

Forschendes Lernen

Eine Annäherung an wissenschaftliches Arbeiten

Kann man Forschen lernen? Was genau sind die Grundlagen des Forschens – und wie können wir sie für den Lernprozess zugänglich machen?

Interesse für Neues zu entwickeln ist eine menschliche Grundhaltung. Dazu gehören Neugier und das Bedürfnis, den Dingen auf den Grund zu gehen, sie zu hinterfragen. Es gibt viele Bücher, die den Weg einer Entdeckung oder Erfindung in der Mathematik allgemein verständlich beschreiben, wie etwa die Lösung des Problems der „Fermatschen Vermutung“ (Singh 2000) oder die autobiographische Wegbeschreibung zur Fields Medaille des französischen Mathematikers Cédric Villani („Das lebendige Theorem“, 2013). Er lässt den Leser teilhaben an der Suche eines Forschers, der „weit davon entfernt (ist), eine geradlinige Bahn zu verfolgen“, und für den die Entdeckung „wie so oft im Leben ein langer Weg voller Rückwärtsbewegungen und Windungen“ ist (S. 5).

Kommt unseren Schülerinnen und Schüler das Mathematiktreiben auch manchmal so vor, wenn sie neuen Themen und Aufgaben begegnen? Was ist „*forschendes Lernen*“ im Schulunterricht überhaupt und wie kann es gestaltet werden?

Was ist forschendes Lernen?

Mit dem Begriff *forschendes Lernen* werden häufig Aspekte wie Selbsttätigkeit, Entdecken, Experimentieren, Problemlösen oder das Gewinnen neuer Erkenntnisse assoziiert. Es geht also um eine selbsttätige, zielgerichtete Auseinandersetzung mit einem neuen Sachverhalt oder Problem. Dahinter steht die Auffassung, dass man Forschen lernen kann. Dazu wird über attraktive Lernanreize (Forschungsangebote) eine Lehr-Lern-Kultur entwickelt, die es Schülerinnen und Schülern ermöglicht, selbstständig etwas für sie Neues zu entdecken, zu reflektieren und die erarbeiteten Ergebnisse geeignet darzustellen.

Entwicklung des Begriffs

„Forschen“ oder doch nur „Nacherfinden“?

Der Erziehungswissenschaftler Rudolf Messner (2009) stellt in dem vom ihm herausgegebenen Buch „Schule forscht“ grundlegende Fragen zu diesem Begriff, etwa:

„Was heißt das, forschend zu lernen? Kann dabei wirklich von Forschung gesprochen werden, oder ist dies nur eine beschönigende Wendung, um Schülerinnen und Schüler in das oft ungeliebte Terrain anspruchsvollen fachlichen Lernens zu locken, indem dann doch nur das Nacherfinden von längst Bekanntem möglich ist? Wie überhaupt verhalten sich Forschen und Lernen zueinander?“ (S. 15)

Hier ist das Bemühen zu erkennen, den mit Universitäten eng verknüpften Begriff auch für die Schule zu öffnen.

Forschen ist Strukturieren

In dem 1937 erschienenen Buch „Logic – The Theory of Inquiry“ (zu deutsch „Logik – die Theorie der Forschung“) hat sich John Dewey mit der Frage nach den Grundlagen der Forschung auseinandergesetzt, um sie auch für Lernprozesse zugänglich zu machen. Für ihn besteht das Zentrale der Forschung darin, eine unbestimmte Situation mit wenigen oder keinen Zusammenhängen zwischen vorhandenen einzelnen Komponenten in eine geordnete Situation überzuführen, also Zusammenhänge und Verknüpfungen zwischen den Komponenten der Situation zu erkennen und herzustellen.

„Forschung ist die gesteuerte oder gelenkte Umformung einer unbestimmten Situation in eine Situation, die in ihren konstitutiven Merkmalen und Beziehungen so bestimmt ist, daß die Elemente der ursprünglichen Situation in ein einheitliches Ganzes umgewandelt werden.“ (Dewey 1937, dt. 2008, S. 131)

Lernen geht nicht ohne Forschen

Die Problematik des Entdeckens oder Erforschens beschreibt John Dewey genauer in „Wie wir denken“ (1951, engl. Originalausgabe 1910):

„[Bei der] Methode, die zum Entdecken, zum systematischen Forschen verwendet wird, ... befindet sich das Denken in einer *suchenden Haltung, es verfolgt, plant, versucht dies und das.*“ Dabei gilt „Dass schon im Zweifel, im Erwägen von Möglichkeiten, im Versuchen ein Hinweis auf die Lösung enthalten ist. Nachdem ein Schluss erreicht wurde, wird ein nochmaliges Betrachten der einzelnen Stufen des Prozesses, dessen was nützlich, schädlich, wertlos ist, dazu beitragen, spätere analoge Fälle rascher und erfolgreicher zu behandeln. Auf diese Weise wird nach und nach eine recht klare Methode aufgebaut.“

(Dewey 1951, S. 118f)

Hier wird sehr schön die suchende Haltung des Forschers beschrieben, indem er „dies und das versucht“. Es gibt also keine festgelegten Regeln oder Methoden eines erfolgreichen Forschens und damit muss auch „forschendes Lernen“ vielschichtig und offen gesehen werden.

