Geometrie

Homepage zur Veranstaltung: http://www.juergen-roth.de ► Lehre ► Geometrie

Inhaltsverzeichnis

Geometrie

Geometrie

Kapitel 4:
Elementare Anwendungen

Kapitel 4:
Elementare Anwendungen

Kapitel 4: Elementare Anwendungen

4.1 Winkelsätze und Dreiecke

Bemerkungen

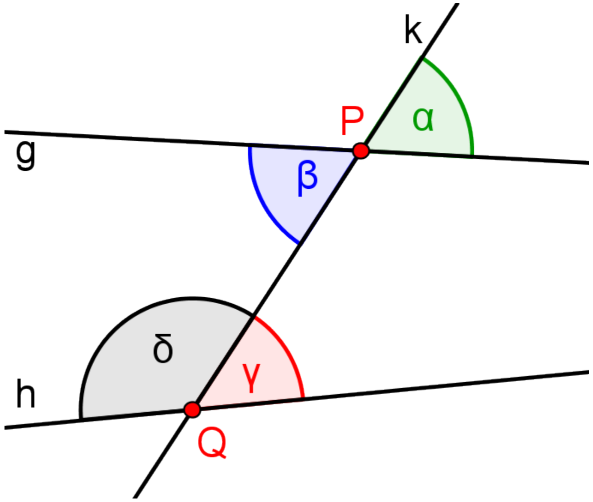
- Werden zwei Geraden *g* und *h* (die ***nicht*** parallel sein müssen) von einer dritten Geraden *k* in zwei verschiedenen Punkten *P* und *Q* geschnitten, dann entstehen acht höchstens stumpfe Winkel, die im Folgenden alle als positiv orientiert betrachtet werden.
- In der Figur gilt:

  β ist Scheitelwinkel von α.

  γ ist Stufenwinkel von α.

  γ ist Wechselwinkel von β.

  δ ist Nachbarwinkel von β.

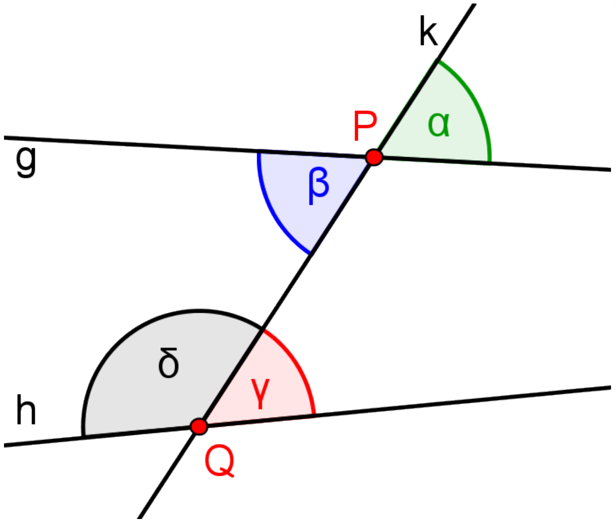


- Alle Relationen sind symmetrisch. Man kann deshalb z. B. davon sprechen, dass α und β Scheitelwinkel sind und meint damit, dass α Scheitelwinkel von β ***und*** β Scheitelwinkel von α ist.

Winkel an Geradenkreuzungen

Definition 4.1

Zwei Winkel heißen genau dann



- **Stufenwinkel**, wenn je ein Schenkel der beiden Winkel auf einer gemeinsamen Geraden *k* liegt, diese Schenkel *gleichorientiert* sind und die beiden anderen Schenkel bzgl. *k* in *derselben* Halbebene liegen.
- **Wechselwinkel**, wenn je ein Schenkel der beiden Winkel auf einer gemeinsamen Geraden *k* liegt, diese Schenkel *entgegengesetzt orientiert* sind und die beiden anderen Schenkel bzgl. *k* in *verschiedenen* Halbebenen liegen.
- **Nachbarwinkel**, wenn je ein Schenkel der beiden Winkel auf einer gemeinsamen Geraden *k* liegt, diese Schenkel *entgegengesetzt orientiert* sind und die beiden anderen Schenkel bzgl. *k* in *derselben* Halbebene liegen.

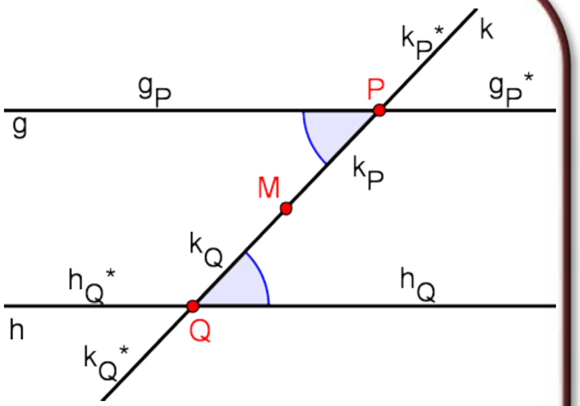
Satz 4.1

a) Scheitelwinkel sind kongruent

b) Wechselwinkel sind genau dann kongruent, wenn sie an parallelen Geraden liegen.

c) Stufenwinkel sind genau dann kongruent, wenn sie an parallelen Geraden liegen.

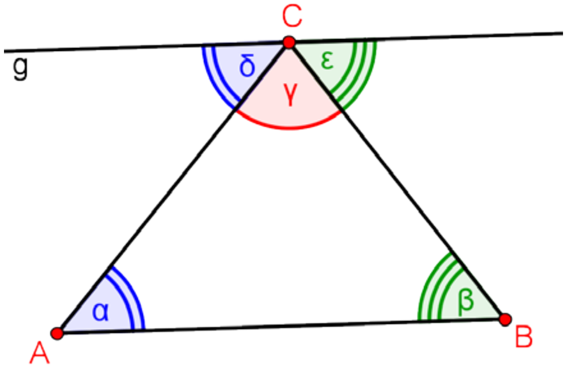
d) Die Winkelgrößen von Nachbarwinkeln ergänzen sich genau dann zu 180°, wenn sie an parallelen Geraden liegen.



- **Beweise:** Übungsaufgaben

Satz 4.2

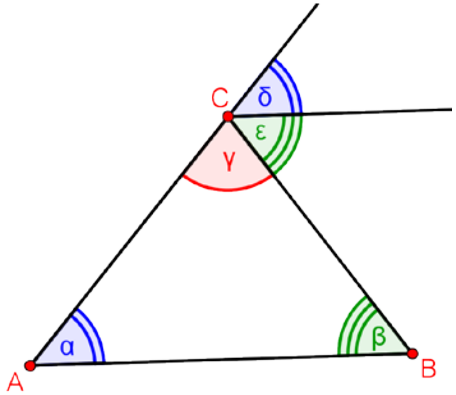
In jedem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkelgrößen 180°.



- **Beweis:** Übungsaufgabe

Satz 4.3: (Starker) Außenwinkelsatz

Die Größe eines Außenwinkels an einem Dreieck ist gleich der Summe der Winkelgrößen der nicht anliegenden Innenwinkel.



