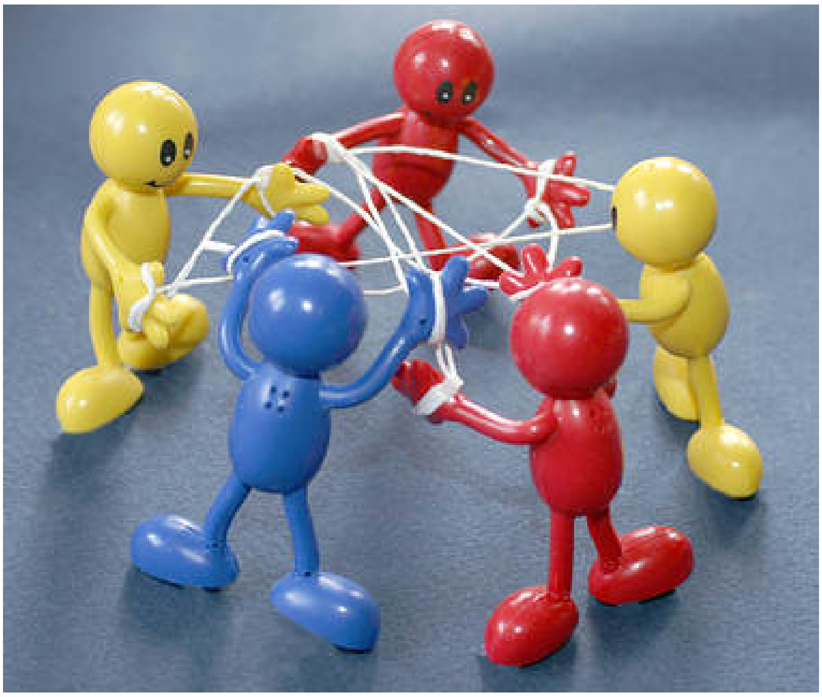
In: Siller, Hans-Stefan; Roth, Jürgen (Hrsg.): Herausforderung Heterogenität. *Praxis der Mathematik in der Schule, 70*, Aug. 2016, S. 2-8



Quelle: http://www.htl.at/fileadmin/content/Individualisierung/vernetzung.jpg

Herausforderung Heterogenität

Grundvorstellungen als Basis und Bezugsnorm – das Beispiel Terme

Hans-Stefan Siller und Jürgen Roth

Mit heterogenen Lerngruppen zu arbeiten, zählt aktuell zu den zentralen Herausforderungen im Mathematikunterricht aller Schulformen und -stufen. Bei einem konstruktiven Umgang mit verschiedensten Begabungen, Vorerfahrungen, Zugangsweisen, Interessen und Motivationen aller Beteiligten kann Lernen individuell und auch in der Klassengemeinschaft trotz oder gerade wegen dieser Heterogenität gut gelingen. Zu diesem konstruktiven Umgang mit Heterogenität innerhalb der Lerngruppe ist ein abgestimmtes Maßnahmenpaket erforderlich, dessen Kern die

Entwicklung von Grundvorstellungen zu den Inhalten des Mathematikunterrichts ist.

Dimensionen des Umgangs mit Heterogenität

Die zentrale Frage beim Umgang mit Heterogenität ist, wie mit möglichst allen Lernenden einer Lerngruppe konstruktiv und entwicklungsfördernd gearbeitet werden kann. Bisherige Erfahrungen mit Innovationen für den Unterricht (vgl. z. B. Bruder/Wehrse 2014) zeigen, dass nachhaltige Veränderungen des Unterrichts nicht kurzfristig durchführbar sind. Es geht dabei nicht darum, Altes neu zu erfinden, sondern um das Kombinieren vorhandener und bewährter Elemente zu einer praktikablen Unterrichtsdramaturgie. So lässt sich der Mathematikunterricht Schritt für Schritt aus bewährten Elementen weiterentwickeln.

Individuelle Unterschiede der Lernenden zeigen sich insbesondere in der Lernmotivation, in der Einstellung und den Vorstellungen zur Mathematik sowie in den Lernvoraussetzungen, in den Zugängen und Vorerfahrungen zu einzelnen Themen und in spezifischen Denkmustern. Um diese Herausforderungen eines heterogenen Mathematikunterrichts erfolgreich zu meistern, ist es hilfreich bewährte Unterrichtsstrategien und -methoden mit neuen Ideen anzureichern und geeignet zu kombinieren (vgl. den Artikel von Leuders und Goy im vorliegenden Heft). Dazu benötigen Lehrkräfte fundierte Kenntnisse von Grundvorstellungen zu den Inhalten des Mathematikunterrichts als Grundlage für

(1) diagnostische Kompetenzen, die sich auf fachdidaktisches Wissen stützen;

(2) die Sensibilität, individuelle Lernwege und Zugangsweisen zur Mathematik von Lernenden wahrzunehmen und zu unterstützen;

(3) die Kenntnis differenzierender Aufgabenformate und

(4) die Fähigkeit zur Gestaltung geeigneter Lernumgebungen, die insbesondere den Aufbau adäquater Grundvorstellungen begünstigen.

Unterstützend kann bei diesen hohen Anforderungen ein Konzept zum Umgang mit heterogenen Lerngruppen im Mathematikunterricht wirken, das folgende Aspekte im Sinne eines Regelkreislaufs aufeinander bezieht und den Lernprozess so steuert *(Abb. 1)*:

(1) Aufbau und Sicherung von Grundvorstellungen, -wissen und –fertigkeiten;

(2) Entwicklung und Nutzung schüleraktivierender Arbeitsweisen;

(3) Konsequenter Einsatz von (Selbst-)Diagnose und Förderung der Selbstregulation der Schülerinnen und Schüler.

