

Michaela SCHEURING, Landau, Jürgen ROTH, Landau

Funktionales Denken fördern - Realexperimente oder Simulationen?

Funktionale Zusammenhänge sind Bestandteil des Mathematikunterrichts in jeder Jahrgangsstufe (vgl. Leitidee 4, KMK 2004). Aber nicht nur für den Mathematikunterricht ist ihre Relevanz unbestritten. Auch in anderen Fächern wie etwa den Naturwissenschaften oder Sozialkunde sollten SchülerInnen in der Lage sein, funktionale Zusammenhänge erkennen und deuten zu können. Über den schulischen Kontext hinaus sind funktionale Zusammenhänge des Weiteren Teil unseres Alltags. Sei es, dass eine Tasse Kaffee abkühlt oder sich die Außentemperatur über den Tag hinweg ändert. Oft ist die beständige Gegenwart dieser Zusammenhänge den SchülerInnen aber gar nicht bewusst. Stattdessen lässt sich rein syntaktisches Wissen feststellen, dass nur selten semantisch fundiert ist. Im Zentrum der Schülerwahrnehmung steht die algebraische Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs (Leinhardt et al. 1990), es dominiert häufig der Rezept-Gedanke (Allmendinger et al. 2013) oder es kommt eine von zahlreichen, immer wieder konstatierten Fehlvorstellungen zum Tragen. Betrachtet man die Bedeutung funktionaler Zusammenhänge für Schule und Alltag sowie die vielschichtigen Schwierigkeiten der SchülerInnen mit dieser Thematik, muss man zu dem Schluss kommen, dass das funktionale Denken von SchülerInnen gefördert werden muss. So kann es ihnen ermöglicht werden, funktionale Zusammenhänge inhaltlich zu erfassen und zu durchdringen.

Theoretischer Hintergrund

Funktionales Denken lässt sich auf unterschiedlichen Ebenen beschreiben. Normativ betrachtet untergliedert es sich nach Vollrath (1989) in drei grundlegende Aspekte: Zuordnung, Änderungsverhalten und Objekt. Unter den Zuordnungsaspekt fasst er, dass jedem Element aus der Definitionsmenge (der unabhängigen Variablen) genau ein Element aus der Wertemenge (die unabhängige Variable) zugeordnet wird. Mit dem Aspekt des Änderungsverhaltens beschreibt er die mit der Variation der unabhängigen Variablen einhergehende Kovariation der abhängigen Variablen. Im Rahmen des Objektaspekts nimmt er schließlich die Funktion als Ganzes in den Blick. Versucht man dagegen, funktionales Denken aus Sicht der SchülerInnen zu charakterisieren, gilt es zu erfassen, wie SchülerInnen Funktionen wahrnehmen, beschreiben und verwenden. Tall und Vinner (1981) unterscheiden zu diesem Zweck *concept image* und *concept definition*. Unter *concept image* sind alle Vorstellungen, Bilder wie auch Prozesse, Beispiele und auch Fehlvorstellungen

gen zu verstehen, die SchülerInnen zum Begriff Funktion in den Sinn kommen. Daneben besteht *concept definition* aus der allgemein gültigen Definition. Meist stehen die beiden Konzepte unverbunden nebeneinander und die SchülerInnen greifen situationsbedingt auf das eine oder andere zu. Nähern sich die beiden Konzepte einander an und werden Verknüpfungen geschaffen, entsteht funktionales Denken, wie es sich bei Experten zeigt (Thompson 1994).

Forschungsfragen

Die vielschichtige Theorie funktionalen Denkens, die Schwierigkeiten der SchülerInnen, mit funktionalen Zusammenhängen adäquat umzugehen, und die unbestrittene Relevanz der Thematik für Schule und Alltag führen zur Frage, wie man funktionales Verständnis fördern kann, um eine Grundlage für die im Laufe der Schulzeit immer mehr in den Vordergrund tretenden syntaktischen Aspekte funktionaler Zusammenhänge zu schaffen. Die Förderung soll des Weiteren motivierend und interessant gestaltet sein. Diese Aspekte aufgreifend soll es das Ziel der hier beschriebenen Studie sein, funktionales Verständnis von SchülerInnen der Jahrgangsstufen 6 und 7 mit Hilfe von zwei Typen von Experimenten zu fördern. Wir unterscheiden an dieser Stelle Realexperimente (materialbasiert) und Simulationen (GeoGebra). Beide Arbeitsweisen bringen eine Vielzahl von Vorteilen mit sich. Sei es, dass materialbasiertes Experimentieren Zusammenhänge erlebbar macht oder dass Simulationen es ermöglichen, unterschiedliche Repräsentationsformen neben- statt nacheinander zu betrachten. Im Zuge der Entwicklung unseres Studiendesigns ergab sich außerdem die Überlegung, ob sich die drei Aspekte nach Vollrath als empirisch trennbar erweisen, was in unsere Forschungsfragen Eingang gefunden hat:

- Lassen sich Zuordnungsaspekt, Änderungsverhalten und Objektaspekt empirisch als einzelne Dimensionen funktionalen Denkens identifizieren?
- Fördern Realexperimente und Simulationen das funktionale Verständnis von Schülerinnen und Schülern?
- Rufen Realexperimente und Simulationen einen unterschiedlich großen Lernfortschritt im funktionalen Verständnis von Schülerinnen und Schülern hervor?