- **Beweis:** Übungsaufgabe

Definition 4.2

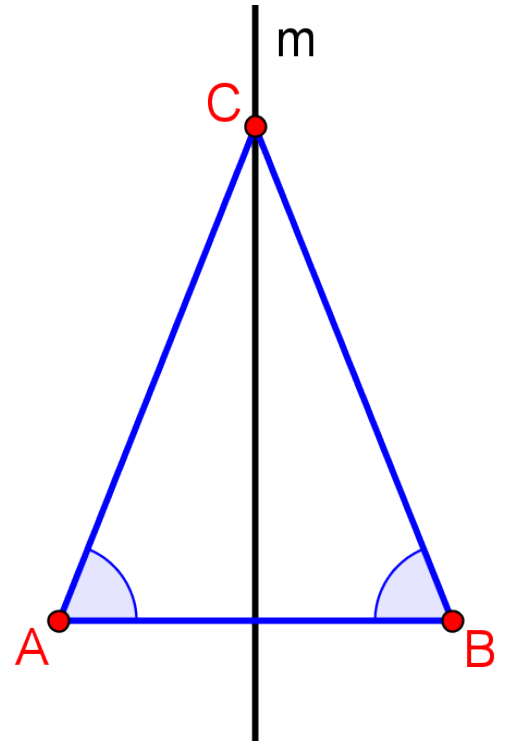
- Ein Dreieck heißt genau dann **gleichschenklig**, wenn es zwei zueinander kongruente Seiten besitzt.
- Die zueinander kongruenten Seiten werden **Schenkel**, die dritte Seite **Basis** und die anliegenden Winkel **Basiswinkel** genannt.

Satz 4.4: Eigenschaften gleichschenkliger Dreiecke

Jedes gleichschenklige Dreieck ist achsensymmetrisch und seine Basiswinkel sind kongruent.

Beweis zu Satz 4.4:

- Im Dreieck ABC gelte $[AC] \cong [BC]$.
- Nach Satz 1.13 liegt C damit auf der Mittelsenkreckten m der Seite $[AC]$.
- Damit folgt:
  $S_m(A) = B,\ S_m(B) = A$ und $S_m(C) = C$
- Da Geradenspiegelungen streckentreu sind, ergibt sich: $S_m(ABC) = ABC$
- Daraus folgt aber $S_m(\angle BAC) = \angle CBA.$
- Die Winkel $\angle BAC$ und $\angle CBA$ sind also kongruent. #



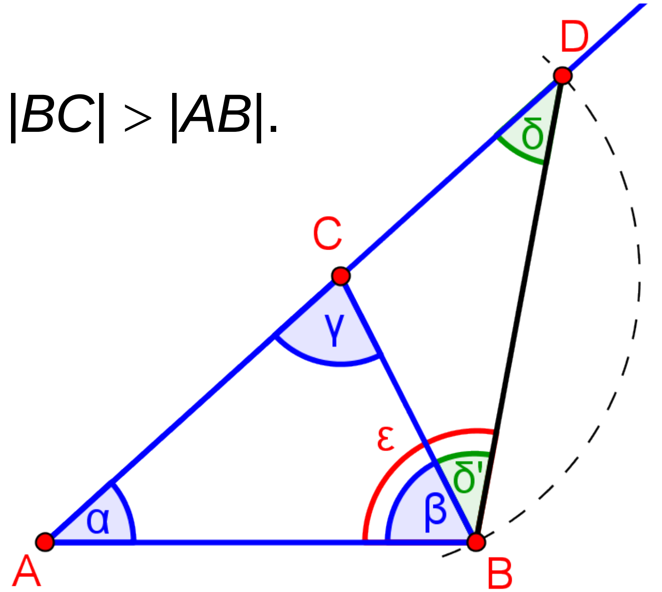
Bemerkung

- Es lässt sich zeigen, dass jedes Dreieck mit zwei kongruenten Innenwinkeln gleichschenklig ist.

Satz 4.5: Dreiecksungleichung

Die Summe der Längen zweier Dreiecksseiten ist immer größer als die Länge der dritten Seite.

Beweis



Zu zeigen: In einem Dreieck *ABC* gilt $|AC| + |BC| > |AB|$.

$D \in$ [AC mit *A-C-D* und $[CD] \cong [BC]$

$\Rightarrow$ Dreieck *BDC* ist gleichschenklig.

$\overset{\text{Satz 4.4}}{\Rightarrow}$ $\delta = \delta'$

$\Rightarrow$ $\varepsilon = \beta + \delta' > \delta' = \delta$

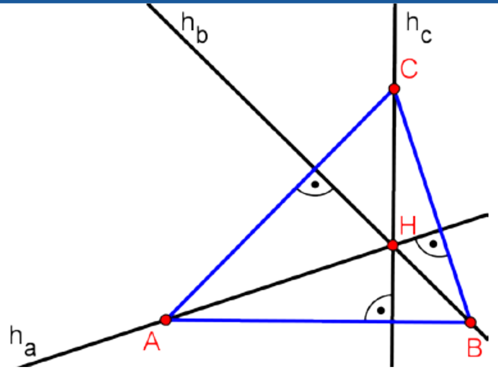
$\Rightarrow$ $\varepsilon > \delta$

$\overset{\text{Satz 2.24}}{\Rightarrow}$ Im Dreieck *ABD* liegt dem größeren Winkel die längere Seite gegenüber.

Es gilt also: $|AB| < |AD| = |AC| + |CD|$ #

Satz 4.6: Höhengeradenschnittpunkt im Dreieck

Die drei Höhengeraden h_A, h_B und h_C eines Dreiecks ABC schneiden sich in einem Punkt H.



Beweis

Punktspiegelung von ABC an $M_{[AB]}$, $M_{[BC]}$ und $M_{[AC]}$.

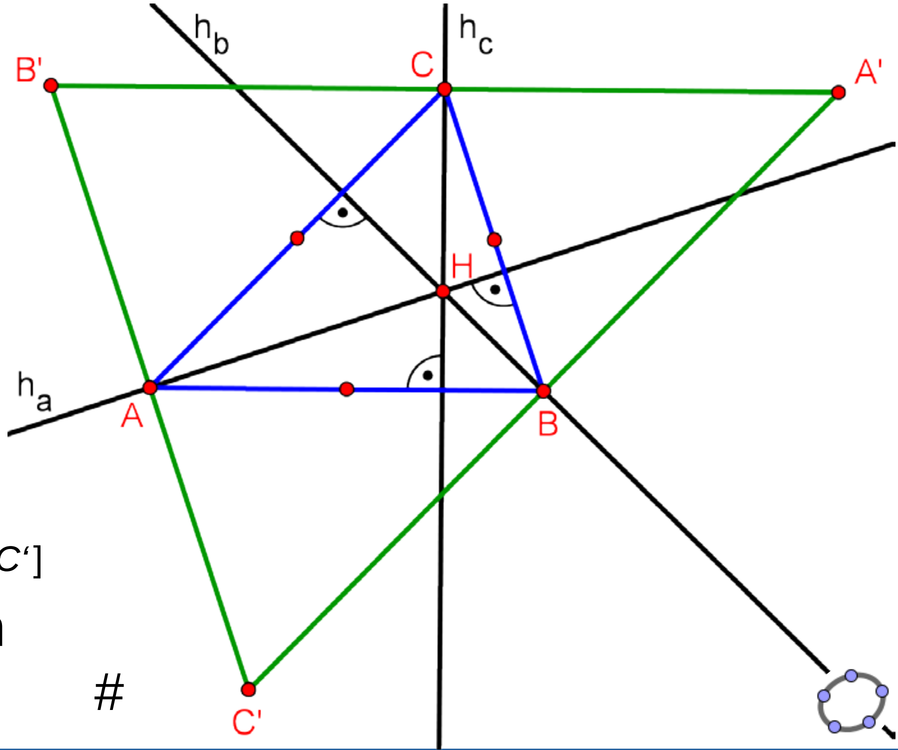
Satz 2.35b $\Rightarrow$ $[B'C] \cong [AB] \cong [CA']$ $\wedge$ $AB \parallel B'C$ $\wedge$ $AB \parallel CA'$

Satz 1.23 $\Rightarrow$ $AB \parallel A'B'$ $\wedge$ $C = M_{[A'B']}$

Satz 1.26 $\Rightarrow$ h_C ist die Mittelsenkrechte $m_{[A'B']}$ von $[A'B']$.