Ein konstruktiver Umgang mit Heterogenität verlangt einen mehrdimensionalen Ansatz im Unterricht, wie er in *Abb. 1* im Überblick dargestellt ist. Dieser Ansatz wurde im Projekt „HeMaS – Mit Heterogenität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I konstruktiv umgehen" entwickelt und umgesetzt (vgl. Roth/Siller, 2013). Dieses Konzept soll dabei unterstützen, den Unterricht durch grundvorstellungsbasierte innere Differenzierung vom Lernen im Gleichschritt zu individualisiertem Lernen weiterzuentwickeln. Auf diese Weise sollen alle Lernenden auf Basis ihrer persönlichen Voraussetzungen bei ihrer individuell unterschiedlichen mathematischen Kompetenzentwicklung (vgl. Weinert 2001) unterstützt werden.

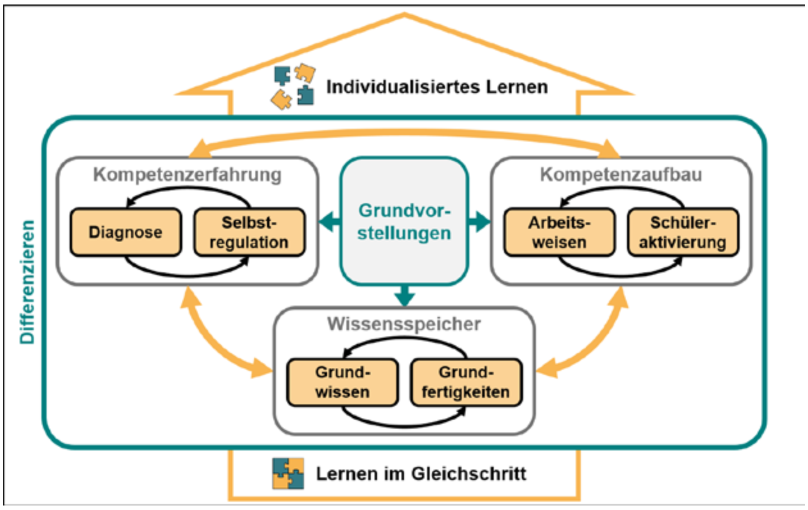


Abb. 1: Unterrichtskonzept für heterogene Lerngruppen im Mathematikunterricht

Mathematikunterricht soll verstehensorientiert und passgenau zu den individuellen Bedürfnissen der Schülerinnen und Schüler gestaltet sein. Ein Unterricht, der konsequent am Aufbau von Grundvorstellungen für alle Inhaltsbereiche orientiert ist, erleichtert das Identifizieren von Grundwissen und Grundfertigkeiten. So gelingt es, unterschiedliche Zugangsweisen zu Fachinhalten im Rahmen der Unterrichtsplanung und Durchführung zu berücksichtigen. Ein solches Konzept *(Abb. 1)* hilft, *„die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten"* (vgl. Weinert 2001, S. 27) zu diagnostizieren und so für eine Selbstregulation zugänglich zu machen (vgl. den Artikel von Blomberg und Holzäpfel im vorliegenden Heft). Heterogene Lerngruppen können aufgrund

eines solchen Ansatzes explizit angesprochen und eine individuelle Entwicklung der Individuen gefördert werden.
Verzahnungen zwischen Grundvorstellungen und den drei Bereichen *Wissensspeicher*, *Kompetenzaufbau* und *Kompetenzerfahrung* werden vor der Herausforderung des Umgangs mit Heterogenität inhaltlich fokussiert betrachtet. Mathematische Inhalte stellen in jedem Mathematikunterricht die Basis dar und auf dieser Grundlage wird auch ein für heterogene Lerngruppen adäquater Unterricht gestaltet. Probleme heterogener Lerngruppen lassen sich primär aus der Perspektive fachlicher Grundvorstellungen identifizieren und sollten auch mit dem Schwerpunkt auf die Entwicklung inhaltlicher Grundvorstellungen konstruktiv und methodisch bearbeitet werden. Konstruktiver Umgang mit Heterogenität kann gelingen, wenn den fachlichen Herausforderungen im Unterricht auf der Basis von Grundvorstellungen und unter bewusster Gestaltung der Elemente *Wissensspeicher*, *Kompetenzaufbau* und *Kompetenzerfahrung* begegnet wird.

Grundvorstellungen (GV)

Grundvorstellungen sind nicht nur die Basis, sondern zugleich auch eine Bezugsnorm im differenzierenden Unterricht mit heterogenen Lerngruppen, denn mathematisches Denken und Handeln ist auf jedem Niveau mit inhaltlichen Vorstellungen verbunden, die insbesondere die Art und den Erfolg mathematischer Problemlöseprozesse beeinflussen (vgl. Hofe, vom/Wartha 2005). Gerade wenn es darum geht mathematische Begriffe und Konzepte anzuwenden sowie daraus resultierende Ergebnisse zu interpretieren, sind Grundvorstellungen wesentlich, um überhaupt auf solche Prozesse zugreifen zu können (vgl. den Artikel von Goy und Kleine im vorliegenden Heft). Dies soll im Folgenden am Beispiel des Inhaltsbereichs *Terme* konkretisiert werden. Im Zusammenhang mit *Termen* sind insbesondere zwei Grundvorstellungen (GV) entscheidend – *Bauplan* und *Rechenschema* (vgl. Vollrath und Weigand 2007, S. 82ff). Idealerweise können diese beiden Grundvorstellungen für ein verständnisbasiertes mathematisches Arbeiten von allen Schülerinnen und Schülern mithilfe schüleraktivierender Arbeitsweisen *(Abb. 1)* verinnerlicht werden.

