hilfe geeigneter Repräsentationen und vielfältig vernetzt in einem Lehrervortrag darstellen und auf den Punkt bringen zu können. (6) All das Vorgenannte gelingt nur, wenn die Lehrperson empathisch auf alle Lernenden eingehen und ein gutes Unterrichtsklima herstellen kann.

Worauf gilt es bei der Entwicklung und dem Einsatz von Aufgaben bzw. Aufgabensets im kompetenzorientierten Mathematikunterricht besonders zu achten?

Wie ich bereits mehrfach betont habe, müssen sich Aufgaben an Kernideen ausrichten und inhaltliche Argumentationen einfordern. Das gilt nicht nur für Lernaufgaben, sondern auch für Leistungsaufgaben, die qualitativ dasselbe er- und einfordern sollten, wie der vorausgehende Unterricht. Qualitätsmerkmale von Aufgaben sind deren Authentizität, eine den Lernenden und der Sache angemessene Offenheit und ihre differenzierende Anlage in gestuften Anforderungsniveaus oder durch ihre selbstdifferenzierende Gestaltung. Wesentlich ist die Einbeziehung von experimentellen Vorgehensweisen an gegenständlichen Materialien und/oder Simulationen. Für das Üben müssen Aufgaben zur Automatisierung von Grundwissen und Grundfertigkeiten mit Umkehraufgaben, Kontrastaufgaben und Aufgaben zum inhaltlichen Argumentieren, Interpretieren und niveauangemessenen Problemlösen angereichert werden, um alle wesentlichen Aspekte mathematischen Arbeitens abzudecken. Dies gilt in analoger Weise für Leistungsaufgaben in Prüfungen. Ergänzend möchte ich darauf hinweisen, dass nicht alles, was inhaltlich wesentlich für den Mathematikunterricht ist, in den üblichen Klassenarbeiten geprüft und in kleinschrittigen Übungsaufgaben erarbeitet werden kann. Es muss daneben auch längerfristige Problemlöse- und Modellierungsphasen im Mathematikunterricht geben, die freies und kreatives Arbeiten ermöglichen.

Welche Schritte empfehlen Sie aufgrund Ihrer wissenschaftlichen bzw. erfahrungsbasierten Expertise als „first steps“ für angehende Mathematiklehrer/-innen, die sie für guten Mathematikunterricht umsetzen können?

Der erste und wichtigste Gedanke mit Blick auf erste Schritte in der Konzeption und Umsetzung guten Mathematikunterrichts ist die fachlich sowie fachdidaktisch fundierte Vorbereitung und die Konzentration auf die Arbeit an Kernideen sowie inhaltlichen Grundvorstellungen. Diese Perspektive ist die Grundlage aller weitergehenden Fragen des Mathematikunterrichts: Sie ermöglicht (1) fundierte Diagnosen des Leistungsstands der Lernenden, (2) ein adaptives Feedback, (3) die sinnvolle Gestaltung von Arbeitsaufträgen und Lernumgebungen, (4) die Identifizierung von geeigneten Repräsentationen für den Lerngegenstand, (5) die Entwicklung von Vorstellungsankern für den Wissensspeicher, (6) die Bewertung und Auswahl geeigneter Unterrichtsmethoden und vieles mehr. Der erste und wichtigste Schritt, aus dem sich alles Weitere für einen wirksamen Mathematikunterricht ableiten lässt, ist also

die Ausrichtung an Kernideen der mathematischen Inhalte und den Lernenden sowie deren individuellen Bedürfnissen.

Was ist Ihrer Ansicht nach das Besondere am Mathematikunterricht?

Das Besondere am Fach Mathematik ist meiner Meinung nach, dass es logisch aufgebaut ist und alle Argumente – soweit sie dem Gegenstand und den handelnden Personen sowie deren Vorwissen angemessen sind – jederzeit direkt und selbstständig überprüfbar sind. Ein Vertrauen auf Expertenaussagen ist somit in der Mathematik nicht notwendig. Sie ist vielmehr sehr demokratisch angelegt und prinzipiell von jeder Person inhaltlich (er-)fass- und verstehbar. Bei einer Ausrichtung des Mathematikunterrichts an Kernideen und einer konsequenten, verstehensbasierten Vorgehensweise werden Fähigkeiten entwickelt, die freies und selbständiges, strukturiertes Denken ermöglichen und fördern. So erworbene spezifische mathematische Denkweisen lassen sich auch sehr gut auf Fragen und Probleme im Alltag und anderen Inhaltsbereichen anwenden. All das ist besonders am Mathematikunterricht und sollte dort immer wieder explizit werden.

Literatur:

Barzel, B., Büchter, A. & Leuders, T. (2007). *Mathematik Methodik – Handbuch für die Sekundarstufe I und II*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Gallin, P. & Ruf U. (1994). Ein Unterricht mit Kernideen und Reisetagebuch. *Mathematik lehren*, 64, 51-57.

Leuders, T., Hußmann, S. Barzel, B. & Prediger, S. (2011). „Das macht Sinn!“ – Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 53(37), 2-9.

Siller, H.-S. & Roth, J. (2016). Herausforderung Heterogenität: Grundvorstellungen als Basis und Bezugsnorm – das Beispiel Terme. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 58(70), 2-8.

Roth, Jürgen, Prof. Dr., Universität Koblenz-Landau, Institut für Mathematik, Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen), Fortstraße 7, 76829 Landau, Arbeitsgebiete sind u.a. die mathematische Begriffsbildung, Forschung und Lehre in Lehr-Lern-Laboren Mathematik, Computer- und Materialeinsatz im Mathematikunterricht, das Forschende Lernen und die Entwicklung der Prozessdiagnose-Kompetenz bei Lehramtsstudierenden mit Videovignetten