

Jürgen ROTH, Landau

## **Geometrie selbständig erarbeiten – Das Beispiel Strahlensätze**

Am Beispiel der Geometrie wird mathematisches Denken und Arbeiten für Schüler besonders gut erlebbar. Es kann gerade auch hier gut durch gegenständliche Modelle und Computersimulationen unterstützt werden. Im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ ([www.mathe-labor.de](http://www.mathe-labor.de)) der Universität Landau werden auf diese Weise Lehrplaninhalte selbständig erarbeitet.

### **1 Ziele von Lernumgebungen zur Geometrie**

Lernumgebungen sind auf das selbständige Arbeiten von Schülern abgestellt und ermöglichen entdeckendes Lernen. In Roth (2012b) werden darüber hinaus weitere wesentliche Aspekte von Lernumgebungen genannt. Gerade die Geometrie bietet sich für den Einsatz von Lernumgebungen an, weil hier u. a. sehr gut gestützt auf verschiedenste Medien wie etwa gegenständliche Modelle, computergestützte Simulationen, Filme und natürlich Papier und Bleistift gearbeitet werden kann. Anhand solcher Lernumgebungen sollen Schüler *Begriffe verstehen*, erleben, was *Mathematik treiben* bedeutet und *Vernetzungen erfahren*.

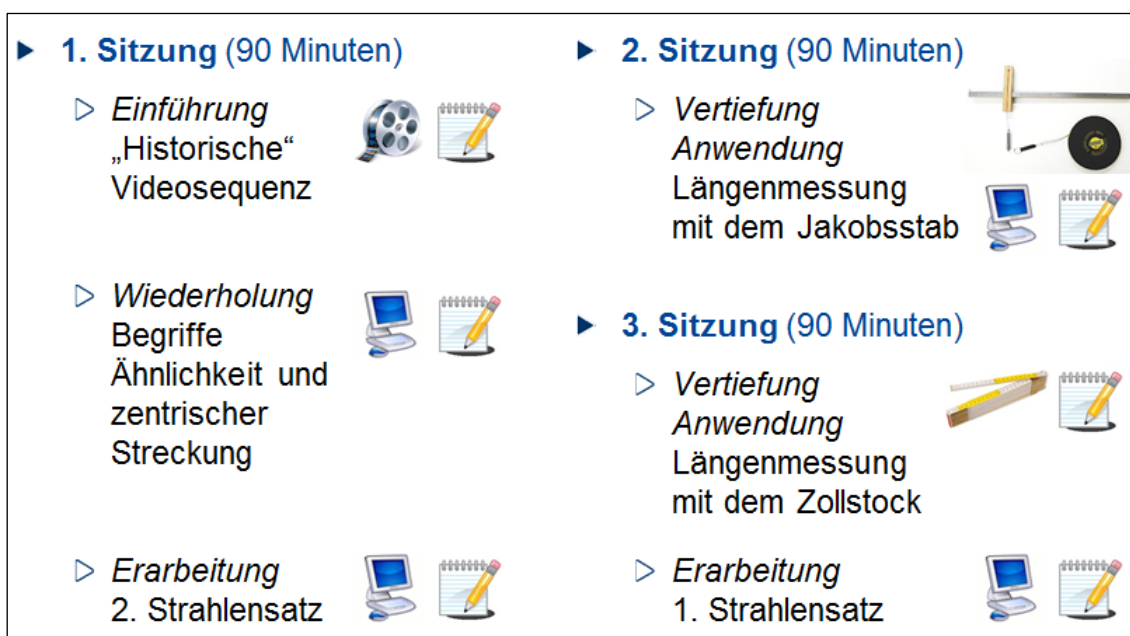
Das Verstehen von Begriffen lässt sich unterteilen in Voraussetzungen und sicheres Verstehen. Voraussetzungen zum Begriffsverständnis sind grundlegende Kenntnisse zu Eigenschaften und Beziehungen zu anderen Begriffen. Erst auf dieser Grundlage kann ein sicheres Begriffsverständnis erarbeitet werden, das sich durch folgende Fähigkeiten fassen lässt: Schülerinnen und Schüler können den *Begriff in neuen Situationen als relevant erfassen* sowie *für Problemlösungen und neue Erkenntnisse nutzen*. Genau diese Fähigkeiten des Begriffsverständnisses werden beim „Mathematik treiben“, also dem Lösen (mathematischer) Probleme und dem Erarbeiten neuer mathematischer Erkenntnisse benötigt. Dabei werden vom betrachteten Phänomen veranlasst, ganz automatisch verschiedene Lehrplaninhalte angewandt und damit vernetzt. Das so verstandene „Mathematik treiben“ kann im Rahmen von Lernumgebungen durch einen vernetzten Einsatz von verschiedensten Medien unterstützt werden.