Forschen in der universitären Wissenschaft

In der deutschsprachigen Literatur findet sich der Begriff „forschendes Lernen“ wohl erstmals explizit 1970 in einer Veröffentlichung für die Hochschullehre (BAK 1970, S. 14-15). In dieser werden folgende Kennzeichen forschenden Lernens herausgearbeitet:

- selbstständige Themen- und Methodenwahl
- unbegrenztes Risiko (Irrtümer, Umwege), aber auch Chance für Zufallsfunde, „fruchtbare Momente“
- Notwendigkeit, dem Anspruch der Wissenschaft zu genügen (Forschungsansatz bis zu einem Ergebnis durchhalten, vorhandene Kenntnisse und Instrumente ausreichend prüfen)
- Prüfung des Ergebnisses
- Resultat darstellen

Diese Kriterien bedürfen selbstverständlich des kritischen Transfers beim Übertragen auf die Schule.

Forschendes Lernen in der Schule

An das forschende Lernen in der Schule kann natürlich kein universitärer oder fachwissenschaftlicher Anspruch gelegt werden – und es ist sicherlich auch nach Altersstufen differenziert zu beurteilen. Daher stellt der Erziehungswissenschaftler Manfred Bönsch den *subjektiven Charakter* des for-

schenden Lernens im schulischen Unterricht sehr stark in den Vordergrund und betont die Denk- und Experimentierprozesse, mit denen Schüler einen ihnen unbekanntem Sachverhalt erforschen und so zu ihrem Lernbesitz machen (Bönsch 1991, S. 199 und S. 202).

Dasselbe Ziel verfolgt bereits der „forschende Unterricht“ bei Eberhard Fries und Rudi Rosenberger (1976, S. 14, Erstausgabe 1967):

„Der Schüler soll im forschenden Unterricht (...) – soweit irgend möglich – selbständig denken und handeln. (...) (Der) Lehrer gewinnt stetig neue Einsichten in die besonderen Denkabläufe der Schüler bestimmter Altersstufen und auf diese Weise in zunehmendem Maße verlässliche Kriterien für die den Schülern zuzumutbare eigene Denkarbeit.“

Diese Denkarbeit wird als selbstständige „Problemgewinnung“ mit nachfolgender „Problemlösung“ gesehen, wobei das Ziel entweder die Erarbeitung neuer Begriffe und Verfahren oder die zielgerichtete Auswahl und Anwendung von bereits Erarbeitetem und Eingebütem ist (Fries/Rosenberger 1976, S. 42).

Mit dem forschenden Lernen in der Schule sind verschiedene Ziele verbunden (**Tab. 1**).

Tab. 1: Ziele forschenden Lernens in der Schule

Forschendes Lernen im Mathematikunterricht
• Aneignen und Wiederholen von Fachwissen
• Besseres Verstehen von Begriffen und anderen Lerninhalten durch eine intensive tiefgründige Auseinandersetzung mit ihnen
• Ausbilden einer forschenden, auf Neugier ausgerichteten Grundhaltung
• Entfalten einer wissenschaftlichen Einstellung
• Entwickeln und Unterstützen allgemeiner Kompetenzen wie Begründen und Argumentieren, Modellieren oder Kommunizieren.
• Bildung zur Mündigkeit und Selbstbestimmung des Einzelnen

Wie steht „forschendes Lernen“ zu entdeckendem Lernen, Projekten, problemorientiertem Unterricht?

Für Rudolf Messner (2009, S. 23) ist forschendes Lernen in der Schule eine Arbeitsform, in deren Rahmen Lernende für sie subjektiv Neues finden oder entdecken sollen. Dabei kommt insbesondere dem systematischen Vorgehen eine hohe Bedeutung zu, da dies charakteristisch für wissenschaftliches Arbeiten ist.

Messner geht dann auch auf die Beziehungen zwischen „forschendem Lernen“, „entdeckendem Lernen“, „Projektunterricht“, „selbstständigem Lernen“ und „problemorientiertem Unterricht“ ein. Die Grenzen sind hier fließend und können nicht eindeutig gezogen werden. Darüber hinaus erhalten

diese Methoden in unterschiedlichen Altersstufen eine unterschiedliche Bedeutung. In der Grundschule und Sekundarstufe I wird *entdeckendes Lernen* häufig mit forschendem Lernen gleichgesetzt, wohingegen es im wissenschaftlichen Bereich eher als eine Vorform des forschenden Lernens angesehen wird (Messner 2009, S. 23f). Sieht man – wie Messner – den *Projektunterricht* stärker auf praktische oder gesellschaftsrelevante Themen ausgerichtet, dann kann forschendes Lernen im Rahmen des Projektunterrichts entwickelt werden. (ebd. S. 24). Weiterhin sind für ihn *selbstständiges Lernen* und *problemorientierter Unterricht* Unterrichtsmethoden, in deren Rahmen sich forschendes Lernen entwickeln kann.

Positive Einschätzung in der Hattie-Studie

John Hattie (2013) sieht das forschende Lernen in der Schule sehr weitreichend und umfassend:

„Forschendes Lernen ist ein Unterrichtsansatz, in dem herausfordernde Situationen entwickelt werden, die Lernende zu Folgendem auffordern sollen: Phänomene zu beobachten und zu hinterfragen; Erklärungen dafür zu geben, was sie beobachten; sich Experimente auszudenken, in denen Daten gesammelt werden, und diese durchzuführen, um ihre Theorien zu stützen oder zu widerlegen; Daten zu analysieren; Schlussfolgerungen aus den experimentellen Daten zu ziehen; Modelle zu entwerfen und zu bauen – oder eine Kombination aus diesen Tätigkeiten. Diese Lernsituationen sind ergebnisoffen gedacht, insofern das Ziel nicht darin besteht eine einzig „richtige“ Antwort auf eine bestimmte Ausgangsfrage zu finden.“ (Hattie 2013, S. 247)

In seiner Analyse verschiedener Meta-Studien zu diesem Begriff kommt er zu einer positiven Einschätzung dieser Lernform: „Insgesamt zeigt sich, dass forschendes Lernen übertragbare Fähigkeiten des kritischen Denkens erzeugt, ebenso wie bedeutsame Vorteile im Wissensgebiet, eine verbesserte Leistung und eine verbesserte Einstellung gegenüber dem Unterrichtsfach.“ (Hattie 2013, S. 248).