(GV 1) Term als Bauplan

Auch wenn manche Schulbücher durch die Art der Übungsaufgaben anderes suggerieren: Terme fallen nicht vom Himmel. Sie werden vielmehr bei der Bearbeitung der Frage nach der mathematischen Struktur eines Phänomens oder eines Problems entwickelt. Ein so entstandener Term kann also als mathematischer *„Bauplan“* für das

Phänomen interpretiert werden. Wird z. B. ein Term für den Flächeninhalt eines Trapezes gesucht *(Abb. 2)*, kann diese Grundvorstellung von Termen dabei helfen, den gesuchten Term aus den zu diesem Zeitpunkt bereits bekannten Termen für die Flächeninhalte anderer Figuren (Parallelogramm und Dreieck) zusammenzusetzen. Der Bauplan würde sich dann mit den Variablen aus Abb. 2 beispielsweise wie folgt ergeben:

$$A_{Trapez} = A_{Parallelogramm} + A_{Dreieck} = c \cdot h + \frac{1}{2} \cdot (a - c) \cdot h$$

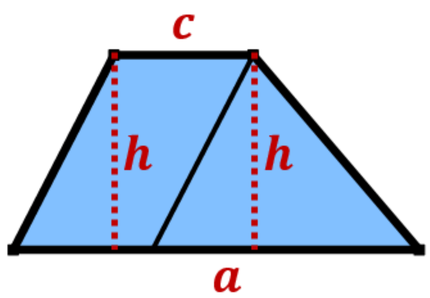


Abb. 2: Term für den Flächeninhalt eines Trapezes gesucht

Aus diesem Term ist schließlich die Struktur des Phänomens direkt ablesbar. Eine Termumformung ist in der Betrachtungsweise dieser Grundvorstellung eine zulässige Veränderung des „Bauplans“, die sich anschließend wieder im Sinne einer neuen Struktur interpretieren lässt:

$$\begin{aligned} A_{Trapez} &= c \cdot h + \tfrac{1}{2} \cdot (a - c) \cdot h \\ &= \tfrac{1}{2} c \cdot h + \tfrac{1}{2} a \cdot h \end{aligned}$$

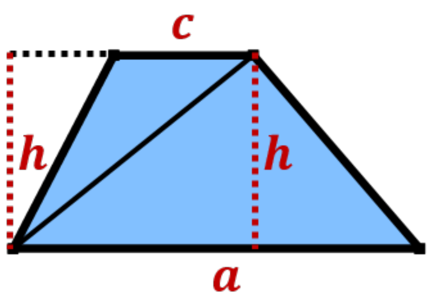


Abb. 3: Weiterer Bauplan für den Trapezflächeninhalt

Im durch die Umformung entstandenen Term erkennt man in den beiden Summanden jeweils Terme, die den Bauplan der Flächeninhaltsformel für Dreiecke darstellen. Die Summe dieser Teilterme lässt sich mit Blick auf eine andere mögliche geometrische Zerlegung des Trapezes, diesmal in zwei Dreiecke *(Abb. 3)* auch inhaltlich als weiterer gültiger Bauplan deuten. Möchte man die über die Grundvorstellung des Bauplans entstandenen Terme nutzen, um für beliebige Trapeze anhand von gegebenen Streckenlängen den Flächeninhalt zu berechnen, dann kommt die zweite wichtige Grundvorstellung für Terme ins Spiel:

(GV 2) Term als Rechenschema

Hat man unter Zuhilfenahme der Grundvorstellung des Bauplans einen Term erst einmal für eine Problemstellung aufgestellt, dann möchte man ihn in aller Regel in einer Anwendungssituation dazu nutzen, wiederholte gleichartige Berechnungen für verschiedene Werte schnell und einfach durchzuführen. Im Beispiel der Flächeninhaltsformel für Trapeze wird man für ein konkretes Trapez und bekannte Werte a, c und h dessen Flächeninhalt berechnen wollen. Für diesen Zweck wird man einen gefundenen Term durch Umformungen so weit vereinfachen, dass die noch notwendigen Zahlenrechnungen mit möglichst wenig Aufwand durchgeführt werden können. Termumformungen dienen aus der Perspektive der Grundvorstellung *„Term als Rechenschema“* also dazu, einen Term (*Rechenschema*) zu erhalten, der Berechnungen von Zahlenwerten erleichtert. Aus diesem Grund wird man z. B. den gefundenen Term für den Flächeninhalt des Trapezes weiter umformen und zielgerichtet „vereinfachen“:

$$A_{Trapez} = \frac{1}{2}c \cdot h + \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

Ein evtl. noch alltagsnäheres Beispiel, bei dem ein Term, nämlich $(0{,}15 \cdot x + 7) \cdot 1{,}19$ im Sinne der Grundvorstellung *Term als Rechenschema* verwendet wird, um damit die monatlichen Stromkosten zu berechnen ist in *Kasten 1* (vgl. Roth 2006) dargestellt.

Term als Rechenschema: Das Beispiel Stromkosten

- monatlicher Verbrauch: $x\ \mathrm{kWh}$
- Verbrauchspreis: $0{,}15\ \frac{€}{\mathrm{kWh}}$
- Grundpreis: $7\ €$
- Mehrwertsteuer: $19\ \%$

Rechenschema: $(0{,}15 \cdot x + 7) \cdot 1{,}19$

Kasten 1: Term als Rechenschema am Beispiel „Stromkosten“

Wissensspeicher

„Der wichtigste Faktor der das Lernen beeinflusst, ist das, was der Lernende bereits weiß. Dies ermitteln Sie und danach unterrichten Sie ihre Schüler“ (Ausubel/Novak/Hanesian 1980, S. 5). Dieser

Leitgedanke des Unterrichtspsychologen Ausubel macht deutlich, wie wichtig es ist, *das Wesentliche* des Unterrichtsstoffes in einem Wissensspeicher (Hefter oder Heft) von jedem Lernenden festhalten zu lassen. Darüber hinaus sollte dafür Sorge getragen werden, dass dieses Wissen und die damit verbundenen Fertigkeiten dauerhaft verfügbar bleiben und wachgehalten werden. Dies gilt gerade auch für heterogene Lerngruppen, denn der Wissensspeicher enthält alles was für alle gleichermaßen als Grundwissen oder Grundfertigkeit unabdingbar ist. Wie lässt sich das für einen Unterrichtsinhalt Wesentliche aus dem Blickwinkel einer Lehrkraft aber identifizieren? Eine Antwort kann mittels der für einen Inhaltsbereich entscheidenden Grundvorstellungen ermöglicht werden. Mit ihnen lassen sich Elemente des Grundwissens und Grundfertigkeiten identifizieren (vgl. Bruder 2001).
Im Folgenden wird dies exemplarisch für einzelne Aspekte aus dem Bereich der Terme ausgeführt.

