

Jürgen Roth

Experimentieren mit realen Objekten, Videos und Simulationen

Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff

Ein durchgängiges Forschungsthema von Hans-Joachim Vollrath ist die Begriffsbildung als wesentliche Grundlage des mathematischen Arbeitens. Gelegentlich wird bei der Rezeption seiner Arbeiten zum Funktionsbegriff übersehen, dass er sich bereits 1978 für „Schülerversuche zum Funktionsbegriff“ (Vollrath, 1978) ausgesprochen und auch konkrete Vorschläge für entsprechende Versuche gemacht hat. Davon angeregt ist eine Laborstation des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ der Universität Koblenz-Landau entstanden (vgl. www.mathe-labor.de/stationen/aktivurlaub/). Dort erarbeiten sich Schüler/innen in Kleingruppen (je vier Schüler/inne/n) zu Beginn des in Lehrplänen der 7. bzw. 8. Jahrgangsstufe vorgesehenen expliziten Unterrichts zum Thema Funktionen erste Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff, indem sie selbständig mit realen Objekten, Videos und Computersimulationen experimentieren, Ergebnisse in Form von Tabellen bzw. Funktionsgraphen festhalten und diese auswerten sowie analysieren. Durch diese Kombination aus realen und virtuellen Experimenten kann die von Vollrath intendierte Unterstützung der Begriffsbildung für den Funktionsbegriff gut gelingen. Das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ wird von ganzen Schulklassen von Gymnasien und Realschulen plus (entstanden aus ehemaligen Realschulen und Hauptschulen) besucht, die sich dort in drei Doppelstunden (jeweils 90 Minuten) mit einem Lehrplanthema auseinandersetzen. Dabei arbeiten die Schülergruppen anhand von Arbeitsheften, die sowohl die Arbeitsaufträge enthalten, als auch als Laborprotokoll dienen, in dem sie ihre Vorgehensweisen und Ergebnisse festhalten. Die Laborarbeit wird jeweils im Unterricht an der Schule vor und nachbereitet. Dazu gibt es Handreichungen für die Lehrkräfte. Da darüber hinaus alle notwendigen Materialien auf der oben angegebenen Internetseite zur Verfügung stehen bzw. an der Schule in jeder Physiksammlung vorhanden sind, kann das Konzept auch komplett im Mathematikunterricht an der Schule umgesetzt werden.

1 Experimentieren im Mathematikunterricht

Wenn von Experimentieren die Rede ist, denkt man in der Regel zunächst an die Naturwissenschaften. Dort ist das Experimentieren ein zentrales Instrument im Prozess der Erkenntnisgewinnung, bei dem wichtige Aspekte naturwissenschaftlicher Denk- und Arbeitsweisen benötigt und eingesetzt werden (vgl. Prenzel & Parchmann, 2003). Im Unterricht soll mit Hilfe von Experimenten (wissenschaftliches) entdeckendes Lernen stattfinden, das sich (vgl. etwa De Jong 2005; Reid, Zhang & Chen 2003; Swaak & de Jong 1996; Tesch & Duit 2004) aus drei miteinander vernetzte Phasen zusammensetzt. (1) Der Prozess der Wissensaneignung beginnt mit dem Aufstellen von Hypothesen auf der Basis einer konkreten Situation (Vorbereitung des Experimentierens). (2) Anschließend werden diese Hypothesen in neuen Situationen in Form von Experimenten getestet (Experimentieren). (3) Abschließend werden neue Erkenntnisse durch reflektierendes Abstrahieren und Integrieren der beim Experimentieren gemachten Erfahrungen generiert (Nachbereitung des Experimentierens).

Das Experimentieren kann – als wesentliche Facette des naturwissenschaftlichen Unterrichts – eine Vielzahl von Funktionen erfüllen, die Kircher et al. (2000, S. 259) für den Physikunterricht zusammenfassen. Sie können zum Teil auch als Ziele gesehen werden, die Lehrkräfte mit dem Experimentieren (in Form von Demonstrations- oder Schülerexperimenten) verfolgen (vgl. **Tabelle 1**).