Analog folgt: $h_A = m_{[B'C']}$ $\wedge$ $h_B = m_{[A'C']}$

Satz 2.28 $\Rightarrow$ h_A, h_B und h_C schneiden sich im Umkreismittelpunkt von $A'B'C'$. #



Vgl. zum Thema Winkelhalbierende auch die Seiten 1.81 und 2.30 sowie den Beweis zu Satz 1.28 (3)!

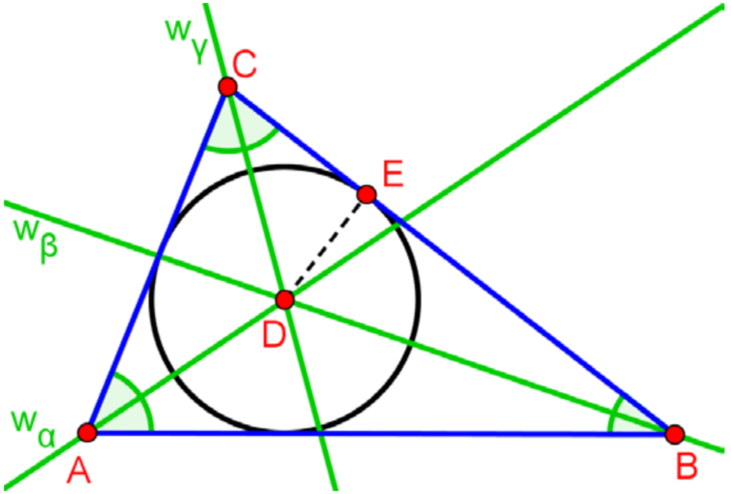
Definition 4.3

- Die **Winkelhalbierende** w_α eines Winkels $\alpha = \angle(g_S, h_S)$ enthält genau die Punkte, die von g_S und h_S denselben Abstand haben.
- Es gilt also: $w_\alpha = \{P \in \varepsilon \mid \mathrm{d}(P, g_S) = \mathrm{d}(P, h_S)\}$

Satz 4.7: Inkreismittelpunkt

Die drei Winkelhalbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.

Dieser Punkt hat von allen drei Dreiecksseiten denselben Abstand. Er ist der Mittelpunkt des Inkreises.



- **Beweis:** Übungsaufgabe

Kapitel 4: Elementare Anwendungen

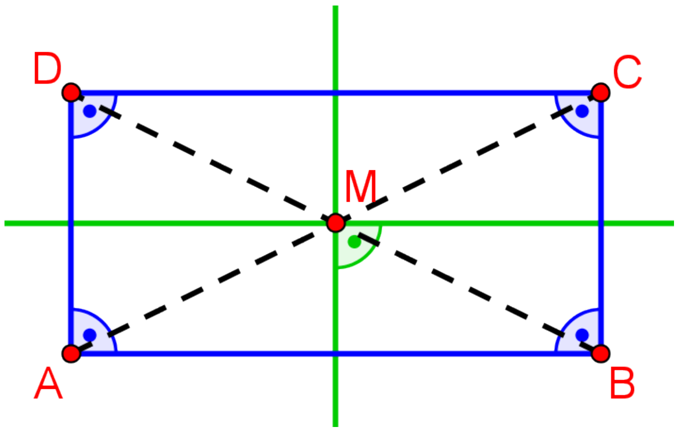
4.2 Vierecke

Satz 4.8: Eigenschaften des Rechtecks (vgl. Definition 1.21)

In jedem Rechteck gilt:

a) Gegenüberliegende Seiten sind kongruent und ihre Trägergeraden sind parallel zueinander.

b) Es gibt zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen, nämlich die Mittelsenkrechten benachbarter Rechteckseiten.



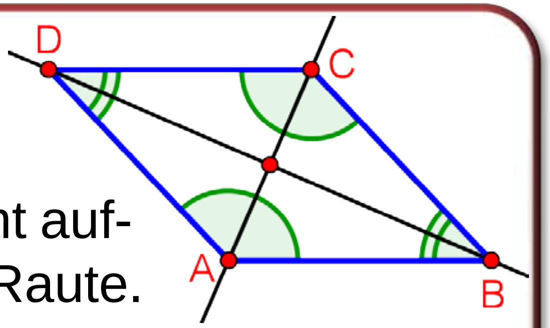
c) Die beiden Diagonalen sind kongruent, halbieren sich gegenseitig und schneiden sich im Schnittpunkt der Symmetrieachsen.

- **Beweis:** Übungsaufgaben

Definition 4.4

- Ein Viereck mit vier kongruenten Seiten heißt **Raute** (Rhombus).

Satz 4.9: Eigenschaften der Raute



In jeder Raute gilt:

a) Die beiden Diagonalgeraden stehen senkrecht aufeinander und sind die Symmetrieachsen der Raute.

b) Gegenüberliegende Winkel sind kongruent und die Diagonalgeraden sind die Winkelhalbierenden der Innenwinkel.

c) Jede Raute ist ein Parallelogramm.

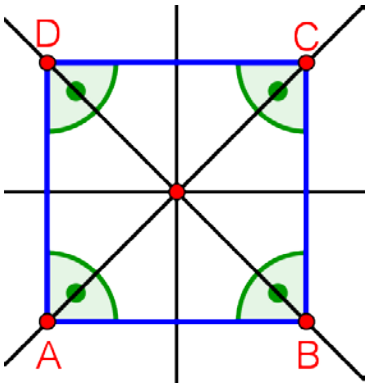
Beweisideen

a) Übungsaufgabe $\Rightarrow$ c)

b) Wegen a) wird jeder Innenwinkel durch Spiegelung an der Diagonalen, die nicht durch seinen Scheitel verläuft, auf seinen gegenüberliegenden Innenwinkel abgebildet. Nach Definition 2.4 sind gegenüberliegende Winkel in der Raute also kongruent.
Bei der Spiegelung an der Diagonalen die durch den Scheitel eines Innenwinkels verläuft, wird dieser auf sich selbst abgebildet. Also teilt diese Diagonale den entsprechenden Innenwinkel in zwei kongruente.

Definition 4.5

- Ein Viereck mit vier kongruenten Seiten und einem rechten Innenwinkel heißt **Quadrat**.



Bemerkung

- Ein Quadrat besitzt sogar vier rechte Innenwinkel.
- Das Quadrat vereint alle Eigenschaften einer Raute und eines Rechtecks.