Auf dem Weg zum mündigen Bürger

Aufbauend auf seinen Erfahrungen in der Hauptschule hat der Schulpädagoge Johannes Reitingner (2013) in jüngerer Zeit sowohl eine theoretische

Grundlegung des forschenden Lernens versucht, als auch praxisbezogene, im Wesentlichen projektartige Beispiele für den naturwissenschaftlichen Unterricht aufgezeigt, erprobt und ausgewertet. Als zentrales Ziel dieser Unterrichtsmethode sieht er die *Bildung zur Mündigkeit und Selbstbestimmung des Einzelnen* (Reitingner 2013, S. 188).

Diesem nicht ganz neuen Ansatz mag man durchaus zustimmen, wohl wissend aber auch, dass derartige Unterrichtskonzepte hohe Anforderungen an die Lernenden und die Lehrenden stellen. Sie setzen für alle Beteiligten Motivation, Neugier, eigenständiges Arbeiten und die Fähigkeit zum kritischen Diskurs voraus.

Forschendes Lernen im Mathematikunterricht

Für den Mathematikunterricht betont Volker Ulm (2009, S. 90) ebenfalls den subjektiven Charakter des forschenden Lernens, bei dem sich Lernende einem subjektiv unbekanntem und komplexen Themenfeld selbständig nähern und es teilweise erschließen. Wie bei der Forschung ist die Kooperation und Kommunikation zwischen den Akteuren auch beim forschenden Lernen ein wesentliches Element und kann hierbei gefördert werden. Für Ulm (2009, S. 91) ist forschendes Lernen charakteristisch für die Gewinnung neuer mathematischer Erkenntnisse. Er sieht sechs Phasen, an denen man sich zur Integration forschenden Lernens in den Unterricht orientieren kann:

- Einem mathematischen Phänomen begegnen
- Exploration des Themenfelds
- Einordnung in ein bestehendes Wissensnetz
- Strukturieren des Themenfelds
- Schriftliche Fixierung der Ergebnisse
- Präsentation, Publikation, Diskussion

An welchen Stellen passt forschendes Lernen?

Wenn der subjektive Charakter der Entdeckungen betont wird – wie es im Unterricht der Fall ist –, dann bieten sich für forschendes Lernen viele (oder vielleicht sogar fast alle) für Schülerinnen und Schüler neue Probleme an, *die sich auf Überlegungen beziehen, die einen größeren Bereich umfassen*. Dabei erscheinen Themenfelder besonders geeignet, bei denen – ganz im Sinne von Dewey – eine ungeordnete in eine geordnete Situation überführt wird.

Vgl. hierzu auch Behrens (2012) und den Artikel in diesem Heft, bei dem es um das Lernen des Stel- lens geeigneter Fragen zu einem Themenfeld geht. In ähnlicher Weise strukturieren bei Brigitte Lutz- Westphal Fragen „etwas Alltägliches“, die Pflaste- rung von Gehwegen. In dem Beitrag von Robert Strich und Hans-Georg Weigand zur „Fahrradma-

Ein Modell des forschenden Lernens

Forschendes Lernen ist ein Prozess, den es als Lern- und Arbeitshaltung auszubilden und zu ent- wickeln gilt und der in der Schule durch gezielt ge- staltete Lernumgebungen angeregt wird. Dieser Prozess wird dem *Modell des forschenden Lernens*

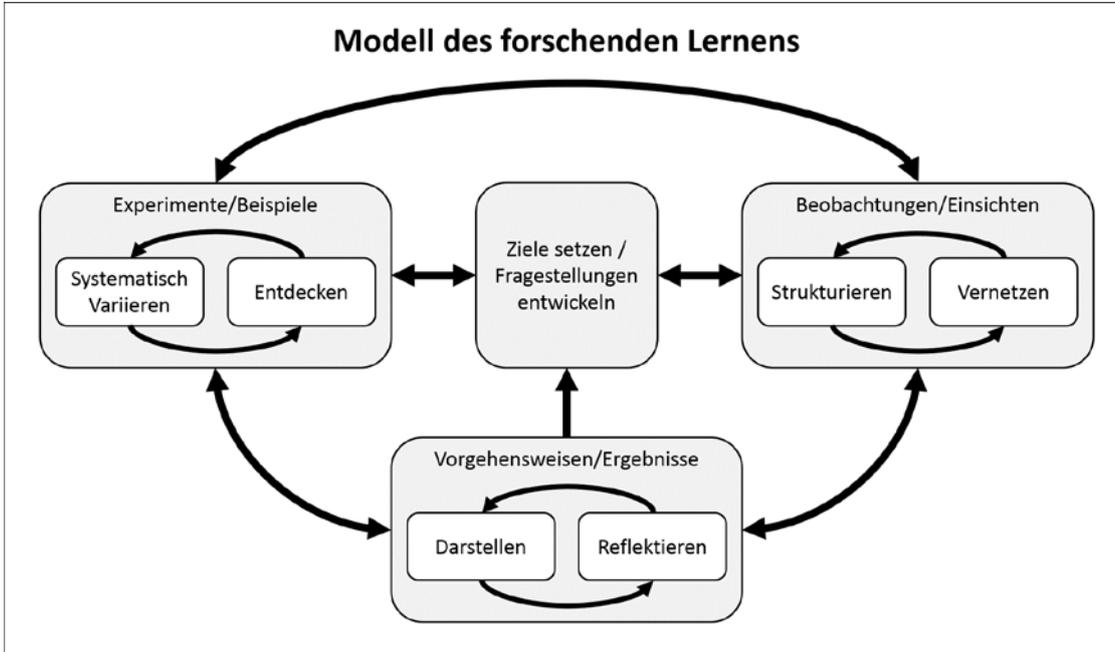


Abb. 1: Der Prozess des forschenden Lernens lässt sich durch drei untereinander vernetzte Phasen beschreiben. Anstoß ist die Begegnung mit einem subjektiv neuen Phänomen.