Grundwissen

Unter Grundwissen verstehen wir Inhalte, die alle Lernenden auswendig wiedergegeben können sollten. Insbesondere handelt es sich hierbei um grundlegende Fakten der entsprechenden Inhaltsbereiche, also Begriffsdefinitionen, Formeln und Sätze, die im jeweiligen Inhaltsbereich zum aktiven Betreiben von Mathematik von besonderer Bedeutung sind. Gerade in heterogenen Lerngruppen ist es besonders wichtig, die gemeinsame Grundwissensbasis zu sichern und regelmäßig durch neue Aspekte zu erweitern. Diese Grundwissenselemente müssen nicht nur in der jeweiligen Klassenstufe, in der sie erworben werden, sondern auch darüber hinaus jederzeit abrufbereit sein und werden im Rahmen des Lernfortschritts fortlaufend auf- und ausgebaut. Bezogen auf die Grundvorstellung „Terme als Bauplan" bedeutet dies, dass Lernende über das Grundwissen verfügen sollten, wie Terme aus kleineren Termen aufgebaut werden und insbesondere, dass man für die Variablen in Termen prinzipiell nicht nur Zahlen oder Größen, sondern ganze Terme einsetzen kann und so Terme mit einer komplexeren Struktur erhält. Über dieses Grundwissen zum Aufbau von Termen, das in *Kasten 2* zusammengestellt ist, sollten alle Schülerinnen und Schüler verfügen. Es ist an vielen Stellen sehr wesentlich, Grundstrukturen von Termen zu erkennen, auch wenn z. B. Terme für Variablen in Grundtermen eingesetzt wurden. So erwarten wir häufig von Schülerinnen und Schülern, dass sie etwa beim Term $4x^2 - 9y^2$ erkennen, dass man darauf die dritte binomische Formel anwenden kann. Dies gelingt jedoch nur, wenn das in *Kasten 2* zusammengestellte Grundwissen verfügbar ist und das Bauen von komplexeren Termen (und das Einsetzen von Termen in Terme) geübt und das Ergebnis analysiert wurde.

Grundwissen zum Termaufbau	**Beispiele**
Jede Zahl ist ein Term.	2 oder 10
Jede Variable ist ein Term.	*x* oder *y*
Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten von Termen sind wieder Terme.	$x+y$ $x-2$ $2\cdot x$ $\frac{y}{10}$
In einem Term können ganze Terme für Variable in einen Term eingesetzt und so komplexere Terme erzeugt werden.	Einsetzen der Terme $2\cdot x$ und $\frac{y}{10}$ für die Variablen x und y im Term $x+y$ liefert: $2\cdot x+\frac{y}{10}$

Kasten 2: Grundwissen Terme

Unter dem Blickwinkel der Grundvorstellung „Term als Rechenschema“ müssen ggf. Termumformungen durchgeführt werden, um einfachere Berechnungen zu ermöglichen. Dafür sind Rechenregeln, wie etwa das Distributiv-, das Kommutativ- und das Assoziativgesetz, notwendig *(Kasten 3)*. Diese gehören zum *Grundwissen zu Termumformungen*. Mit ihnen lassen sich dann z. B. auch die Binomischen Formeln begründen.

Grundwissen zu Termumformungen	**Beispiele**
Kommutativgesetze	$a+b=b+a$ $a\cdot b=b\cdot a$
Assoziativgesetze	$a+(b+c)=(a+b)+c$ $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
Distributivgesetz	$a\cdot(b\pm c)=a\cdot b\pm a\cdot c$

Kasten 3: Rechengesetze für Terme

Grundfertigkeiten

Für das Betreiben von Mathematik ist das Vorhandensein von Grundwissen eine notwendige Voraussetzung. Um jedoch dieses Wissen selbstverständlich nutzen zu können, müssen Lernende über die Fähigkeit verfügen, grundlegende Kalküle routiniert anwenden zu können. Der Begriff „Grundfertigkeiten" bezeichnet also die Fähigkeit, Grundwissen in typischen Situationen mithilfe von Routinekalkülen (ggf. unter Vorgabe der geforderten Operation) anwenden zu können.

Ein Charakteristikum der Mathematik ist die Entwicklung von Verfahren für Routinetätigkeiten, also der Aufbau eines „mathematischen Werkzeugkastens". Solche Verfahren *(Kasten 4)* werden in Kalkülen festgehalten, die es erlauben, aus Aussagen alleine durch symbolische Termumformungen neue Aussagen zu gewinnen. Bei Termumformungen zählen z. B. das Zusammenfassen gleichartiger Terme sowie das Ausklammern und das Ausmultiplizieren von Klammerausdrücken zu Grundfertigkeiten, die aus der Perspektive beider Grundvorstellungen von Termen wesentlich sind und für deren Absicherung auch beide Grundvorstellungen genutzt werden sollten. Dies gilt insbesondere vor dem Hintergrund der Heterogenität im Hinblick auf präferierte Zugangsweisen.