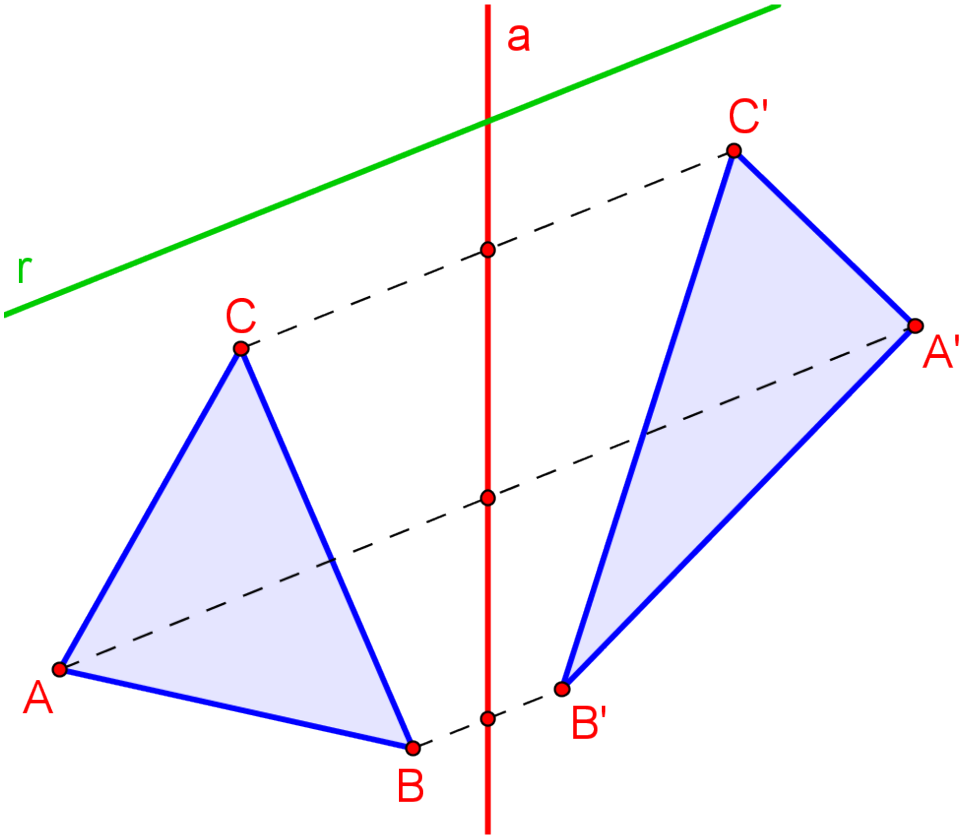
Definition 4.6

- Ein Viereck bei dem die Mittelsenkrechte einer Seite Symmetrieachse ist, heißt **symmetrisches Trapez**.
- Ein Viereck bei dem eine Diagonale Symmetrieachse ist, heißt **Drachen**(viereck).

Schrägspiegelung

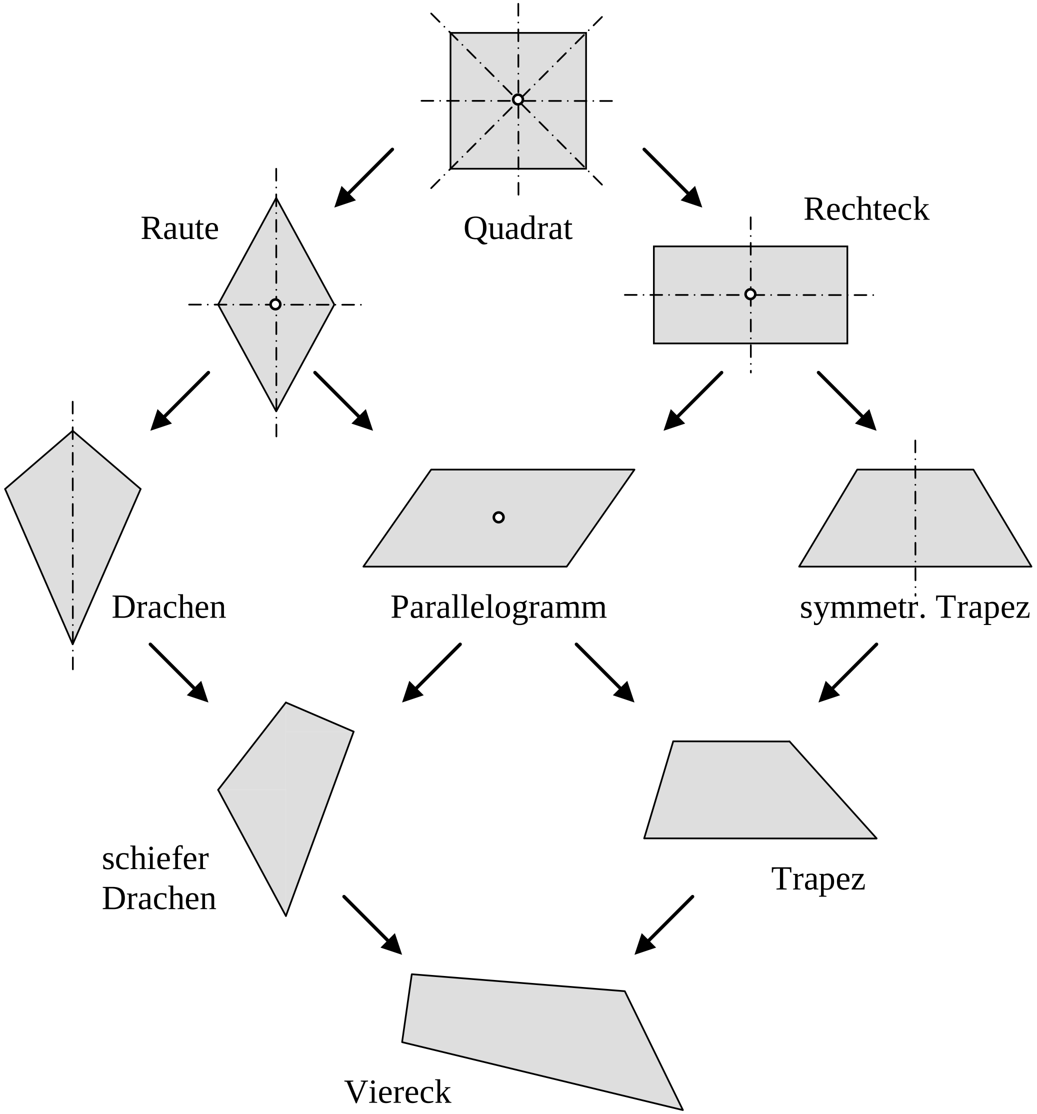
Definition 4.7

- Es ist eine Gerade *a* und eine Richtung *r* gegeben, mit $r \nparallel a$. Eine Abbildung der Ebene ε auf sich heißt genau dann **Schrägspiegelung**, wenn
  - die Gerade *a* Fixpunktgerade der Abbildung ist und
  - sie jedem Punkt $P \notin a$ den Bildpunkt *P'* so zuordnet, dass *a* die Strecke [*PP'*] halbiert und *PP'* || *r ist*.



- **Bemerkung**
  - Eine Schrägspiegelung ist keine Kongruenzabbildung, da sie ***nicht*** längentreu ist.