Tabelle 1: Funktionen des Experimentierens nach Kircher et al. (2000, S. 259)

1) Ein Phänomen klar und überzeugend darstellen	2) Physikalische Konzepte veranschaulichen	3) Grunderfahrungen ausbauen bzw. ausschärfen	
4) Physikalische Gesetzmäßigkeiten direkt erfahren	5) Theoretische Aussagen qualitativ prüfen	6) (Schüler-)Vorstellungen prüfen	7) Physik in Technik und Alltag aufzeigen

8) Denkanstöße zur Wiederholung & Vertiefung geben	9) Physikalische Vorstellungen aufbauen	10) Physikalische Gesetze quantitativ prüfen	11) Physikalische Arbeitsweisen einüben
12) Motivieren und Interesse wecken	13) Nachhaltige Eindrücke vermitteln	14) Meilensteine unserer Kulturgeschichte aufzeigen	

Ein Blick auf mathematikdidaktische Veröffentlichungen macht deutlich, dass die Ziele des Experimentierens auch für den Mathematikunterricht gelten. Bereits Lietzmann (1912, S. 4f) propagiert für den Mathematikunterricht den Rückgriff auf die Anschauung und „die experimentelle Methode. Wir stellen Versuche an, und aus den dabei gemachten Beobachtungen abstrahieren wir das Gesetz.“ Ein wesentlicher Auftrag der Vermittlung von Mathematik besteht darin, Schüler/innen authentische Erfahrungen mit der Mathematik als Disziplin zu ermöglichen (vgl. Vollrath/Roth 2012, S. 24-33). Diese Auseinandersetzung mit Mathematik kann gelingen, wenn Schüler/innen selbst experimentieren, entdecken, strukturieren, Phänomene mathematisieren, Probleme lösen und auf diese Weise ihr mathematisches Weltbild erweitern. Dabei sollte sich eine Haltung herausbilden, die als „forschend“ charakterisiert werden kann (vgl. Roth 2013, S. 12). Vollrath (1978, S. 91) stellt fest, dass sich der „Bezug des Mathematikunterrichts zur Wirklichkeit [...] intensivieren [lässt], wenn man die Schüler die im Sachrechnen auftretenden Funktionen aus Experimenten gewinnen läßt.“ Bezugnehmend auf empirische Untersuchungen aus dem Physikunterricht geht er davon aus, „dass auch im Mathematikunterricht durch Experimente zum Funktionsbegriff die Schüler zum Arbeiten mit Funktionen besser motiviert werden können als durch rein rechnerische Behandlung und daß sich dadurch die Arbeitsweisen besser einprägen.“ (Vollrath, 1978, S. 92) Ganter (2012, S. 245-253) konnte derartige Effekte des Einsatzes von Schülerexperimenten – also Experimenten, die Schüler/innen selbst durchführen – empirisch belegen. Nach dieser Untersuchung nehmen bei Schülerexperimenten sowohl das mathematikbezogene Interesse, als auch die Selbstwirksamkeitserwartung deutlich zu, während sie im lehrerzentrierten Unterricht ohne Experimente und bei Demonstrationsexperimenten eher abnehmen. Die intrinsische Motivation der Schüler/innen bleibt bei Schülerversuchen während des Unterrichts konstant, während sie in den anderen beiden Settings abnimmt. Auch der Lerneffekt ist – zumindest bzgl. der bei Ganter (2012) untersuchten Aspekte Zuordnung und Kovariation des funktionalen Denkens – bei Schüler/innen zum Teil deutlich größer, wenn sie in Schülerversuchsumgebungen gearbeitet haben (Ganter 2012, S. 235-239). Beckmann (2007) weist darauf hin, dass das Experimentieren verschiedene Leitideen des Mathematikunterrichts wie z. B. Datenerfassung, funktionaler Zusammenhang und Modellieren gleichzeitig anspricht und darüber hinaus „Erfahrungen in unterschiedlichen Realitätsbezügen (fachübergreifender Zusammenhang, Alltagsbezug und konkrete Größen statt x und y)“ (Beckmann 2007, S. 44) ermöglicht. Philipp (2013, S. 34, Tabelle 1) erweitert das Anwendungsgebiet dessen, was sie experimentelles Denken nennt, für den Mathematikunterricht noch einmal deutlich, indem sie als Grundlage des Experimentierens auch selbstgenerierte (Zahlen-)Beispiele zulässt. Zusammenfassend halten Ludwig und Oldenburg (2007, S. 4) fest, dass „Experimente [...] Lernprozesse auslösen und Lernwege steuern [können]. Ganz nebenbei werden Kompetenzen wie Kommunizieren, Argumentieren und Modellieren gefördert. Und sie machen auch noch Spaß.“