### **2 Die Lernumgebung „Strahlensätze“**

Die vollständige Darstellung der Ausgestaltung der Lernumgebung „Strahlensätze“ im Rahmen des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ würde den Rahmen dieses Beitrags sprengen. Eine ausführlichere Darstellung findet man in Roth (2012a), sämtliche zugehörigen Materialien sind im Internet unter [www.mathe-labor.de/simulation/strahlensaetze/](http://www.mathe-labor.de/simulation/strahlensaetze/) abrufbar. Trotzdem

soll hier schlaglichtartig das Konzept der Laborstation „Strahlensätze“ vorgestellt werden.

An der Laborstation sollen sich die Schüler in Vierergruppen einen Lehrplaninhalt – hier die Strahlensätze – auf der Grundlage ihres im Unterricht bereitgestellten Vorwissens selbständig erarbeiten. Die Laborarbeit umfasst drei Doppelstunden á 90 Minuten und die Ergebnisse sollen anschließend im Unterricht angewendet und vertieft werden. Abbildung 1 gibt einen Überblick über die Lernumgebung und die jeweils eingesetzten Medien. Dazu gehören neben einem Film, gegenständlichen Modellen und Simulationen auch Arbeitshefte, die einerseits die Aufgabenstellungen enthalten und andererseits zur Protokollierung der Ergebnisse und Prozesse dienen. Daneben gibt es gestufte Hilfen die teilweise in Form eines Hilfehefts und teilweise innerhalb der Simulationen abhängig von der jeweils gewählten Zugangsweise bei Bedarf abrufbar sind.



**Abb. 1:** Struktur der Lernumgebung mit Piktogrammen zum Medieneinsatz

Die gesamte Lernumgebung wird getragen von der Idee der Messung von unzugänglichen Längen mit Hilfe eines Jakobsstabes. Aus diesem Grund beginnt die Laborarbeit auch mit einem eigens erstellten Video (vgl. Abb. 2), indem man einen mittelalterlichen Meister dabei beobachtet, wie er seinem Schüler rezeptartig die Messung der Höhe eines Turms mit Hilfe eines Jakobsstabes erläutert. Das Video endet mit der Frage des Schülers, wie man damit die Höhe des Turms bestimmen kann. Um diese Frage beantworten zu können, reaktivieren die Schüler ihr Wissen zur Ähnlichkeit von Dreiecken und zur zentrischen Streckung und erarbeiten sich auf dieser Grundlage die zur Messsituation passende Strahlensatzfigur selbständig.



Abb. 2: Filmausschnitt

Abb. 3: Strahlensatzkonfiguration selbständig erarbeiten ►

Ähnlichkeit — Zentrische Streckung

Verändert die beiden Dreiecke so, dass sie zueinander ähnlich sind und ihr die Längen  $q$ ,  $l$  und  $d$  sowie die gesuchte Höhe  $h$  als Seiten der Dreiecke wiederfindet.

In einer Simulation können sie wählen, ob sie mit ähnlichen Dreiecken oder der zentrische Streckung argumentieren wollen. Die jeweils in der Simulation angebotene Konfiguration muss auf die Messsituation aus dem Film hin angepasst werden (vgl. Abb. 3) und führt im Ergebnis zur Strahlensatzfigur. Anhand der ins Arbeitsheft übertragenen Konfiguration entwickeln die Schüler aus den bekannten Größen eine Verhältnisgleichung und bestimmen damit die Turmhöhe. Anschließend gewinnen sie die Erkenntnis, dass die durchgeführten Überlegungen für alle Figuren des Typs der Strahlensatzkonfigurationen gelten und formulieren den zweiten Strahlensatz.