Grundfertigkeiten bei Termum-formungen	**Beispiele**
In einer Summe kann man gleichartige (Teil-) Terme zusam-menfassen. (Anwen-dung des Distributiv- sowie ggf. des Kom-mutativ- und Assoziativgesetzes)	$2ab + 3b + 4ab = 6ab + 3b$
Eine Klammer kann ausmultipliziert werden. (Anwendung des Distributivgeset-zes, ggf. mehrfach).	$2b \cdot (3a + 4y - 5z)$ $= 2b \cdot 3a + 2b \cdot 4y - 2b \cdot 5z$ $= 6ab + 8by + 10bz$

Aus einer Summe können gleichartige Faktoren in den Summanden ausgeklammert werden. (Anwendung des Distributiv- und ggf. des Kommutativgesetzes)	$2 \cdot (a+b) - (a+b) \cdot xy + 5z \cdot (a+b)$ $= 2(a+b) - xy(a+b) + 5z(a+b)$ $= (2 - xy + 5z) \cdot (a+b)$

Kasten 4: Grundfertigkeiten bei Termumformungen

Kompetenzaufbau

„Im Unterricht (...) erfolgt der Aufbau von Kompetenzen systematisch und kumulativ bzw. ergänzend; Wissen und Können werden gleichermaßen berücksichtigt." (Bildungsplan 2011, S. 17) Lehrkräfte die einen solchen systematischen und kumulativen Aufbau umsetzen, haben durch die Orientierung an den (beiden) Grundvorstellungen zu Termen Gestaltungskriterien zur Hand, die sowohl für Unterrichtseinheiten als auch für ganze Unterrichtssequenzen eingesetzt werden können. Zudem können geeignete Maßnahmen umgesetzt werden, um Lernenden deutlich zu machen, welche damit einhergehenden Kompetenzen explizit zu entwickeln sind, aber auch um diagnostisch sinnvoll zu unterstützen. Auf dieser Basis lässt sich das Erarbeiten von Neuem so gestalten, dass alle Lernenden davon auf ihre jeweils eigene Art profitieren können. Durch die Konzentration auf Grundvorstellungen wird das jeweils wesentliche neuer Sachverhalte auf den Punkt gebracht. Dies erleichtert es allen Lernenden, einen Zugang auf ihrem eigenen Niveau zu finden. Lehrkräfte ermöglichen Lernenden in unterschiedlichen Situationen, auf der Basis von Grundvorstellungen, ihr Wissen erfolgreich zu nutzen und nicht als „träges Wissen" (vgl. Bildungsplan 2011, S. 17) einzusetzen. Es ist also notwendig in einen ständigen Austausch mit bereits vorhandenem *Grundwissen* zu treten, um eine Vernetzung mit Grundvorstellungen herzustellen und so über den Kompetenzaufbau den vorhandenen Wissensspeicher weiter zu füllen. Gelingt dies und zeigen Lernende die Bereitschaft, sich reflektierend mit vorliegenden Inhalten auseinanderzusetzen, so kann ein verständnisorientierter Prozess in Gang gesetzt werden, der durch den in *Abb. 1* dargestellten Prozess zwischen Kompetenzaufbau und Wissensspeicher sowie vice versa, beschrieben werden kann. Auf Basis der oben angeführten Grundvorstellungen zu Termen verdeutlichen wir die Idee des Kompetenzaufbaus anhand dreier Beispiele.

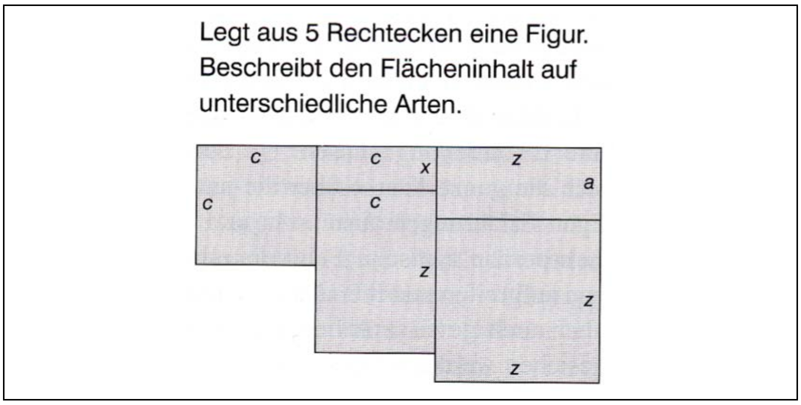


Abb. 4: Gesamtfläche aus Teilflächen (nach Wiegand/Wiegand 2006, S. 45)

Setzen sich unterschiedliche Lernende mit der Aufgabe aus *Abb. 4* auseinander, werden sie, abhängig von ihrer Vorgangsweise, unterschiedliche Terme zur Berechnung des Flächeninhalts erhalten. Es ist für die dort abgebildete Figur z. B. möglich von links nach rechts den Flächeninhalt der jeweiligen Teilfiguren beginnend beim linken Quadrat zu summieren oder ein Quadrat und zwei Rechtecke zu identifizieren, die nebeneinanderliegen und deren Flächeninhalte zu addieren. Daraus können besipielsweise folgende Ergebnisterme für den Flächeninhalt A der grauen Fläche entwickelt werden:

$$A = A_{\blacksquare_1} + A_{\square_I} + A_{\square_{II}} + A_{\square_{III}} + A_{\blacksquare_2}$$
$$= c^2 + c \cdot x + c \cdot z + z \cdot a + z^2$$
$$A = A_{\blacksquare} + A_{\square_1} + A_{\square_2} = c^2 + c \cdot (x + z) + z \cdot (a + z)$$

In beiden Fällen wird der Term zur Beschreibung des vorgefundenen Bauplans eingesetzt. Anschließend erläutern sich die Schülerinnen und Schüler mit Bezug auf die geometrische Situation gegenseitig, warum ihr Term einen Bauplan für den Flächeninhalt der zusammengesetzten Fläche darstellt. Die Idee des Bauplans wird vertieft, wenn die Schülerinnen und Schüler anschließend versuchen, ihre Terme so umzuformen, dass alle Terme in der Tischgruppe dieselbe Struktur aufweisen. Neben der inhaltlichen Deutung aus der Situation der Flächeninhaltsstrukturierung (Beschreibungsgleichheit), eröffnet sich so unter der Perspektive der gültigen Veränderung des Bauplans ein weiterer Zugriff auf die Frage, ob die gefundenen Terme gleichwertig sind. Beim Einsetzen verschiedener Zahlen für die Variablen lässt sich darüber hinaus noch die Einsetzungsgleichheit stichprobenartig prüfen.