Sowohl bei Beckmann (2007) als auch bei Ludwig und Oldenburg (2007) wird deutlich, dass das Experimentieren und das Modellieren zwar Überlappungsbereiche haben, es sich dabei aber um unterschiedliche Prozesse handelt. Nach Blum (2010, S. 42) reichen die „Auffassungen vom Begriff des mathematischen Modellierens [...] vom Mathematisieren im engeren Sinn, d. h. vom Aufstellen eines mathematischen Modells als geeignetes Abbild eines Ausschnitts der Welt, bis zum angewandten Problemlösen im umfassendsten Sinn.“ In der Regel geht es beim *Modellieren* im Mathematikunterricht (vgl. Blum 2010, S. 42 und Abbildung 1) aber darum, eine „Realsituation“ zu erfassen, zu strukturieren und ggf. zu vereinfachen, dabei in ein Situationsmodell bzw. ein Realmodell zu übertragen. Anschließend wird mathematisiert, also ein mathematisches Modell so konstruiert,

dass es mit den verfügbaren Mitteln mathematisch bearbeiten werden kann. Daraus resultierende Ergebnissen werden schließlich interpretiert, validiert und auf die reale Situation angewendet.

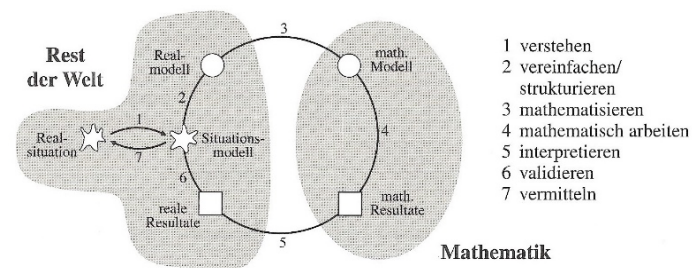


Abbildung 1: Prozessschema für Modellierungsaufgaben (Blum, 2010)

Vergleicht man das mit den Funktionen des Experimentierens aus Tabelle 1, so wird deutlich, dass beim Experimentieren im Unterricht in der Regel andere Ziele verfolgt werden, als beim Modellieren. Unter anderem kann es beim Experimentieren darum gehen Schülervorstellungen offenzulegen oder Grundvorstellungen (etwa zum Funktionsbegriff) zu entwickeln, Arbeitsweisen (z. B. zum Umgang mit Repräsentationen) einzuüben, Phänomene zu erfassen und darzustellen, Zusammenhänge durch die gezielte Variation einer Einflussgröße zu untersuchen und anderes mehr. Beim Experimentieren kann es auch zu Tätigkeiten kommen, die Teilprozessen des Modellierens entsprechen, die Stoßrichtung ist aber eine klar andere.

2 Zusammenhang zwischen dem Experimentieren und dem funktionalen Denken

Sowohl beim Experimentieren als auch für das funktionale Denken ist es wesentlich, abhängige von unabhängigen Variablen zu unterscheiden. Beim Experimentieren wird versucht möglichst viele (idealerweise alle bis auf eine) unabhängige Variable festzuhalten und nur eine unabhängige Variable zu variieren. Es wird dabei beobachtet, wie sich die abhängige Variable dadurch verändert. Um diese Veränderung zu erfassen ist es beim Experimentieren wesentlich, die eingestellten Werte der unabhängigen Variable und die sich daraus ergebenden zugeordneten Werte der abhängigen Variablen jeweils paarweise geeignet in einer Tabelle festzuhalten. Um die Zusammenhänge zwischen der unabhängigen und der abhängigen Variable besser analysieren zu können, erstellen Naturwissenschaftler aus den in Tabellen erfassten Messwerten in der Regel Diagramme, um mit ihrer Hilfe auf zugrundeliegende funktionale Zusammenhänge zwischen den beteiligten Größen schließen zu können. Wenn man sich das bewusst macht, wird deutlich, dass das naturwissenschaftliche Experimentieren und das funktionale Denken eng verwandt sind und wechselseitig voneinander profitieren können. Für das Experimentieren ist die Fähigkeit, mit Funktionen und deren verschiedenen Darstellungsformen arbeiten zu können, eine wichtige Voraussetzung. Darüber hinaus ist es für das Experimentieren von wesentlicher Bedeutung, grundlegende Funktionstypen und deren charakteristische Eigenschaften zu kennen. Nur so lassen sich empirisch gegebene Zusammenhänge reflektieren und mit Hilfe von Funktionen modellieren.