thematik“ werden durch experimentelle Erkundungen Hypothesen über die Erklärung eines Phänomens aufgestellt.

In dem Projekt PRIMAS (Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education Across Europe) werden Unterrichtsmaterialien und Fortbildungen zum Konzept des forschenden Lernens für alle Schularten entwickelt (<http://primas.ph-freiburg.de/>), wobei vor allem offene Aufgaben als Ausgangspunkt genutzt werden, um Schülerinnen und Schüler zum eigenständigen Fragen, Experimentieren, Entwickeln von Lösungsstrategien und Begründen bei unterschiedlichen inner- und außermathematischen Situationen anzuregen.

Dass geeignete Lernumgebungen bereits in der Grundschule zum Forschen im Sinne von Erkunden – Entdecken – Erfinden anregen können, stellt der Artikel von Angela Bezold an zwei Beispielen dar. Komplexere Probleme, wie die Sätze des Ceva und Menelaos – siehe den Artikel von Thilo Höfer – können in der Oberstufe zumindest einen Einblick in mathematische Forschung im Hinblick auf das Entdecken und Beweisen von Sätzen geben.

(**Abb. 1**) durch drei untereinander vernetzte Phasen beschrieben. Wenn Schülerinnen und Schüler einem neuen mathematischen Phänomen begegnen, kann forschendes Lernen beginnen. Dazu müssen sich Lernende bzgl. der Durchdringung dieses Phänomens Ziele setzen und Fragen entwickeln oder sich zumindest auf von außen gesetzte Ziele und Fragen einlassen. Auch während des Arbeitens werden sich Schülerinnen und Schüler immer wieder kleinere Zwischenziele setzen und auf neue Fragen stoßen, die sich aus den Ergebnissen im Arbeitsprozess ergeben. Der Start oder Beginn forschenden Lernens kann sich dabei unterschiedlich gestalten.

Experimente und Beispiele

systematisch variieren und Entdeckungen machen
 Zum einen kann man mit *Experimenten* bzw. *Beispielen* beginnen, die *systematisch variiert* werden. Dadurch wird es für Schülerinnen und Schüler möglich, interessante Zusammenhänge oder Details zu *entdecken* und Vermutungen anzustellen, die zu erneutem systematischem Variieren ihres Experiments/Beispiels führen können usw. – ein Wechselspiel zwischen systematischem Variieren und Entdecken, bei dem sich beide Aspekte gegenseitig bedingen. Grundsätzlich ist es für diese Phase des forschenden Lernens notwendig, dass Schülerinnen

und Schüler geeignete Lernumgebungen für ihre selbstständige Arbeit zur Verfügung gestellt werden, die Arbeitsaufträge, Medien, Materialien und Hilfen umfassen, die sie bei Bedarf zu Rate ziehen können (Vollrath/Roth 2012, S. 150-151). Forschendes Lernen in der Schule wird stets unterstütztes, angeleitetes und gelegentlich auch gelenktes forschendes Lernen sein.

Beobachtungen und Einsichten festhalten und überdenken

Forschendes Lernen kann andererseits aber auch damit beginnen, dass Schülerinnen und Schüler *Beobachtungen bzw. Einsichten* zu einem Phänomen *strukturieren* und damit untereinander in Beziehung setzen. Das Strukturieren führt in der Regel zum *Vernetzen* der neuen Beobachtungen und Einsichten mit bereits vorhandenem Wissen. Dies kann wieder Anlass für eine ergänzende oder auch neue Strukturierung der Beobachtungen und Einsichten im Zusammenhang mit dem betrachteten Phänomen sein.

Um Beobachtungen und Einsichten zu strukturieren und mit dem Vorwissen zu vernetzen ist die *Kommunikation in Kleingruppen* hilfreich und für viele Schülerinnen und Schüler sogar unabdingbar. Beim forschenden Lernen sollte daher die Kommunikation auch in Arbeitsaufträgen explizit eingefordert werden.

Oft werden sich beim Austausch Verbindungen zu bereits vorhandenen Erfahrungen und erarbeiteten Strukturen ergeben. Das eigentliche Lernen beginnt da, wo neue Erfahrungen *gezielt* mit vorhandenem Wissen *vernetzt* wird. Dabei stellt sich gelegentlich heraus, dass die Strukturierung der aktuellen Beobachtungen noch nicht adäquat ist und angepasst werden muss. Dieses erneute Ordnen kann seinerseits wieder zu einem besseren Vernetzen mit bereits vorhandenem Wissen führen.

Unabhängig davon, mit welcher Phase das forschende Lernen einsetzt, werden sich stets Vernetzungen mit den anderen Phasen dieses Prozesses ergeben.