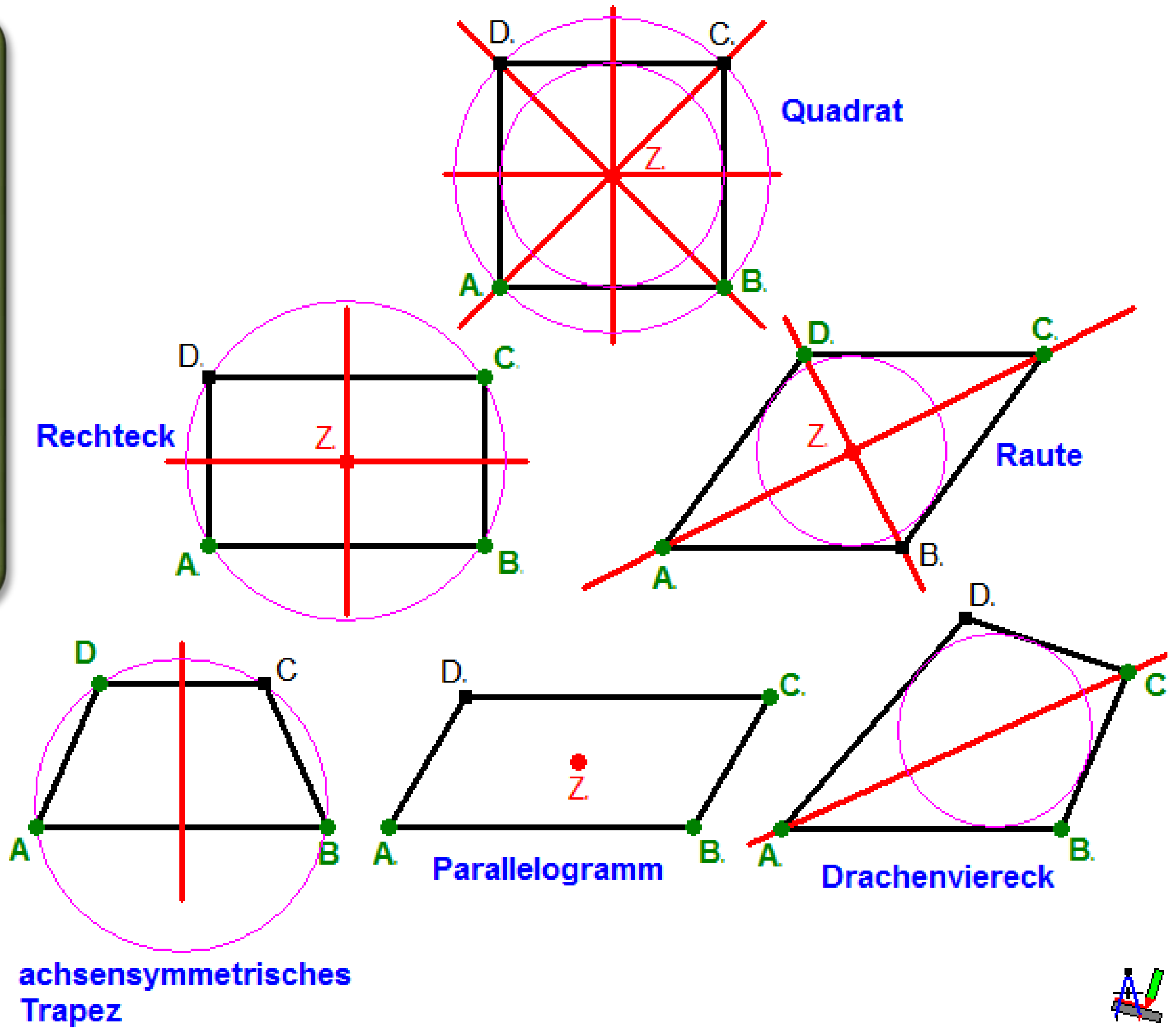
„Haus der Vierecke“



Definition 4.8

Ein Viereck heißt

- **Sehnenviereck**, wenn es einen Umkreis besitzt.
- **Tangentenviereck**, wenn es einen Inkreis besitzt.



Kapitel 4: Elementare Anwendungen

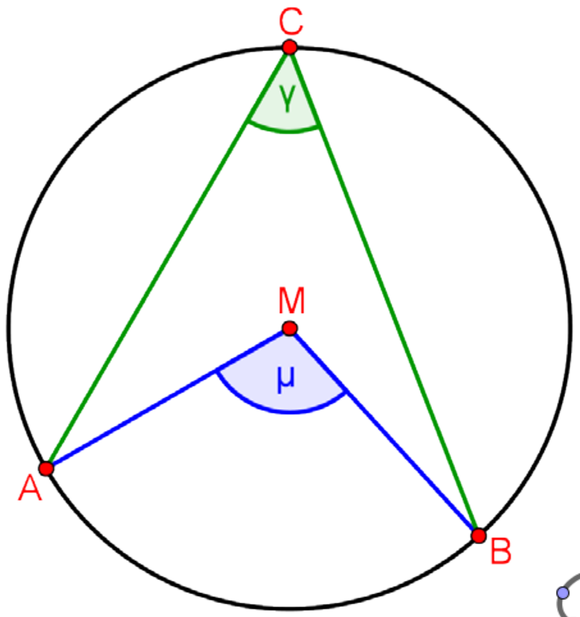
4.3 Winkel am Kreis

Definition 4.9

- Ein **Mittelpunktswinkel** (Zentriwinkel) eines Kreises $k(M, r)$ ist ein orientierter Winkel $\sphericalangle AMB$, wobei A und B Kreispunkte sind.
- Ein Winkel $\sphericalangle ACB$, der wie $\sphericalangle AMB$ orientiert ist und dessen Scheitel C auf dem Kreis liegt, heißt zugehöriger **Umfangs-winkel** (Peripheriewinkel).

Bemerkung

- Ein Umfangswinkel $\sphericalangle ACB$ wird in der Literatur auch „Umfangswinkel über dem Bogen *AB*“ oder „Umfangswinkel über der Sehne [*AB*]“ genannt.
- Diese Bezeichnungen sind nur eindeutig, wenn vorher Festlegungen über die Orientierung getroffen wurden.



Satz 4.10: Umfangswinkelsatz

Alle Umfangswinkel, die zu einem Mittelpunktswinkel über demselben Bogen gehören, sind kongruent und halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel.

Beweis

- $\sphericalangle ACB$ Umfangswinkel, $\gamma = |\sphericalangle ACB|$
- $\sphericalangle AMB$ Mittelpunktswinkel, $\mu = |\sphericalangle AMB|$
- $g = m_{[AC]} \wedge h = m_{[BC]}$

Satz 2.28

$$\Rightarrow \quad g \cap h = \{M\}$$

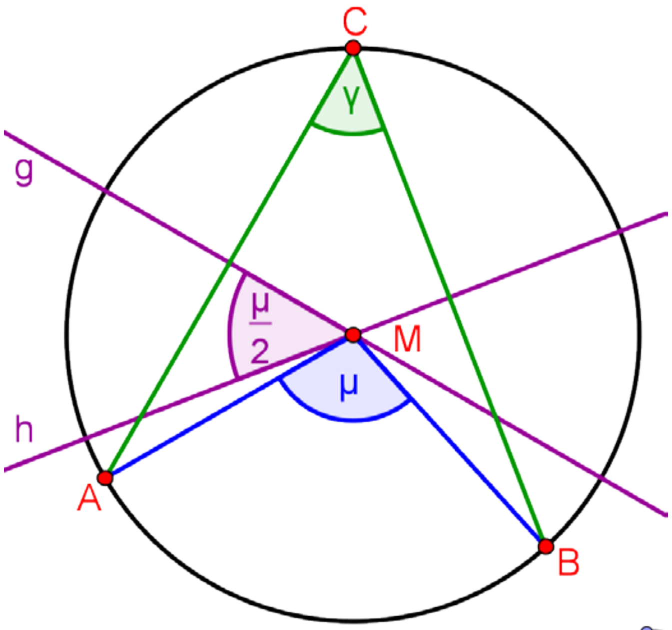
$$\Rightarrow \quad S_g(A) = C \wedge S_h(C) = B$$

$$\Rightarrow \quad (S_h \circ S_g)(A) = S_h(S_g(A)) = S_h(C) = B$$

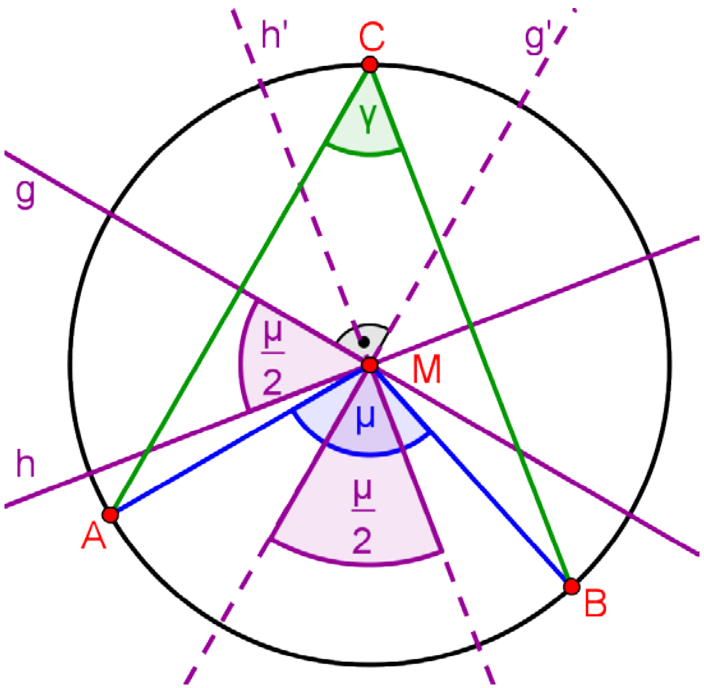
Satz 2.40a

$$\Rightarrow \quad S_h \circ S_g = D_{M,\mu} \wedge \mu = 2 \cdot |\sphericalangle(g, h)|$$

$$\Rightarrow \quad |\sphericalangle(g, h)| = \mu/2$$



Beweis zu Satz 4.10 (Fortsetzung)