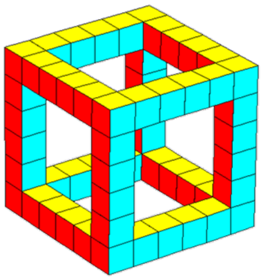
Bei der zweiten Beispielaufgabe *(Abb. 5)* geht es darum, wiederholte gleichartige Berechnungen für verschiedene Werte schnell und einfach anhand unterschiedlicher, bereits vorhandener Termen durchzuführen. Neben der von Wiegand und Wiegand (2006) beabsichtigen Hinführung zur funktionalen Sichtweise, steht hier vor allem die Grundvorstellung „Term als Rechenschema“ im Fokus. Durch den kompetenten Umgang mit dieser Grundvorstellung und die Fertigkeit, für die Variable Zahlen einzusetzen, um daraus zugehörige Termwerte zu berechnen, werden wesentliche Fähigkeiten ausgebildet, die in der Arbeit mit Funktionen notwendig und hilfreich sind.

Setzt nacheinander für x die Zahlen $-4; -3; -2; \ldots; 3; 4$ in die folgenden Terme ein. Fertigt eine Tabelle an und beschreibt eure Beobachtungen.

a $2 \cdot x + 3$
b $3 \cdot x + 4$
c $-2 \cdot x + 3$
d $(x - 1) \cdot (x - 1)$

Abb. 5: Termbeobachtung mit Tabellen (nach Wiegand/Wiegand 2006, S. 45)

Durch einen verantwortungsvollen Kompetenzaufbau können Lehrkräfte die „Anwendung des Gelernten auf neue Themen, die Verankerung des Neuen im schon Bekannten und Gekonnten“ (Bildungsplan 2011, S. 17) umsetzen. Zusätzlich wird „der Erwerb und die Nutzung von Lernstrategien und die Kontrolle des eigenen Lernprozesses“ (ebenda) ernsthaft ermöglicht und damit ein konsequenter Einsatz von (Selbst-)Diagnose und Förderung der Selbstregulation *(Abb. 1)* ermöglicht.
Im Umgang mit Termen wird so deren „denkentlastende Wirkung“ erfahrbar und „damit die Reichweite des mathematisch Ableitbaren“ erhöht (Hefendehl-Hebeker 2001). Als Konsequenz sollen Lernende dann in der Lage sein, Zählterme zu (einfachen) Mustern sowohl in ihrer Interpretation als Bauplan des Musters als auch als Rechenschema zur Ermittlung der Anzahl der Bausteine eines bestimmten Musters umsetzen zu können (vgl. Kasten 7).



Aus wie vielen kleinen Würfeln besteht ein Würfel wie in der Abbildung, der längs einer Kante aus n kleinen Würfeln zusammengesetzt ist?

Stellt möglichst viele verschiedene Zählterme auf und zeigt, dass sie gleichwertig sind.

Wie viele kleine Würfel braucht man zum Bau eines Würfels, der längs einer Kante aus 8, 10, 100, … Würfeln besteht?

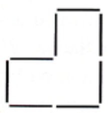
Kasten 5: Zählterme aufstellen

Dies wird beispielsweise auch in Testaufgaben von PISA (2000, S. 3) bei der Überprüfung mathematischer Kompetenzen genutzt.

Kompetenzerfahrung

Gerade in heterogenen Lerngruppen ist es besonders wichtig, dass alle Lernenden sich als kompetent erleben und den Zuwachs an Wissen und Können explizit erfahren. Auch hierfür kann die Grundvorstellungsorientierung unterstützend wirken. Grundvorstellungen werden in einem präskriptiven und in einem deskriptiven Sinn verwendet (vgl. z. B. vom Hofe u.a. 2005). Unter der präskriptiven oder auch normativen Perspektive erschließen die Grundvorstellungen den konzeptionellen Kern eines mathematischen Begriffs, in unserem Fall des Begriffs *Term*. Normative Grundvorstellungen entwickeln sich aus individuellen Grundvorstellungen der einzelnen Lernenden allmählich durch den Austausch darüber und werden schließlich allgemein in der (Lern-) Gemeinschaft akzeptiert. Grundvorstellungen unter der deskriptiven Perspektive versuchen die jeweils individuellen und subjektiven Grundvorstellungen zu beschreiben und zu erfassen (vgl. den Artikel von Scherrmann im vorliegenden Heft). Jede(r) Lernende und jede(r) Lehrende entwickelt individuelle und ganz eigene Vorstellungen zu Termen und legt sich Erklärungen für das Zustandekommen eines Bauplans oder Rechenschemas zurecht.

Die Strohhalme sollen die Begrenzungen beliebiger ebener Figuren darstellen.
Legt verschiedene Figuren und gebt zu jeder Figur den zugehörigen Term zur Berechnung des Flächeninhaltes und des Umfangs an (zuerst in ausführlicher und dann in möglichst kurzer Form).

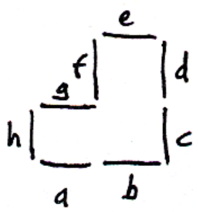


$$U = 2 \cdot a + 2 \cdot a + a + a + a + a = 8 \cdot a$$
$$A = a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a = a^2 + 2 \cdot a^2 = 3 \cdot a^2$$

Versucht, eine entsprechende Regel zu formulieren.

Abb. 6: (nach Wiegand/Wiegand 2006, S. 45)

Mithilfe eines Schülerdokuments (vgl. Wiegand/Wiegand 2006) kann die Sichtweise auf individuelle Grundvorstellungen einzelner Lernender konkretisiert und die Ermöglichung individueller Kompetenzerfahrung von Lernenden aufgezeigt werden. Die Aufgabe in *Abb. 6* gehört zu einer Lernumgebung, bestehend aus Aufgaben, die mithilfe eines Satzes gleichlanger Strohhalme zu bearbeiten ist. Das Schülerdokument in *Abb. 7* lässt sich im Abgleich zwischen der präskriptiven Perspektive auf die individuellen Schülervorstellungen mit der normativen Perspektive auf Grundvorstellungen zu Termen, wie sie etwa im Wissensspeicher festgehalten wird, inhaltlich interpretieren.