Vorgehensweise und Ergebnisse festhalten und reflektieren

Nur auf der Grundlage von Skizzen, Tabellen, Graphen, Diagrammen oder verbalen Beschreibungen lassen sich erhaltene Ergebnisse adäquat reflektieren. Daher spielen Phasen des Darstellens von Vorgehensweisen und Ergebnissen im Arbeitsprozess immer wieder eine Rolle. Dies kann im verwendeten Schulheft oder auch in eigens gestalteten Forscherheften erfolgen.

Die kritische Betrachtung der Ergebnisse kann zu einer Optimierung der Darstellung führen, aber auch zu neuen systematischen Variationen bei er-

haltenen Ergebnissen. Daraus resultierende Entdeckungen bzw. das Strukturieren von Beobachtungen und Einsichten kann dann wieder deren Vernetzung mit dem Vorwissen neu anstoßen. So wird die Darstellung immer besser und die Reflektion der Vorgehensweisen und erzielten Ergebnisse vertieft.

Die Phase des Systematisierens und Sicherens sollte insbesondere am Ende jedes forschenden Lernens stehen. Das *Darstellen der Vorgehensweisen und Ergebnisse* sowie das damit einhergehende *Reflektieren* beider Aspekte erfordern die Konzentration auf das Wesentliche des Forschungsprozesses. Dazu ist es notwendig, nicht nur die Schülerinnen und Schüler in Einzel-, Partnerarbeit oder Kleingruppen zur Darstellung und Reflektion anzuhalten, sondern diese im Sinne eines mehrstufigen Vorgehens im Anschluss daran auch im Klassenverband durchzuführen. Dieser Prozess wird fachkundigen von der Lehrkraft moderiert, wobei die Ergebnisse der Schülerarbeitsgruppen zusammengeführt und ein Gesamtergebnis der Forschung fixiert wird.

Zahlen quadrieren, die auf 5 enden Beispiel für einen experimentellen Zugang

Staunen kann das Bedürfnis auslösen, etwas Überraschendes zu durchschauen und der *Frage* „Wie funktioniert das?“ nachzugehen (Herget, 2013). Bei jüngeren Schülerinnen und Schülern kann das Bild eines Zahlenzaubers, dessen Tricks man durchschauen möchte, diese forschende Einstellung unterstützen. Wie schafft er es, in kürzester Zeit Zahlen zu quadrieren, die auf 5 enden? (Wahl 2009) Das *gesetzte Ziel* ist es dann, zu erkunden wie der „Zaubertrick“ funktioniert.

Ausprobieren und systematisch Variieren

Zur Erkundung der „Zaubertricks“ kann das Problem zunächst anhand von *Beispielen* angegangen werden, die die Schülerinnen und Schüler *systematisch variieren*. Sie quadrieren zweistellige Zahlen, die auf 5 enden, und halten die Ergebnisse fest: $15^2 = 225$; $25^2 = 625$; $35^2 = 1225$; $45^2 = 2025$; ... Dies führt schnell zu der *Entdeckung*, dass die Ergebnisse immer auf 25 enden. Vielleicht wird die Zahl, die auf 5 endet, noch einmal *variiert*: So könnte eine größere Zahl, etwa 125, mit dem Taschenrechner quadriert und das Ergebnis wieder auf diese Entdeckung hin untersucht werden: $125^2 = 15625$ auch hier ist die Endung 25. Diese Phase des forschenden Lernens ist ein Prozess, bei dem sich systematisches Variieren und Entdeckungen gegenseitig bedingen und anstoßen. Dies kann durch den Einsatz neuer Technologien unterstützt

werden: mit einem Tabellenkalkulationsprogramm lassen sich die hier notwendigen Experimente mit Zahlenwerten sehr viel schneller variieren und Entdeckungen leichter erzielen.

Beobachtungen und Einsichten strukturieren

Die Beobachtung bzw. die daraus gewonnene Einsicht, dass alle Zahlen, die auf 5 enden, beim Quadrieren Zahlen ergeben, die auf 25 enden, reicht alleine nicht aus, um zu klären, wie das Quadrieren so schnell funktioniert. Um die *Beobachtungen und Einsichten* zu *strukturieren* ist das Erkennen – oder Vermuten – wichtig, dass wegen $5^2 = 25$ der letzte Teil des Ergebnisses aus dem Multiplizieren von 5 mit sich selbst hervorgeht. Wie ergibt sich aber der Rest der Quadratzahl? Gelingt es die zu quadrierende Zahl aufgrund der bisherigen Erkenntnis als $125 = 12 \cdot 10 + 5$ bzw. $35 = 3 \cdot 10 + 5$ zu schreiben, so ist ein großer Schritt zur Systematisierung getan und eine Strukturierung in der Form

$$x \cdot 10 + 5$$

liegt nahe. Damit lässt sich nun genauer erforschen, wie das Quadrieren einer Zahl dieser Struktur funktioniert. Dazu müssen die Schülerinnen und Schüler ihre bisherigen Einsichten nun *mit* ihrem *Vorwissen vernetzen*, indem sie den Summenterm quadrieren und mit Hilfe des Distributivgesetzes oder der entsprechenden binomischen Formel „ausmultiplizieren“:

$$\begin{aligned} (x \cdot 10 + 5)^2 &= (x \cdot 10)^2 + 2 \cdot (x \cdot 10) \cdot 5 + 25 \\ &= x^2 \cdot 100 + x \cdot 100 + 25 \\ &= (x^2 + x) \cdot 100 + 25 \quad (*) \\ &= x \cdot (x + 1) \cdot 100 + 25 \quad (**) \end{aligned}$$