- $D_{M,\,90°}(\sphericalangle(g, h)) = \sphericalangle(g', h')$ (*)

$\overset{\text{Satz 2.41a}}{\Rightarrow}$ $|\sphericalangle(g', h')| = |\sphericalangle(g, h)| = \mu/2$

Aus $g = m_{[AC]}$ folgt: $g \perp AC$

Aus (*) folgt: $g \perp g'$

$\overset{\text{Satz 1.22}}{\Rightarrow}$ $g' \parallel AC$ (°)

Aus $h = m_{[BC]}$ folgt: $h \perp BC$

Aus (*) folgt: $h \perp h'$

$\overset{\text{Satz 1.22}}{\Rightarrow}$ $h' \parallel BC$ (°°)

$\overset{\text{(°), (°°), Satz 2.46b}}{\Rightarrow}$ $T_{\overrightarrow{MC}}(\sphericalangle(g', h')) = \sphericalangle ACB$

$\overset{\text{Satz 2.46a}}{\Rightarrow}$ $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle(g', h')| = |\sphericalangle(g, h)| = \mu/2 = |\sphericalangle AMB|/2$

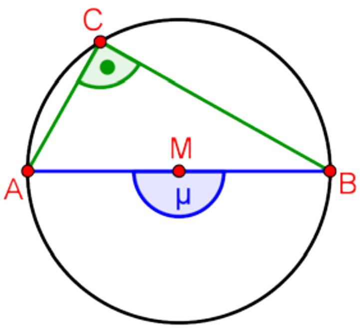
Da jeder Umfangswinkel die Winkelgröße $|\sphericalangle AMB|/2$ besitzt, sind alle zum Mittelpunktswinkel $\sphericalangle AMB$ gehörenden Umfangswinkel kongruent. #

Satz des Thales

- **Bemerkung**
  - Beträgt der Mittelpunktswinkel 180°, handelt es sich also um einen gestreckten Winkel, dann ist die zugehörige Sehne ein Durchmesser des Kreises und der zugehörige Kreisbogen ein Halbkreis.
  - Dieser Spezialfall des Umfangswinkelsatzes wird nach Thales von Milet (ca. 600 v. Chr.) Satz des Thales genannt.

Satz 4.11: Satz des Thales

Jeder Umfangswinkel über einem Halbkreis (d. h. über einem Durchmesser als Sehne) ist ein rechter Winkel.



- **Bemerkung**
  - Man kann den Satz des Thales umkehren. Die Umkehrung lautet:
  - Bei rechtwinkligen Dreiecken liegt der Umkreismittelpunkt auf der Hypotenuse.

Kapitel 4: Elementare Anwendungen

4.4 Symmetrie – Abbildungsgruppen

Symmetrie?

Definition 4.10

- Eine Kongruenzabbildung φ, die eine Figur F mit sich selbst zur Deckung bringt, für die also gilt $\varphi(F) = F$, heißt **Deckabbildung** von F.
- Eine Figur heißt genau dann **symmetrisch**, wenn sie mindestens eine von der Identität verschiedene Deckabbildung besitzt.
- Ist unter den Deckabbildungen der Figur mindestens eine
  - Achsenspiegelung, dann heißt sie **achsensymmetrisch**.
  - Punktspiegelung, dann heißt sie **punktsymmetrisch**.
  - von der Identität verschiedene Drehung, dann heißt sie **drehsymmetrisch**.
  - von der Identität verschiedene Verschiebung, dann heißt sie **verschiebungssymmetrisch** (schubsymmetrisch).
  - Schubspiegelung, dann heißt sie **schubspiegelsymmetrisch**.

Bemerkungen

- Die Identität ist eine Deckabbildung, dies reicht aber nicht, um von Symmetrie sprechen zu können, weil sonst ***jede*** Figur symmetrisch wäre.
- Verschiedene Arten von Symmetrien können bei einer Figur mehrfach und in Kombination miteinander auftreten.
- Ein Rechteck besitzt z. B. immer zwei Symmetrieachsen. Man nennt es deshalb ***zweifach*** achsensymmetrisch. Es ist zusätzlich noch punktsymmetrisch.
- Bei der Dreh- und der Verschiebungssymmetrie ist jeweils die Besonderheit zu beachten, dass die Identität eine spezielle Drehung, die Nulldrehung, und eine spezielle Verschiebung, die Nullverschiebung ist.
- Ist eine Figur drehsymmetrisch, gibt es also außer der Identität noch mindestens eine weitere Drehung als Deckabbildung, dann wird die Identität bei der Zahl der Deckabbildungen der Figur mitgezählt.
- Ein Rechteck ist also z. B. zweifach drehsymmetrisch, auch wenn eine der als Deckabbildungen vorkommenden Drehungen die Identität ist.

Satz 4.12: Deckabbildungsgruppe

Die Menge der Deckabbildungen einer Figur,
bildet bezüglich der Verkettung eine Gruppe.

- **Beweis**
  - Nach Satz 2.6 bildet die Menge aller Kongruenzabbildungen einer Ebene auf sich zusammen mit der Verkettung eine Gruppe.
  - Zu zeigen ist: Die Deckabbildungen einer Figur *F* bilden eine Untergruppe der Gruppe der Kongruenzabbildungen. (vgl. Satz 2.7)
  - *Abgeschlossenheit:*

    $$\varphi_1(F) = F \quad \wedge \quad \varphi_2(F) = F \quad \Rightarrow \quad (\varphi_2 \circ \varphi_1)(F) = \varphi_2(\varphi_1(F)) = \varphi_2(F) = F$$

    Also ist $\varphi_2 \circ \varphi_1$ eine Deckabbildung von *F*.
  - *Inverseneigenschaft:*

    $$\varphi(F) = F \quad \Rightarrow \quad F = id_{\varepsilon}(F) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(F) = \varphi^{-1}(\varphi(F)) = \varphi^{-1}(F)$$

    Also ist φ^{-1} eine Deckabbildung von *F*. #

Deckabbildungsgruppe

- **Bemerkung**
  - Da die Verkettung zweier gleichsinniger Abbildungen und die inverse Abbildung einer gleichsinnigen Abbildung wieder gleichsinnig sind, bilden die gleichsinnigen Deckabbildungen einer Figur *F* eine Untergruppe der Deckabbildungsgruppe von *F*:

Satz 4.13: Gruppe der gleichsinnigen Deckabbildungen

Die Menge der gleichsinnigen Deckabbildungen einer Figur, bildet bezüglich der Verkettung eine Gruppe.

- **Bemerkung**
  - Da die Verkettung zweier ungleichsinniger Abbildungen eine gleichsinnige Abbildung ergibt, bilden die ungleichsinnigen Deckabbildungen einer Figur *F* ***keine*** Untergruppe der Deckabbildungsgruppe von *F*.