Umgekehrt ist es für die Entwicklung des funktionalen Denkens sehr hilfreich anhand von Experimenten die Zuordnung von abhängigen Größen zu einer unabhängigen Größe, die vom Experimentator „eingestellte“ bzw. festgelegt wird, handelnd zu erfassen. So wird die Entwicklung einer Grundvorstellung zum Zuordnungsaspekt unterstützt. Darüber hinaus ergibt sich beim Experimentieren eine klare Vorstellung vom Sinn der eindeutigen Zuordnung. Jedem eingestellten bzw. ausgewählten Wert der unabhängigen Größe wird eindeutig ein Wert der abhängigen Größe zugeordnet. Wenn etwa die Abkühlung eines Getränks untersucht wird, misst man die Temperatur der Flüssigkeit in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit. Dabei wird deutlich, dass *jedem Zeitpunkt* (jedem Element der Definitionsmenge) *genau eine Temperatur* (genau ein Element der Zielmenge) zugeordnet wird, da das Thermometer (an einen bestimmten Punkt im Raum) zu jedem Zeitpunkt jeweils genau eine Temperatur misst. Beim Experimentieren ergibt sich der Dirichletsche

Funktionsbegriff (Zuordnung, die jedem Element der Definitionsmenge genau ein Element der Zielmenge zuordnet.) also als notwendige Zwangsbedingung für praktisches Arbeiten. Dieser intuitive Zugang zur Definition einer Funktion ist ein weiterer wesentlicher Vorteil des Experimentierens im Zusammenhang mit der Ausbildung von Grundvorstellungen zu funktionalen Zusammenhängen.

3 Grunderfahrungen zu funktionalen Zusammenhängen durch Experimente sammeln

Um die Vorteile von Schülerversuchen für den Mathematikunterricht nutzen zu können, müssen den Schüler/innen geeignete Lernumgebungen zur Verfügung gestellt werden, die Arbeitsaufträge, Medien, Materialien und bei Bedarf abrufbare Hilfestellungen umfassen (vgl. Vollrath/Roth 2012, S. 150f). Dies leistet die Lernumgebung unter www.mathe-labor.de/stationen/aktivurlaub/. Unter dieser Adresse finden sich alle hier beschriebenen sowie weitere Medien und Materialien. Das Ziel des selbständigen Experimentierens besteht hier darin, dass die Schüler/innen Grunderfahrungen zum Arbeiten mit Repräsentationsformen für funktionale Zusammenhänge (Tabelle, Graph, verbale Beschreibung, Term) sowie insbesondere den folgenden drei Aspekten des funktionalen Denkens nach Vollrath (1989, 2014) sammeln:

1. Zuordnungsaspekt: *Durch Funktionen werden Zusammenhänge zwischen Größen beschrieben oder gestiftet: Einer Größe ist eine zweite zugeordnet, so dass die zweite Größe als abhängig von der ersten betrachtet wird.*

In einem Experiment rennen die Schüler/innen so schnell wie möglich eine Treppe über drei Stockwerke nach oben und anschließend sofort wieder nach unten. Sie messen vorher ihren Ruhepuls und nach dem Lauf in Abständen von 30s jeweils ihren aktuellen Puls. So erfassen sie wie einem Zeitpunkt jeweils der aktuelle Puls zugeordnet wird und halten diesen Zusammenhang paarweise in Form einer Tabelle fest.

2. Änderungsverhalten/Kovariation: *Durch Funktionen wird deutlich, wie sich die Änderung einer Größe auf eine von ihr abhängige Größe auswirkt.*

Wie ändert sich der Puls, wenn er in gleichen Zeitschritten (hier 30 s) gemessen wird? Ändert er sich auch gleichmäßig, oder nimmt er zunächst langsamer ab und dann schneller, oder umgekehrt? Um diese Frage zu beantworten reicht es nicht mehr einzelne Wertepaare zu betrachten. Hier müssen mehrere benachbarte Werte jeweils einer Größe zueinander in Beziehung gesetzt werden.