Die so gewonnene Struktur muss nun wieder interpretiert werden. Dies geht natürlich direkt mit Hilfe der beiden letzten Termdarstellungen. Einige Schülerinnen und Schüler werden sich dies ggf. anhand von Beispielen klarmachen:

$$\begin{aligned} 65^2 &= (36 + 6) \cdot 100 + 25 = 42 \cdot 100 + 25 = 4225 \\ 125^2 &= (144 + 12) \cdot 100 + 25 = 156 \cdot 100 + 25 = 15625 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 65^2 &= 6 \cdot 7 \cdot 100 + 25 = 42 \cdot 100 + 25 = 4225 \\ 125^2 &= 12 \cdot 13 \cdot 100 + 25 = 156 \cdot 100 + 25 = 15625 \end{aligned}$$

Erst wenn die Vorgehensweisen und die so gewonnenen Ergebnisse geeignet dargestellt werden, können diese reflektiert und schließlich sinnvoll angewendet werden:

Man kann eine auf 5 endende natürliche Zahl offensichtlich quadrieren, indem man (*), die aus der (den) links neben der 5 stehenden Ziffer(n) gebildete Zahl quadriert, diese Zahl anschließend noch einmal addiert und an das Ergebnis die Ziffern 25 anhängt.

Alternativ kann man auch (**) die aus der (den) links neben der 5 stehenden Ziffer(n) gebildete

Zahl mit der nächstgrößeren Zahl multiplizieren und an das Ergebnis die Ziffern 25 anhängen.

Es gibt natürlich auch andere Wege um zu diesem Ergebnis zu kommen. Schülerinnen und Schüler, die eher visuell arbeiten, *strukturieren* die Frage evtl. geometrisch und interpretieren das Quadrieren als die Suche nach dem Flächeninhalt eines Quadrats mit der Ausgangszahl als Kantenlänge (vgl. **Abb. 2**). In jedem dieser Quadrate ist jeweils das Quadrat mit Flächeninhalt 25 und Kantenlänge 5 enthalten. Die Restfläche lässt sich immer mit Quadraten der Kantenlänge 10 und des Flächeninhalts 100 auslegen. Die „100er-Quadrate“ überlappen sich zum Teil in einer Quadratfläche des Flächeninhalts 25. Genau diese Fläche bleibt aber auf diese Weise frei. Insgesamt lässt sich die Fläche des großen Quadrats also als 25 plus Anzahl der „100er-Quadrate“ mal 100 berechnen. Aus der Umstrukturierung der „100er-Quadrate“ lässt sich erkennen, dass ihre Anzahl sich bei der gesuchten Quadratzahl $(x5)^2$ gerade aus dem Produkt $x \cdot (x + 1)$ ergibt (vgl. die rechten Darstellungen in **Abb. 2**).

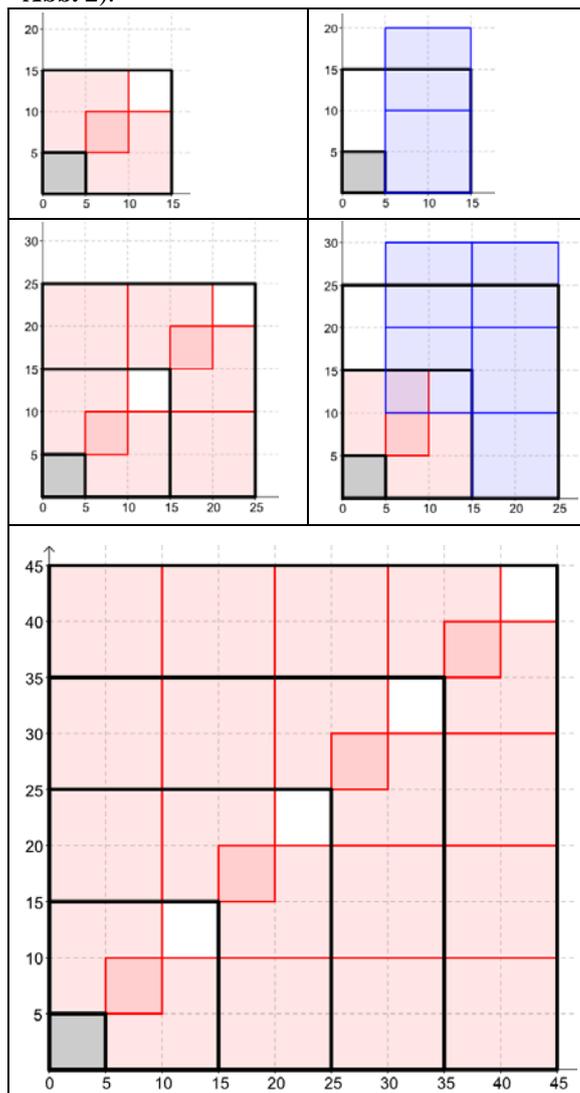


Abb. 2: Geometrische Veranschaulichung

Hier wird deutlich, dass es beim forschenden Lernen nicht nur eine Zugangsweise gibt und individuelle Wege eher die Regel als die Ausnahme sind. Um die geometrische Zugangsweise im anschließenden Unterrichtsgespräch geeignet reflektieren zu können, bietet sich das interaktive GeoGebra-Arbeitsblatt unter folgender Adresse an: <http://geogebraTube.org/student/m112417>

Ein weiteres Beispiel zu diesem experimentellen Zugang wird in dem Artikel von Rolf Oechsler (in dieser Ausgabe) beschrieben, in dem ausgehend von Dreieckszahlen weitere figurierte Zahlen erzkundet werden und dann die Frage auf die Raumgeometrie ausgedehnt wird.