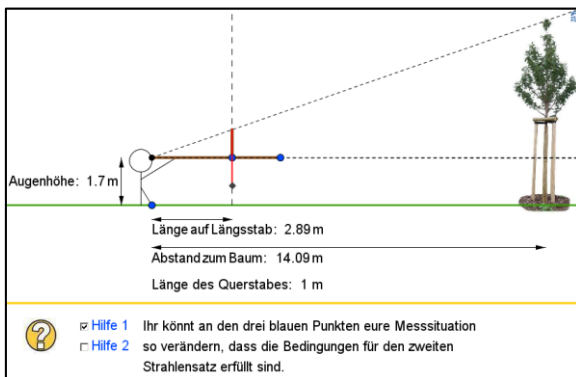


Abb. 3: Jakobsstabmessung vorbereiten

Abb. 3: Messen mit dem Jakobsstab ►



In der folgenden Doppelstunde werden die erworbenen Erkenntnisse genutzt um die Höhe eines Baums mit einem realen Jakobsstab zu bestimmen. Zur Vorbereitung dazu erarbeiten sich die Schüler die Handhabung des Jakobsstabs anhand einer Simulation (vgl. Abb. 3). Diese erleichtert auch das Herstellen der Beziehung zwischen dem Strahlensatz und der Messkonfiguration. Anschließend messen die Schüler mit dem Jakobsstab

die Höhe eines Baums und wenden dazu den zweiten Strahlensatz an. Diesen nutzen sie schließlich um mit einem Zollstock an Stelle des Jakobsstabs die Entfernung zu einem Gebäude zu messen. Dies ist Vertiefung und Praxisbezug zugleich.

### **3 Einbindung in den Mathematikunterricht**

Die Einbindung der Arbeit an außerschulischen Lernumgebungen, wie etwa im Rahmen des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“, in den Unterricht ist entscheidend für den Erfolg eines solchen Konzepts. Leider findet bisher eine Vor- und Nachbereitung des Besuchs von Lernlaboren im Unterricht kaum statt (vgl. Schmidt et al. 2011, S. 362). Aus diesem Grund wurde in der Untersuchung mit vier 9. Klassen einer Realschule, die die Laborstation im Klassenverband durchlaufen haben, viel Wert auf die Einbindung in den Unterricht gelegt. Die beteiligten Lehrkräfte erhielten Informationen darüber, welches Vorwissen die Schüler mitbringen sollten. Es gab einen Rückmeldebogen zu den Leistungen ihrer Schüler im Vor- und Nachtest mit detaillierten Angaben zu aufgetretenen Fehlern. Eine Zusammenfassung der erarbeiteten Inhalte und Konzepte wurde in Form eines Merkblatts an die Schüler und die Lehrkräfte zum Weiterarbeiten im Unterricht ausgeteilt. Darüber hinaus erhielten die Lehrkräfte Aufgabenvorschläge für eine durchzuführende Klassenarbeit. Trotzdem hat weder eine adäquate Vorbereitung stattgefunden (vgl. Dexheimer (2012) für erste Ergebnisse der Pilotstudie zur Lernumgebung „Strahlensätze“) noch wurde die Laborarbeit nach Aussage der Lehrkräfte im Unterricht nachgearbeitet. Hier scheint der Hauptgrund der empirischen Befunde zur in der Regel unbefriedigenden Lernwirksamkeit der Arbeit in Schülerlaboren zu liegen. Ein Schwerpunkt der Weiterentwicklung wird deshalb die Optimierung der Einbindung der Laborarbeit in den Unterricht sein, z. B. durch zielgerichtete Fortbildungen und Ergänzungen der Begleitmaterialien für die beteiligten Lehrkräfte.

### **Literatur**

- Dexheimer, M. (2012): Strahlensätze im Mathematik-Labor – Ergebnisse einer Pilotstudie. In: Kleine, M.; Ludwig, M. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Münster: WTM-Verlag.
- Roth, J. (2012a): Ähnlichkeit verstehen – Den Jakobsstab nutzen. In: Mathematik lehren, Heft 173, August 2012. (Im Internet verfügbar unter: [www.dms.uni-landau.de/roth/veroeffentlichungen/2012/roth\\_aehnlichkeit\\_verstehen\\_jakobsstab\\_nutzen.pdf](http://www.dms.uni-landau.de/roth/veroeffentlichungen/2012/roth_aehnlichkeit_verstehen_jakobsstab_nutzen.pdf))
- Roth, J. (2012b): Lernumgebungen zur Geometrie. In: Kleine, M.; Ludwig, M. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Münster: WTM-Verlag.
- Schmidt, I., Di Fuccia, D. S., Ralle, B. (2011): Außerschulische Lernstandorte – Erwartungen, Erfahrungen und Wirkungen aus der Sicht von Lehrkräften und Schulleitungen. In: MNU 64/6 (2011), 362-369