3. Sicht als Ganzes: *Mit Funktionen sieht man einen gegebenen oder gestifteten Zusammenhang als etwas Ganzes. Man betrachtet nicht mehr einzelnen Wertepaare sondern die Menge aller Wertepaare.*

Für das Erfassen des funktionalen Zusammenhangs zwischen der verstreichenden Zeit und der Pulsfrequenz des Läufers nach einem anstrengenden Treppenlauf ist es notwendig systematisch Daten aufzunehmen, diese in einer Tabelle zu erfassen und anschließend in einen geeigneten Graph umzusetzen. Erst auf dieser Basis kann der funktionale Zusammenhang zwischen der verstreichenden Zeit und dem Puls eines Läufers als Ganzes betrachtet und die funktionalen Zusammenhänge für verschiedene Läufer miteinander verglichen werden. So lassen sich die funktionalen Zusammenhänge im Ganzen anhand der Verläufe der Graphen für unterschiedliche Läufer vergleichend interpretiert – auch im Hinblick auf die jeweilige Fitness der Läufer. Es wird deutlich, dass eine Lernumgebung nicht nur geeignete Messinstrumente (hier etwa eine Stoppuhr) zur Verfügung stellen, sondern auch Anregungen zur Art der Beobachtungen und zur Auswertung der Daten geben muss.

Zu den Grunderfahrungen zu funktionalen Zusammenhängen gehört es unabdingbar, Übersetzungen zwischen verschiedenen Darstellungsformen durchzuführen, Darstellungen wechselseitig zu interpretieren und so das Verständnis für funktionale Zusammenhänge in den jeweiligen Darstellungen zu fördern. In einem Experiment setzen sich die Schüler/innen mit der gesprochenen Reportage zu

einem Kartrennen auseinander und versuchen dabei den funktionalen Zusammenhang zwischen dem auf der Kartbahn zurückgelegten Weg und der jeweiligen Geschwindigkeit des Karts zu strukturieren und in Form eines skizzierten Funktionsgraphen darzustellen. Hier wird mit der graphischen Darstellung experimentiert, intensiv diskutiert, interpretiert und neu strukturiert. Da in der Reportage die Beschleunigung bzw. das Bremsverhalten des Kartfahrers beschrieben wird, müssen sich die Schüler/innen direkt mit dem Änderungsverhalten der Geschwindigkeit auseinandersetzen und dies in die Skizze eines Geschwindigkeit-Weg-Diagramms umsetzen. Anhand einer auf dem dynamischen Mathematiksystem GeoGebra basierenden Simulation (vgl. **Abbildung 2**) können die Schüler/innen anschließend ihre eigenen Ergebnisse noch einmal hinterfragen, nachstrukturieren und den Verlauf des Graphen inhaltlich interpretieren.

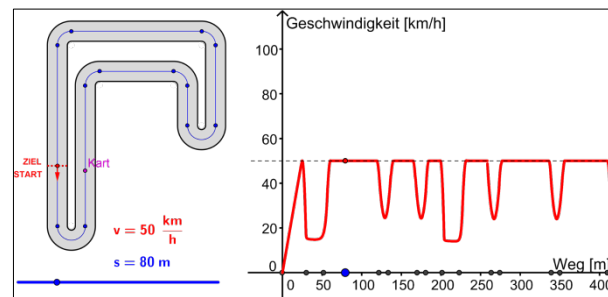


Abbildung 2: Simulation zum Kartrennen

Hier wird deutlich, dass das Experimentieren ganz wesentlich davon lebt, dass Vorhersagen getroffen und diese zusammen mit den anschließend gemachten Beobachtungen und Entdeckungen in „Laborprotokollen“ festgehalten werden. Nur auf dieser Basis kann mit den beim Experimentieren gewonnenen Erkenntnissen weitergearbeitet, diese strukturiert und sinnvoll reflektiert werden. Deshalb müssen Schüler/innen im Rahmen der Experimentieranleitungen immer wieder dazu angehalten werden ihre Arbeitsprozesse und -ergebnisse individuell darzustellen und festzuhalten.

In einem weiteren Experiment beschäftigen sich die Schüler/innen mit der Masse von Getränke-Sixpacks. Dazu stehen ihnen nur wenige Sixpacks sowie eine Waage zur Verfügung, die erst ab zwei Sixpacks zu messen beginnt. Hier müssen die Schüler/innen einen proportionalen Zusammenhang erschließen, dessen Änderungsverhalten erfassen und auf dieser Basis sowohl die Masse eines Sixpacks als auch die Masse von sehr vielen Sixpacks, die auf eine Palette passen, bestimmen. Wieder geht es um das Änderungsverhalten, aber auch um den Versuch einen Funktionsterm aufzustellen, der den funktionalen Zusammenhang darstellt.