Vierecke mit Um- und/oder Inkreis Beispiel für einen strukturierenden Zugang

Das Forschen kann – ausgehend von den entwickelten Zielen oder Fragen – auch sofort mit dem Prozess des Strukturierens von Beobachtungen und Einsichten beginnen. Dies ist für das mathematische Forschen in der Wissenschaft wohl der übliche Weg. Dabei wird ein fortgeschrittenes Wissen über den untersuchten Bereich vorausgesetzt. Ein Beispiel für die Schule ist das Ordnen der Vierecke mit In- und Umkreis.

Welche Vierecke haben einen Umkreis, welche einen Inkreis und welche haben beides?

Auf diese Frage kommt man ausgehend von der Betrachtung von Dreiecken, die alle einen In- und Umkreis haben: Ist das bei Vierecken auch der Fall? Es ist aber auch möglich, unmittelbar mit der Betrachtung von Vierecken zu beginnen.

Beobachtungen und Einsichten

Hier eröffnen sich nun zwei methodisch unterschiedlichen Wege. Man kann einerseits *vom allgemeinen Fall ausgehen* und dann zu speziellen oder besonderen Vierecken übergehen. Wie lassen sich (allgemeine) Vierecke mit Um- bzw. Inkreis charakterisieren? (**Online-Arbeitsblatt 1**) Im Mittelpunkt dieser Einheit stehen also damit Sehnen- bzw. Tangentenvierecke und deren Eigenschaften. Von da aus beginnt die Suche nach Spezialfällen für diese Viereckstypen, beispielsweise indem – mit einem DGS – experimentiert wird. Eine Strategie ist, ein Tangentenviereck zu konstruieren und zu überlegen, wann dieses Viereck auch einen Umkreis hat (**Abb. 3**).

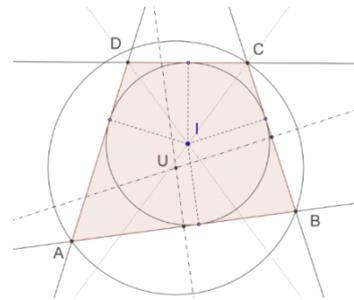


Abb. 3: Vom Allgemeinen zum Speziellen: Tangentenviereck ABCD, mit Kreis durch A, B und C.

Andererseits kann man auch *vom Speziellen zum Allgemeinen* übergehen. Dabei stößt man zunächst sicherlich auf das Quadrat als ein Viereck mit In- und Umkreis und auf das Rechteck als Viereck mit Umkreis. Weiterhin wissen oder vermuten die Schülerinnen und Schüler, dass die Raute einen Inkreis besitzt und können das auch – mit Hilfe der Diagonalen als Winkelhalbierende – begründen. Hier lässt sich bereits erkennen, dass eine Raute mit In- und Umkreis ein Quadrat ist, wodurch die Beziehung oder Vernetzung dieser beiden Begriffe auf eine neue Art und Weise deutlich wird. Der nächste Schritt könnte nun die Untersuchung des symmetrischen Trapezes und die Erkenntnis sein, dass dieses Viereck einen Umkreis besitzt.

Experimente und Beispiele

Bei der Charakterisierung von Vierecken im Hinblick auf die Existenz von Um- und/oder Inkreis werden Fragen offen bleiben, wie etwa: *Hat ein Drachen einen Inkreis? Wann hat ein Drachen auch einen Umkreis? Welche symmetrischen Trapeze haben einen Inkreis?* Die Beantwortung dieser Fragen kann mit einer experimentellen Phase beginnen, indem Eigenschaften entsprechender Drachen oder Trapeze – mit einer DGS – erkundet werden (s. **Abb. 4**).

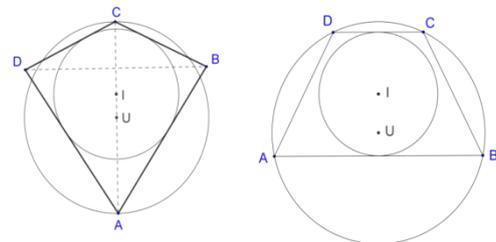


Abb. 4: Das Erkunden von In- und Umkreis bei Drachen und Trapezen
a) Drachen mit Inkreis und Kreis durch A und C.
b) Symmetrisches Trapez mit Umkreis und Kreis, der [AB] und [CD] berührt.

Vorgehensweisen und Ergebnisse

Die erhaltenen Ergebnisse lassen sich zusammenführen, beispielsweise in einem „Haus der Vier-

ecke“, wobei Struktur und Aufbau dieses Hauses überlegt werden müssen. Ein Ergebnis kann wie in **Abb. 5** aussehen. Und das Forschen kann weitergehen, etwa angeregt durch Fragen wie: Welche Symmetrien treten in diesem Haus der Vierecke auf? Welche Aussagen lassen sich über Winkel und Winkelbeziehungen anstellen?

Zusammenfassung, Ausblick, ...

Das hier dargestellte Modell ist bezgl. der sukzessiven Abfolge der Phasen als offen oder flexibel zu betrachten. So kann sich beim systematischen Variieren von Experimenten und Beispielen die Notwendigkeit aufdrängen, das dabei Entdeckte und die Art der systematischen Variation geeignet darzustellen, dies zu reflektieren und daraus etwa die nächste Variation der Beispiele vorzunehmen. Folglich gibt es keine vorgegebene Reihenfolge beim Durchlaufen des Modells, sondern eine wechselseitige Beziehung und ein gegenseitiges Anstoßen der drei beteiligten Phasen des forschenden Lernens. Auch können einzelne Phasen oder Teile einer Phase mehrfach durchlaufen werden und ggf. eine Veränderung der gesetzten Ziele bewirken, was dann erneut einen „Forschungskreislauf“ anstoßen kann.