Funktionales Denken messen

Bevor funktionales Denken gefördert werden kann, muss man einen Weg finden, es messbar zu machen. Zu diesem Zweck haben wir einen Test entwickelt, der zudem versucht, die drei theoretischen Aspekte nach Vollrath auch empirisch zu trennen. Nach der Operationalisierung der drei Aspekte

und der Konstruktion von Items, die sich an Items aus bekannten Studien zu funktionalen Zusammenhängen anlehnen, wurden diese einem Expertenrating unterzogen. Auf Basis der Ergebnisse konnte die Operationalisierung geschärft und die Items überarbeitet werden. Es entstanden so 52 Items, wobei 15 Items auf den Aspekt der Zuordnung, 15 Items auf den Aspekt Objekt und 22 Items auf den Aspekt der Kovariation entfallen. Die Items wurden gleichmäßig im Multi-Matrix-Design auf vier Testhefte verteilt, wobei zusätzlich alle in einem Heft befindlichen Items in umgekehrter Reihung angeordnet wurden, um Reihenfolgeeffekte auszuschließen. Die so entstandenen 8 Testhefte wurden zur Pilotierung über insgesamt 11 Klassen der Jahrgangsstufe 7 verteilt. Von jeder Klasse werden alle Testheft-Versionen bearbeitet, um Klasseneffekt bzw. einen möglichen Effekt der unterschiedlichen Heftversionen zu minimieren. Dieser kann natürlich auftreten, obwohl darauf geachtet wurde, die Hefte einander in der Schwierigkeit entsprechend zusammenzustellen. Ergebnisse der Pilotierung liegen zum aktuellen Zeitpunkt noch nicht vor.

Realexperimente oder Simulationen?

In einer *Vorstudie* werden theoriebasiert hergeleitete Experimentierkontexte auf ihre Durchführbarkeit im Unterricht hin überprüft, der benötigten Zeitaufwand abgeschätzt und erste Einblicke in den Lernprozess der SchülerInnen während ihrer Arbeit in den unterschiedlichen Settings gewonnen. Nachdem wir uns für die Kontexte Bleistifte anspitzen (Anzahl der Spitzumdrehungen => Länge des Bleistifts), Gefäße füllen (Füllvolumen => Füllhöhe), Würfel bauen (Anzahl der kleinen Würfel an einer Kante => Gesamtzahl der zum Bau benötigten kleinen Würfel) und Kreise abwickeln (Durchmesser => Umfang) entschieden haben, wurden zu diesen vier Kontexten Simulationen und Aufgaben für beide Settings erstellt. Diese werden im nächsten Schritt im Rahmen des Mathematik Labors „Mathe ist mehr“ der Universität Koblenz-Landau erprobt. Die SchülerInnen werden die Aufgaben in Vierergruppen selbstständig bearbeiten. Um eine qualitative Auswertung der sichtbaren Prozesse neben Erkenntnissen über Durchführbarkeit und Zeitaufwand zu ermöglichen, wird eine dieser Schülergruppen bei ihrer Arbeit gefilmt und das Videomaterial anschließend qualitativ ausgewertet. Auf Grundlage der Ergebnisse der Vorstudie werden die Arbeitsaufträge überarbeitet und für die Einzelarbeit umgestaltet. Die *Hauptstudie* wird im Pre-Post-Test-Design mit Kontrollgruppe gestaltet sein. Zwei Experimentalgruppen werden sich in der auf 4 Schulstunden angesetzten Interventionsphase mit Realexperimenten bzw. Simulationen befassen. Die Kontrollgruppe wird sich dem Thema funktionale Zusammenhänge anhand der inhaltlich selben Aufgaben, aber weder mit Realexperimenten noch mit Simulationen widmen. Die Zuteilung

zu den Gruppen geschieht in randomisierter Form über alle Klassen hinweg, um Klassen und Lehrereffekte ausschließen zu können. Des Weiteren sollen im Pre-Test die Intelligenz, die Freude an der Arbeit mit Materialien bzw. computerbasierten Simulationen und die Einstellung zum Mathematikunterricht erhoben werden. Der Nachtest wird die Motivation der SchülerInnen während der Intervention mit erfassen. Da davon auszugehen ist, dass SchülerInnen, die mit Simulationen arbeiten, weniger Zeit zur Erledigung aller Aufgaben benötigen als die mit Material experimentierende Gruppe, wird die individuelle Bearbeitungszeit jeder Schülerin und jedes Schülers festgehalten und der Nachtest direkt im Anschluss an die individuelle Fertigstellung der Arbeitsaufträge stattfinden. Zusammenhänge zwischen Bearbeitungszeit, Intervention und Lerneffekt sind so möglicherweise erkennbar.

Ausblick

Unsere Studie wird es uns ermöglichen, Aussagen über den Grad des funktionalen Verständnisses von SchülerInnen zu treffen und die Effekte von Realexperimenten bzw. Simulationen für eine gezielte Förderung des funktionalen Denkens zu erfassen. Ein weiterführender Schritt sollte darin bestehen, den Effekt einer Kombination von Realexperimenten und Simulationen auf die Entwicklung des funktionalen Denkens zu untersuchen.

Literatur

- Allmendinger, H., Lengnink, K., Vohns, A. & Wickel, G. (Hrsg.). (2013). *Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Konferenz der Kultusminister (Hrsg.). (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Darmstadt: Luchterhand.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing. Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research* 60 (1), 1–64. doi:10.3102/00346543060001001.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12 (2), 151–169. doi:10.1007/BF00305619.
- Thompson, P. W. (1994). Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum. In E. Dubinsky (Hrsg.), *Research in collegiate mathematics education* (Issues in mathematics education, Bd. 4, S. 21–44). Providence, R.I.: American Mathematical Society.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik* (10), 3–37.