Beim „Graphen laufen“ setzen sich die Schüler/innen anhand ihrer eigenen Bewegungen, die von einem Bewegungssensor aufgezeichnet und in einem Zeit-Ort-Diagramm ausgegeben werden, mit der Frage auseinander, wie der Verlauf eines Funktionsgraphen zu interpretieren ist und wie ein vorgegebener Graph hergestellt werden kann. Dabei steht wieder das Änderungsverhalten im Mittelpunkt der Betrachtung. Es kann experimentell vorgegangen werden, weil die Anzeige sofort eine Rückmeldung dazu gibt, ob die Überlegungen richtig waren. Bewegungssensoren gibt es in fast jeder Physiksammlung, sie können aber auch bei Vernier (www.vernier.com) bestellt werden. Eine kostenlose Analysesoftware lässt sich auf der angegebenen Seite herunterladen auf jedem PC installieren und damit den über einen USB-Anschluss verbundenen Bewegungssensor ansteuern.

Aus Platzgründen kann hier leider nicht auf weitere Experimente eingegangen werden. Diese kann man jedoch mit allen Materialien auf der oben angegebenen Seite einsehen bzw. herunterladen. Im nächsten Abschnitt geht es noch um zwei Realexperimente, die aufgrund von Problemen bei der Durchführung durch virtuelle Experimente ersetzt wurden. Wie im Folgenden dargestellt wird, kann dieser Ersatz in manchen Fällen sinnvoll sein.

4 Beziehung zwischen Real-, Videoexperimenten und Simulationen

Bei einzelnen Experimenten kann der Zeitbedarf für die Versuchsdurchführung recht hoch und das Ablesen von Messwerten mit deutlichen Ungenauigkeiten behaftet sein. Dadurch kann die Auswertung und Analyse der funktionalen Zusammenhänge erschwert werden oder zeitlich vergleichsweise etwas zu kurz kommen. So haben wir im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ etwa das Experiment zur Abkühlung eines Getränks zunächst von den Schüler/innen selbst mit kochendem Wasser, einer Stoppuhr und einem Thermometer durchführen lassen. Dabei zeigte sich, dass der zeitliche Aufwand sehr hoch (Wasser kühlt sehr langsam ab) war und die Schüler/innen Schwierigkeiten hatten, jeweils in gleichmäßigen Zeitabständen von 20 Sekunden die Temperatur abzulesen und in ihre Tabelle einzutragen. Aufgrund dieser Erfahrungen wurde der Versuch real durchgeführt und dabei per Video aufgezeichnet (**Abbildung 3** ist ein Standbild aus diesem Video). Die Schülerinnen haben nun die Aufgabe die Messwerte aus dem Video zu erfassen.



Abbildung 3: Abkühlungsprozess von Wasser: Die Anzeige links unten auf dem Smartphone zeigt die verstrichene Zeit in Sekunden an. Die Anzeige des Digitalthermometers darüber zeigt die aktuelle Wassertemperatur im Glasgefäß an.

Wie sich herausstellte, ist dieser Kompromiss zwischen „realem Experimentieren“ und „gar nicht Experimentieren“ recht gut gelungen. Es wird auch im Video immer noch deutlich wie die Größen Zeit und Temperatur funktional zusammenhängen, die Datenaufnahme aus dem Video erhöht die Messgenauigkeit, ohne den realen Charakter oder gar die Messwerte des experimentellen Settings zu verfälschen. Obwohl das Video die Originallänge des Versuchs darstellt (es wurde also nicht gekürzt) ist der Zeitbedarf für die Messwernerfassung deutlich geringer, weil die Schüler/innen mithilfe der Zeitleiste im Video zu den vorgesehenen Messzeitpunkten vor- und zurückspulen sowie den Film anhalten können. Unsere Beobachtungen bei ersten Probedurchläufen ergaben, dass die Schüler/innen mit dem „Videoexperiment“ in diesem Fall deutlich besser zurechtkamen als mit dem realen Experiment und z. B. die Ablesegenauigkeit bereits dadurch gesteigert wurde, dass kein Zeitdruck beim Ablesen besteht. Unsere Beobachtungen werden durch empirische Ergebnisse von Brell et al. (2008, S. 33) zu interaktiven Bildschirmexperimenten in der Physik gestützt. Dort ergab sich, dass Lernende bei Leistungstests nach interaktiven Bildschirmexperimenten genauso erfolgreich waren, wie Vergleichsgruppen nach den entsprechenden Realexperimenten und zusätzlich bei der Durchführung rund 28% Zeit im Vergleich zu den Realexperimenten eingespart wurde. Es kann also bei manchen (aufwändigen) Experimenten sinnvoll sein, auf Videoexperiment oder, wie im Folgenden dargestellt, Experimente mit Simulationen auszuweichen.