Wir möchten Sie ermutigen, Phasen des forschenden Lernens in Ihren Unterricht zu integrieren. Ihre Schülerinnen und Schüler und Sie selbst werden dabei wertvolle Erfahrungen sammeln. Bei den ersten Versuchen sollte man bewusst klein anfangen und mit überschaubaren Projekten starten. Ideen dazu bietet die Seite <http://primas.ph-freiburg.de/> des Projekt PRIMAS (Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education Across Europe). Dort finden Sie Unterrichtsmaterialien zum Konzept des forschenden Lernens für alle Schularten, wobei vor allem offene Aufgaben als Ausgangspunkt genutzt werden, um Schülerinnen und Schüler zum eigenständigen Fragen, Experimentieren, Entwickeln von Lösungsstrategien und Begründen bei unterschiedlichen inner- und außermathematischen Situationen anzuregen.

Machen Sie sich zusammen mit Ihren Schülerinnen und Schülern auf den Weg zum forschenden Lernen!

Literatur

Behrens, R. (2012): Forschendes Lernen im Mathematikunterricht – unterstützt durch den Einsatz von Taschencomputern. Beiträge zum Mathematikunterricht, 109-112
 Bönsch, M. (1991): Variable Lernwege – Ein Lehrbuch der Unterrichtsmethoden. – Verlag Ferdinand Schöningh, Paderborn, München, Wien, Zürich.
 Bundesassistentenkonferenz BAK (Hrsg.) (1970): Forschendes Lernen, wissenschaftliches Prüfen. Ergebnisse der Arbeit des Ausschusses für Hochschuldidaktik. Schriften-

reihe: Schriften der Bundesassistentenkonferenz 5. (2. Auflage). Bonn
 Dewey, J. (1910): How we think. – D. C. Heath & Co. Publishers, Boston, New York, Chicago.
 Dewey, J. (2008): Logik – die Theorie der Forschung. – Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main.
 Euler, M. (2010): Schülerlabore: Lernen durch Forschen und Entwickeln. – In: Kircher, E./ Girwitz, R./ Häußler, P. (Hrsg.) (2010): Physikdidaktik - Theorie und Praxis. Springer, Berlin, Heidelberg, S. 799-818.
 Fries, E./Rosenberger, R. (1976): Forschender Unterricht. Ein Beitrag zur Didaktik und Methodik des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in allgemeinbildenden Schulen, mit besonderer Berücksichtigung der Sekundarstufen. 2. Auflage (1. Auflage 1967). Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt am Main.
 Hattie, J. (2013). Lernen sichtbar machen. Schneider Verlag: Hohengehren u. Baltmannsweiler.
 Wahl, J. (2009): Die „5er“-Quadrate. In: mathematik lehren, 155, S. 68.
 Messner, R. (2009): Forschendes Lernen aus pädagogischer Sicht. – In: Messner, R. (Hrsg.): Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen. Edition Körber-Stiftung, S. 15-30.
 Reitinger, J. (2013): Forschendes lernen. Theorie, Evaluation und Praxis in naturwissenschaftlichen Lernarrangements. – Reihe: Theorie und Praxis der Schulpädagogik. Bd. 12., Prolog-Verlag. Immenhausen bei Kassel.
 Singh, S. (2000). Fermats letzter Satz. dtv: München (engl. Original 1997)
 Ulm, V. (2009): Eine natürliche Beziehung – Forschendes Lernen in der Mathematik. – In: Messner, R. (Hrsg.): Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen. Edition Körber-Stiftung, S. 89-105.
 Villani, C. (2013). Das lebendige Theorem. S. Fischer: Frankfurt (Franz. Original 2012)

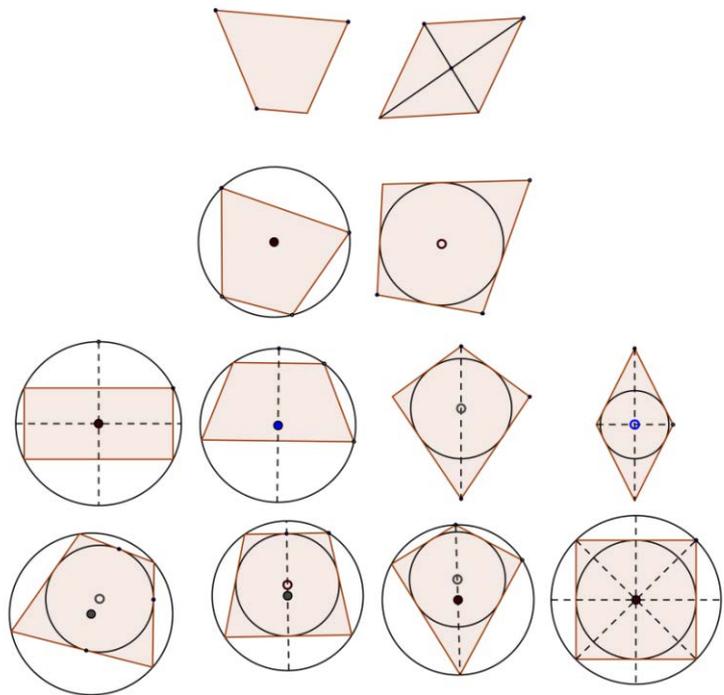


Abb. 5: Ein Haus der Vierecke – angeordnet nach Vierecken mit In- und Umkreis und Symmetrieeigenschaften