Bemerkung

- Zum Nachweis der Eigenschaften von Verkettungen von Kongruenzabbildungen gibt es prinzipiell zwei Wege:
  (1) Aus bereits bekannten Eigenschaften der einzelnen Abbildungen wird auf Eigenschaften der Verkettung geschlossen.
  (2) Die einzelnen Abbildungen werden geeignet in Geraden-spiegelungen (oder andere Abbildungen) „zerlegt“ und so die Verkettung vereinfacht.
- Der erste Weg geht meist schneller, der zweite hat den Vorteil, dass er fasst algorithmisch abgearbeitet werden kann und in der Regel Zusatzinformationen liefert (z. B. Lage des Drehpunkts, Länge und / oder Richtung eines Verschiebungsvektors, …).
- Anhand des Satzes 4.14 werden exemplarisch beide Beweiswege einander gegenübergestellt.

Satz 4.14: Verkettung von drei Punktspiegelungen

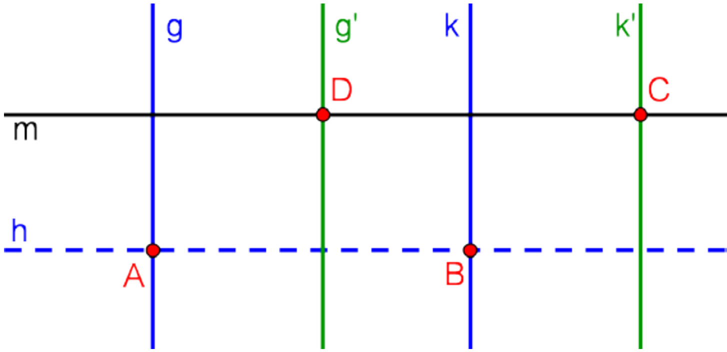
Die Verkettung von drei Punktspiegelungen
ist eine Punktspiegelung.

- **1. Beweis**
  - Nur Punktspiegelungen bilden Geraden auf parallele Geraden mit entgegengesetzter Orientierung ab.
  - Bei der Verkettung dreier Punktspiegelungen muss das Bild einer Geraden *g* zu *g* parallel und entgegengesetzt orientiert sein. (Die Orientierung wird dreimal umgekehrt!)
  - Folglich ist die Verkettung dreier Punktspiegelungen eine Punktspiegelung.

#

Verkettung von drei Punktspiegelungen

2. Beweis von Satz 4.14



- P_A, P_B und P_C sind Punktspiegelungen an beliebigen Punkten $A, B, C \in \varepsilon$.
- Nach Satz 2.30b gilt:

  $P_A = S_h \circ S_g \wedge P_B = S_k \circ S_h$

  mit $\quad h = AB \;\wedge\; g \perp h \;\wedge\; k \perp h \quad \left(\overset{\text{Satz 1.22}}{\Rightarrow} g \parallel k \right)$

  $\Rightarrow \quad P_B \circ P_A = S_k \circ S_h \circ S_h \circ S_g = S_k \circ S_g$

  $\overset{\text{Sätze 2.44/2.45}}{\Rightarrow} \quad P_B \circ P_A = S_k \circ S_g = S_{k'} \circ S_{g'} \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{(g', k')} = \overrightarrow{(g, k)} \;\wedge\; C \in k'$
- Nach Satz 2.30b gilt:

  $P_C = S_m \circ S_{k'} \quad \text{mit} \quad m \perp k' \; \left(\overset{\text{Satz 1.26}}{\Rightarrow} m \perp g' \right) \;\wedge\; \{D\} = m \cap g'$

  $\Rightarrow \quad P_C \circ P_B \circ P_A = S_m \circ S_{k'} \circ S_{k'} \circ S_{g'} = S_m \circ S_{g'} \overset{\text{Satz 2.30a}}{=} P_D \qquad \#$

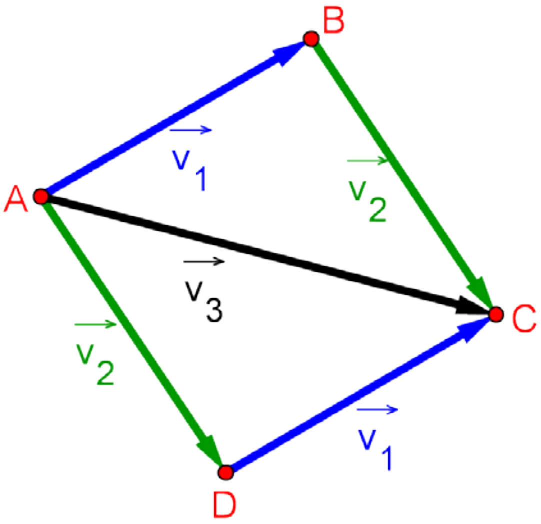
Bemerkung

- Wegen $m \parallel h$ (folgt mit Satz 1.22 und 1.26) und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{(g, k)}$ bilden die vier Punkte A, B, C und D die Eckpunkte eines Parallelogramms oder sind kollinear (falls A, B und C kollinear sind).

Verkettung von Verschiebungen

Definition 4.11

- Die Summe zweier Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ ist der Vektor $\overrightarrow{AC}$.



Bemerkung

- Die Vektoraddition ist kommutativ. Da jede Verschiebung eindeutig durch einen Vektor charakterisiert ist, ist auch die Verkettung von Verschiebungen kommutativ und wieder eine Verschiebung.
- Die zu einer Verschiebung $T_{\vec{v}}$ inverse Abbildung ist die Verschiebung mit dem Gegenvektor $-\vec{v}$ von $\vec{v}$ als Verschiebungsvektor.
- Insgesamt folgt:

Satz 4.15: Kommutative Gruppe der Verschiebungen

Die Menge der Verschiebungen bildet bezüglich der Verkettung eine kommutative Gruppe.

Definition 4.12: Vervielfachung von Vektoren

- Der Vektor $m \cdot \vec{v}$ hat für $m \in \mathbb{R}^+$ die m-fache Länge und dieselbe Richtung wie $\vec{v}$.
- Der Vektor $(-m) \cdot \vec{v}$ hat für $m \in \mathbb{R}^+$ die m-fache Länge und die zu $\vec{v}$ entgegengesetzte Richtung.

  Damit gilt: $(-m) \cdot \vec{v} = m \cdot (-\vec{v}) = -(m \cdot \vec{v})$

Bemerkung

- Aus Definition 4.11 und 4.12 lassen sich folgende Rechengesetzte für Vektoren $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sowie reelle Zahlen m und n herleiten:
- **Assoziativgesetz:** $m \cdot (n \cdot \vec{v}) = (m \cdot n) \cdot \vec{v}$
- **1. Distributivgesetz:** $(m + n) \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{v} + n \cdot \vec{v}$
- **2. Distributivgesetz:** $n \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = n \cdot \vec{v}_1 + n \cdot \vec{v}_2$

Satz 4.16: Gruppe der Punktspiegelungen und Verschiebungen

Die Menge der Punktspiegelungen und Verschiebungen bildet bezüglich der Verkettung eine *nicht*-kommutative Gruppe.

- **Beweis:** Übungsaufgabe

Satz 4.17: Verkettung von Drehungen um dasselbe Zentrum

Die Verkettung zweier Drehungen $D_{Z,\alpha}$ und $D_{Z,\beta}$ um dasselbe Zentrum Z ist eine Drehung um Z mit dem Drehwinkel $\alpha+\beta$.

Kurz: $D_{Z,\beta} \circ D_{Z,\alpha} = D_{Z,\alpha+\beta}$

Satz 4.18: Gruppe der Drehungen um ein festes Zentrum

Die Menge der Drehungen um ein festes Zentrum Z bildet bezüglich der Verkettung eine kommutative Gruppe.

- **Beweise:** Übungsaufgaben

Satz 4.19: Verkettung von Drehungen mit verschiedenen Zentren

Die Verkettung zweier Drehungen mit verschiedenen Drehpunkten und den Drehwinkeln α und β

- ist eine Verschiebung, wenn $\alpha + \beta = 360°$,
- ist eine Drehung mit dem Drehwinkel $\alpha + \beta$ um einen neuen Drehpunkt, wenn $\alpha + \beta \neq 360°$.