Bei den klassischen Füllversuchen mit Wasser (vgl. u. a. Affolter 2005; Barzel 2009, S. 7 und 11; Ganter 2013, S. 149f; Lergenmüller, Schmidt 2007, S. 13-17; Nydegger et al. 2002, S. 6;) werden mit einem Messbecher immer wieder gleiche Mengen Wasser in ein Gefäß gefüllt. Die sich daraus ergebende Füllhöhe wird mit Hilfe eines Lineals bestimmt, in eine Tabelle eingetragen und daraus ein Funktionsgraph erstellt. Das Realexperiment ist auch hier aufwändig, zeitintensiv und messfehleranfällig durch Ungenauigkeiten beim Ablesen (Wasseroberfläche) sowie ggf. zu große Abstände der Messwerte bei geschwungenen Gefäßformen. Hier haben wir sehr gute Erfahrungen mit Simulationen gemacht, die analoges Vorgehen wie beim realen Experiment ermöglichen und Probleme minimieren (vgl. **Abbildung 4**). Auf diese Weise haben die Schüler/innen deutlich mehr Zeit und

Kapazitäten für das eigentliche mathematische Argumentieren sowie das Arbeiten mit Tabellen, Graphen und verbalen Beschreibungen der funktionalen Zusammenhänge. Es geht hier primär darum Vorhersagen über den qualitativen Verlauf des Füllvolumen-Füllhöhe-Grafen bei verschiedenen Gefäßen zu machen und diese Vorhersagen inhaltlich zu begründen. Anschließend werden Messdaten aus virtuellen Füllvorgängen gewonnen und daraus selbständig Füllkurven erzeugt. Abweichungen von den eigenen Vorhersagen (Hypothesen) werden anschließend diskutiert und Argumentativ geklärt.

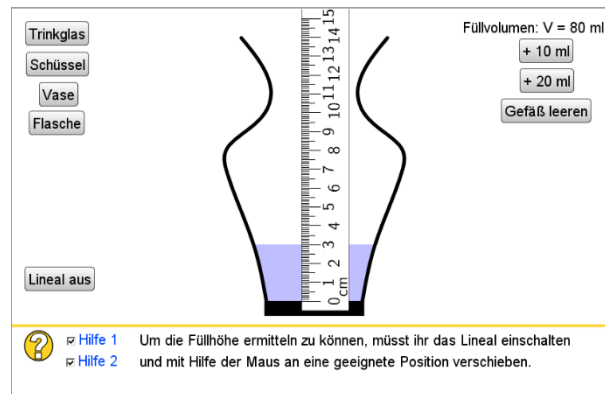


Abbildung 4: Füllhöhe von Gefäßen in Abhängigkeit von der eingefüllten Flüssigkeitsmenge

5 Schülerexperimente mit dem sonstigen Mathematikunterricht vernetzen

Wie bei allen schülerzentrierten Arbeitsformen ist auch bei Schülerexperimenten die Art der Vor- und Nachbereitung im restlichen Unterricht eine wesentliche Bedingung für den Lernerfolg (vgl. Ludwig & Oldenburg 2007, S. 10). Unter www.mathe-labor.de/stationen/aktivurlaub/ wird deshalb eine Handreichung für Lehrkräfte angeboten, die das benötigte Vorwissen und die intendierten Lernziele enthält. Darüber hinaus werden dort – im Abschnitt „Unterricht“ – passende Diagnoseaufgaben sowie Vorschläge und Materialien zum Weiterarbeiten im Unterricht zur Verfügung gestellt (vgl. **Abbildung 5**), mit denen die Aspekte Zuordnung, Kovariation und Sicht als Ganzes im Unterrichtsgespräch noch einmal qualitativ vertieft werden können.