A: $(a+b) \cdot (d+c) - (g \cdot f)$

U: $(a+b) \cdot 4$

A kurz: $(a+b)^2 - (g \cdot f)$

U kurz: $a \cdot 4$

Abb. 4: Schülerdokument zu Abb. 6 (aus Wiegand/Wiegand 2006, S. 44)

Die Grundvorstellung „Term als Bauplan“ ist bereits gut verinnerlicht – der Lernende hat sich eine individuelle Strategie zurechtgelegt, mit deren Hilfe der Flächeninhalt und der Umfang der in *Abb. 6* dargestellten Figur mithilfe eines Terms strukturell korrekt dargestellt wird. Beim Flächeninhalt *A* wird erkannt, dass die Figur als Quadrat aufgefasst werden kann, von dem ein kleines Quadrat weggenommen wird. Bezüglich des Umfangs wird viermal die Summe aus zwei Strohhalmen gesehen, die insgesamt die Umrandung der Figur bilden. In beiden Fällen ist die Idee im Hinblick auf die Grundvorstellung „Term als Bauplan" korrekt dargestellt. Hier hat also bereits ein Kompetenzaufbau stattgefunden, worüber sich der Lernende und die Lehrkraft freuen können. Mit Blick auf die Grundvorstellung „Term als Rechenschema" wird allerdings deutlich, dass hier noch Vorstellungsdefizite vorliegen. Spätestens wenn konkrete Berechnungen durchgeführt werden sollen, muss die Frage geklärt sein, für welche Größe die Variable steht. Im Schülerdokument hat es zunächst den Anschein, dass für den Lernenden die Variablen als Bezeichner für die einzelnen Strohhalme stehen und nicht für die einheitliche Länge der Strohhalme. Sind die Variablen Repräsentanten für die einheitlichen Längen der Strohhalme, so ist es naheliegend diese jeweils mit demselben Buchstaben zu bezeichnen. Einen ersten, aber noch nicht konsequenten Schritt in diese Richtung ist der Lernende bei der Kurzfassung des Terms für den Flächeninhalt gegangen. Bei der Kurzfassung des Terms für den Umfang ist ein weiterer Fehler passiert. Die Gründe hierfür sind offensichtlich: Obwohl die Längen der jeweiligen verwendeten Quadrate gleich sind, werden unterschiedliche Variablennamen für dieselben Längen verwendet. Dies führt dazu, dass im Sinne der Grundvorstellung „Term als Bauplan" eine korrekte symbolische Beschreibung des vorliegenden Sachverhalts – aufgrund der Einteilung – erfolgt. Ersichtlich wird auch, dass die Ausbildung von Grundvorstellungen individuell erfolgt. Für die Unterstützung des individuellen Lernprozesses ist es wesentlich, dass Lehrkräfte die individuell bereits verinnerlichten Grundvorstellungen sowie noch nicht bzw. nur teilweise entwickelte Grundvorstellungen erkennen und im weiteren Unterrichtsgang darauf Rücksicht nehmen. Dies ist umso bedeutsamer als in heterogenen Klassenverbänden durch die inhaltliche Interpretation von Termen unterschiedliche Fertigkeiten und eben auch Vorstellungen einhergehen. Der Beitrag von Hoffkamp und Löhr im vorliegenden Heft nimmt sich dazu der Frage an, wie man diese Heterogenität beim Eintritt der Lernenden in die Sekundarstufe I erfassen kann, um Ergebnisse aus einem diagnostischen Test konstruktiv für den Unterricht zu nutzen.

Die Kompetenzerfahrung im Umgang mit Termen ist also grundlegend und unverzichtbar, um Terme in sinnvollen Kontexten thematisieren, anzuwenden, bewusst begründen oder in der notwendigen Ausführlichkeit reflektieren zu können. Damit einhergehende Grundvorstellungen werden ausgebildet und vermittelt. Darüber hinaus kann der Wissensspeicher entsprechend erweitert werden.

Fazit

Grundvorstellungen erweisen sich in allen, insbesondere aber auch in sehr heterogen zusammengesetzten Klassen als gute Basis und Bezugsnorm um Ideen in zielgerichteten Lernumgebungen erarbeiten und entdecken zu lassen. Sie bieten die Grundlage des Wissensspeichers und erlauben die Identifizierung von Grundwissen und Grundfertigkeiten. Darüber hinaus bieten sie die Bezugsnorm für individuelle Kompetenzerfahrungen und Diagnosen des noch auszubauenden Wissens und Könnens. Auf dieser Basis kann Heterogenität im Klassenverband konsequent begegnet werden. Voraussetzung dafür ist eine fundierte fachliche Durchdringung des jeweiligen Unterrichtsgegenstands. Erst auf dieser Basis lässt sich eine jeweils geeignete methodische Umsetzung auswählen. Vielfältige Konkretisierungen für mögliche methodische Vorgehensweisen zum Umgang mit Heterogenität sind in den Praxisbeiträgen des vorliegenden Heftes zu finden:

- *Leuders und Goy* zeigen eine Möglichkeit zu selbstdifferenzierenden Einstiegen in ein Themengebiet. Anhand unterschiedlicher Aufgaben der Sekundarstufe I werden kognitiv anregende Impulse gesetzt, um den individuellen Wissensspeicher zu füllen.
- *Blomberg* und *Holzäpfel* nehmen sich den Unterschieden beim Systematisieren und Sichern an. Exemplarisch werden die unterschiedlichen Phasen des Systematisierens und Sicherns aufgezeigt, sodass eine günstige Unterrichtsplanung (mit unterschiedlichen Zielsetzungen) für heterogene Lerngruppen entwickelt und ein Kompetenzaufbau bei Lernenden entsprechend vorangebracht wird.
- *Goy und Kleine* greifen ein inhaltlich voraussetzungsreiches Thema (die Bruchgleichungen) auf und zeigen den Umgang in heterogenen Lerngruppen damit. Anhand eines vorliegenden Unterrichtskonzepts werden sowohl eine inhaltliche Progression, als auch eine Progression im Anforderungsniveau für Lernende aufgezeigt, sodass der Kompetenzaufbau konstruktiv gefördert wird.
- *Hoffkamp und Löhr* bereichern das Feld der Kompetenzerfahrung. Auf der Grundlage eines Tests für (stark) heterogene Lerngruppen werden Möglichkeiten zum Zugang im Unterricht gezeigt. Die Notwendigkeit eines gut gefüllten Wissensspeichers bei Lernenden wird dabei offensichtlich.
- *Rolfes und Weber* greifen eine weitere Notwendigkeit im Mathematikunterricht auf: die Nutzung elektronischer Lernumgebungen. In diesem Beitrag wird deutlich, welchen

Mehrwert digitale Lernumgebungen im Umgang mit heterogenen Lerngruppen haben können.
- *Scherrmann* stellt eine Möglichkeit vor, wie Lernende elementare Lücken in ihrem Wissensspeicher füllen können. Der Beitrag zeigt einen Zugang wie Kompetenzerfahrung und Kompetenzaufbau im Wechselspiel stehen und welche Voraussetzungen hinsichtlich des Wissensspeichers notwendig sind.
- *Grafenhofer und Knobloch* zeigen einen erprobten Zugang zu einem Stationenbetrieb in der Vektorrechnung, der den Umgang mit heterogenen Lerngruppen am Anfang der Sekundarstufe II konstruktiv aufgreift.

Literatur

Ausubel, D. P. / Novak, J. D. / Hanesian, H. (1980): Psychologie des Unterrichts, Band 1. Beltz, Weinheim

Bildungsplan (2011). Lernbereich Arbeit und Beruf. Verfügbar unter: http://www.hamburg.de/contentblob/2372652/data/lb-arbeit-beruf-sts.pdf

Bruder, R. (2001): Mathematik lernen und behalten. In: Heymann, H.-W. (Hrsg.): Lernergebnisse sichern. Pädagogik 53(10), S. 15−18

Bruder, R. / Wehrse, T. (2014): Schulversuch MABIKOM. Der Mathematikunterricht, Jg. 60, Heft 3, Friedrich Verlag, Seelze

Fischer, A. / Hefendehl-Hebeker, L. / Prediger, S. (2010): Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. In Praxis der Mathematik in der Schule (PM), Heft 33 (Jg. 52), S. 1−7

Fischer, R. (2008): Mathematik anthropologisch: Materialisierung und Systemhaftigkeit. In Fischer, Roland (Hrsg.). Materialisierung und Organisation − Zur kulturellen Bedeutung von Mathematik, Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik, S. 27–50

Greefrath, G. / Oldenburg, R. /Siller, H.-St. / Weigand, H.-G. / Ulm, V. (2016): Didaktik der Analysis. Springer, Wiesbaden

Hefendehl-Hebeker, Lisa (2001): Die Wissensform des Formelwissens. In: Weiser, Werner / Wollring, Bernd (Hrsg.): Beiträge zur Didaktik der Primarstufe, Festschrift für Siegbert Schmidt, Verlag Dr. Kovac, Hamburg, S.83–98

Hattie, J. (2014): *Lernen sichtbar machen*. Schneider Verlag, Hohengehren

Hofe, vom, R. (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen. In: Mathematik lehren (ml) 118, 4−8

Hofe, vom, R. / Hattermann, M. (2014): Zugänge zu negativen Zahlen. In: Mathematik lehren (ml), 183, S. 2−7

Hofe, vom, R. / Kleine, M. / Blum, W. / Pekrun, R. (2005): On the Role of “Grundvorstellungen” for the Development of Mathematical Literacy – First Results of the Longitudinal Study PALMA, Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 4, 67–84

Hofe, vom, R. / Wartha, S. (2005): Grundvorstellungsumbrüche als Fehlerquelle bei der Bruchrechnung. In: Henn, H.-W., Kaiser, G. (Hrsg.) Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Algebra in der Sekundarstufe. Evaluation. Franzbecker, Hildesheim, S. 202−211

Pisa (2000). Beispielaufgaben aus dem Mathematiktest. Verfügbar unter: https://www.mpib-berlin.mpg.de/Pisa/Beispielaufgaben_Mathematik.PDF [letzter Aufruf: Februar 2016]

Rechenberger, P. / Pomberger, G. (2002): Informatik-Handbuch. Hanser-Fachbuch, München

Roth, J. / Siller, H.-S. (2013): HeMaS – Mit Heterogenität im Mathematikunterricht der Sek. I konstruktiv umgehen. Verfügbar unter http://hemas-projekt.de/ [04.04.2016]

Vollrath, H.-J. / Weigand, H.-G. (2007): Springer, Wiesbaden

Weinert, F. E. (2001): Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In: Leistungsmessungen in Schulen. Weinheim, Beltz, S. 17–31.

Wiegand, B. / Jordan, A. (2005): Grundvorstellungen zum Variablenbegriff – Eine Interventionsstudie. In: Henn, H.-W., Kaiser, G. (Hrsg.) Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation. Franzbecker, Hildesheim, S. 212−221

Wiegand, B. / Wiegand, S. (2006): Der Termbaukasten – Ein aktiver Einstieg in die Algebra. In: Mathematik lehren (ml) 136, S. 44−46

Verfasser

Prof. Dr. Hans-Stefan Siller

Seit 2012 Professor für Mathematik-Didaktik am Campus Koblenz der Universität Koblenz-Landau

Universität Koblenz-Landau, Campus Koblenz

Mathematisches Institut

siller@uni-koblenz.de

Prof. Dr. Jürgen Roth

Seit 2009 Professor für Mathematik und ihre Didaktik an der Universität Koblenz-Landau

Universität Koblenz-Landau, Campus Landau

Institut für Mathematik

roth@uni-landau.de