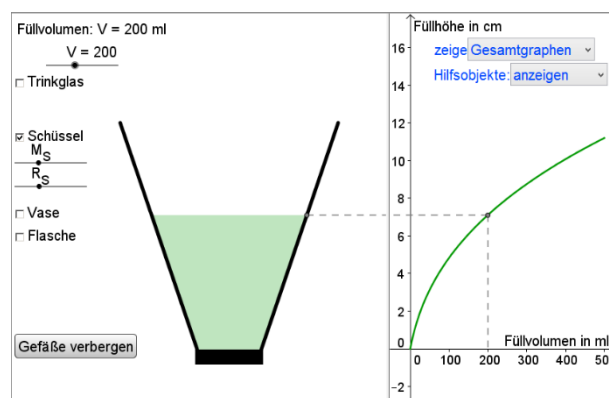


Abbildung 5: Simulation zum Weiterarbeiten im Unterricht

In seiner aktuellsten Veröffentlichung plädiert Vollrath (2014, S. 121) wieder dafür, dass der Mathematikunterricht den Schüler/innen die Gelegenheit und Anregungen bieten sollte, „Experimente zur Erforschung funktionaler Zusammenhänge durchzuführen“. Dem ist nichts hinzuzufügen, außer der Hoffnung, dass die vorhandenen Anregungen möglichst flächendeckend im Mathematikunterricht umgesetzt werden.

Literatur

- Affolter, W. (2005): Vom Experiment zum Graphen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 47/2, S. 8-12
 Barzel, B. (2009): Mathematik mit allen Sinnen erfahren – auch in der Sekundarstufe! In: Leuders, T. Hefendehl-Hebeker, L.; Weigand, H-G. (Hrsg.): *Mathemagische Momente*. Berlin: Cornelsen, 6-17
 Beckmann, A. (2007): Was verändert sich, wenn ... - Experimente zum Funktionsbegriff. *mathematik lehren*, 141, 44-51

Roth, Jürgen: Experimentieren mit realen Objekten, Videos und Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. Erscheint in: *Der Mathematikunterricht*, 60/6, 2014

- Blum, W. (2010): Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht – Herausforderung für Schüler und Lehrer. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 52/34, S. 42-48
- Brell, C.; Theyßen, H.; Schecker, H.; Schumacher, D. (2008): Computer vs. Realexperiment – empirische Ergebnisse zum Lernerfolg. In: Hötteke, D. (Hrsg.): *Kompetenzen, Kompetenzmodelle, Kompetenzentwicklung*. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Jahrestagung in Essen 2007, Berlin: LIT Verlag, 32-34
- Ganter, S. (2013): *Experimentieren – ein Weg zum funktionalen Denken. Empirische Untersuchung zur Wirkung von Schülerexperimenten*. Hamburg: Verlag Dr. Kovač
- Kircher, E.; Girwidz, R.; Häußler, R. (Hrsg.) (2009): *Physikdidaktik. Theorie und Praxis*. Heidelberg: Springer
- Lergenmüller, A.; Schmidt, G. (Hrsg., 2007): *Mathematik Neue Wege 7. Rheinland-Pfalz*. Braunschweig: Schroedel
- Lietzmann, W. (1912): Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner (Nachdruck: Paderborn: Ferdinand Schöningh 1985)
- Ludwig, M.; Oldenburg, R. (2007): Lernen durch Experimentieren – Handlungsorientierte Zugänge zur Mathematik. *mathematik lehren*, 141, 4-11
- Nydegger, A.; Krummenacher, R.; Affolter, W.; Beerli, G.; Hurschler, H.; Jaggi, B.; Jundt, W.; Wälti, B.; Wieland, G.; Wirth, M. (Hrsg. 2002): *Mathbu.ch 7*. Baar: Klett und Balmer Verlag, S. 6
- Philipp, K. (2013): *Experimentelles Denken – Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz*. Wiesbaden: Springer Spektrum
- Prenzel, M. & Parchmann, I. (2003). Kompetenz entwickeln: Vom naturwissenschaftlichen Arbeiten zum naturwissenschaftlichen Denken. *Unterricht Chemie*, 14, 15-19
- Roth, J. (2013): Mathematik-Labor "Mathe ist mehr" – Forschendes Lernen im Schülerlabor mit dem Mathematikunterricht vernetzen. *Der Mathematikunterricht*, 59/5, 12-20
- Tesch, M.; Duit, R. (2004): Experimentieren im Physikunterricht – Ergebnisse einer Videostudie. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 10, 51-69
- Vollrath, H.-J. (1978): Schülerversuche zum Funktionsbegriff. *Der Mathematikunterricht* 24/4, 90-101.
- Vollrath, H.-J. (1989): Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik* 10/1, 3-37
- Vollrath, H.-J. (2014): Funktionale Zusammenhänge. In: Linneweber-Lammerskitten, H. (Hrsg.): *Fachdidaktik Mathematik – Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II*. Seelze: Klett/Kallmeyer, 112-125
- Vollrath, H.-J., Roth, J. (2012): *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.