Satz 4.20: Gruppe der Drehungen und Spiegelungen

Die Menge der Drehungen um ein festes Zentrum Z und aller Spiegelungen an Geraden durch Z bildet bezüglich der Verkettung eine *nicht*-kommutative Gruppe.

Bemerkung

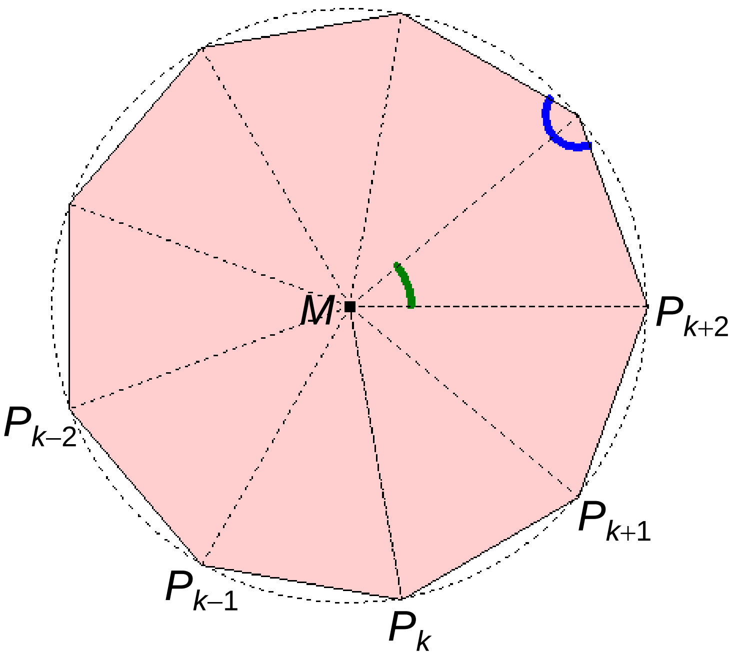
- Die Abbildungen aus Satz 4.20 haben mit Z genau einen Fixpunkt. Die Menge dieser Abbildungen bildet die Menge aller Deckabbildungen von Z und gleichzeitig die Menge aller Deckabbildungen jedes Kreises um Z.

Definition 4.13

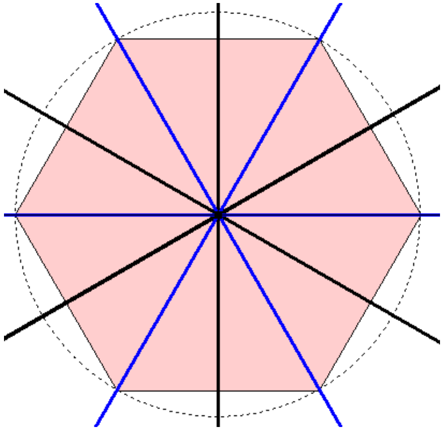
- Ein einfach zusammenhängendes Polygon heißt genau dann **reguläres** (regelmäßiges) ***n*-Eck**, wenn alle Seiten und alle Innenwinkel untereinander kongruent sind.

Bemerkungen

- Die einfachsten Beispiele für reguläre *n*-Ecke sind gleichseitige Dreiecke und Quadrate.
- Innenwinkel kongruent ⇒ halbe Innenwinkel kongruent ⇒ Das *n*-Eck lässt sich aus gleichschenkligen und untereinander kongruenten Dreiecken zusammensetzen.
- Da alle Strecken $[P_k M]$ untereinander kongruent sind, liegen die Eckpunkte P_k eines regulären *n*-Ecks auf einem Kreis.



Deckabbildungen des regulären Sechsecks F_6



- **Deckdrehungen** des regulären Sechsecks:

$$\boxed{Z_6 = (\{id_\varepsilon, D_{M,\,60°}, D_{M,\,120°}, D_{M,\,180°}, D_{M,\,240°}, D_{M,\,300°}\}, \circ)}$$

Mit $d := D_{M,\,60°}$

und $d^2 := d \circ d = D_{M,\,60°} \circ D_{M,\,60°} = D_{M,\,120°}$

ergibt sich: $d = D_{M,\,60°},\ d^2 = D_{M,\,120°},\ d^3 = D_{M,\,180°},$

$d^4 = D_{M,\,240°},\ d^5 = D_{M,\,300°},\ d^6 = D_{M,\,360°} = id_\varepsilon$

- **Deckspiegelungen** des regulären Sechsecks

Aus $s := S_a$ mit $S_a(F_6) = F_6$ und $d \circ s := ds$ *folgt*:

$s,\ ds,\ d^2s,\ d^3s,\ d^4s,\ d^5s$

- **Alle Deckabbildungen** des regulären Sechsecks F_6:

$$\boxed{D_6 = (\{\underbrace{id_\varepsilon, d, d^2, d^3, d^4, d^5}_{\text{Zyklische Untergruppe } Z_6}, s, ds, d^2s, d^3s, d^4s, d^5s\}, \circ)}$$

Diedergruppe D_6

Verknüpfungstafel D_6

Bemerkung
Es gilt:
$d^k s = s d^{n-k}$

Beweis
$d^k s$ ist eine Achsenspiegelung (ungleichsinnig).
$(d^k s)^{-1} = d^k s$

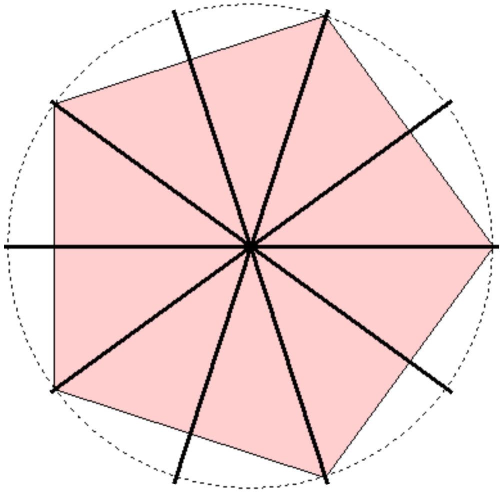
Mit
$(d^k)^{-1} = d^{n-k}$
gilt aber auch:
$(d^k s)^{-1}$
$= s^{-1}(d^k)^{-1}$
$= s(d^k)^{-1}$
$= s d^{n-k}$

#

Z_6

$\circ$	id	d	d^2	d^3	d^4	d^5	s	ds	d^2s	d^3s	d^4s	d^5s
id	id	d	d^2	d^3	d^4	d^5	s	ds	d^2s	d^3s	d^4s	d^5s
d	d	d^2	d^3	d^4	d^5	id	ds	d^2s	d^3s	d^4s	d^5s	s
d^2	d^2	d^3	d^4	d^5	id	d	d^2s	d^3s	d^4s	d^5s	s	ds
d^3	d^3	d^4	d^5	id	d	d^2	d^3s	d^4s	d^5s	s	ds	d^2s
d^4	d^4	d^5	id	d	d^2	d^3	d^4s	d^5s	s	ds	d^2s	d^3s
d^5	d^5	id	d	d^2	d^3	d^4	d^5s	s	ds	d^2s	d^3s	d^4s
s	s	d^5s	d^4s	d^3s	d^2s	ds	id	d^5	d^4	d^3	d^2	d
ds	ds	s	d^5s	d^4s	d^3s	d^2s	d	id	d^5	d^4	d^3	d^2
d^2s	d^2s	ds	s	d^5s	d^4s	d^3s	d^2	d	id	d^5	d^4	d^3
d^3s	d^3s	d^2s	ds	s	d^5s	d^4s	d^3	d^2	d	id	d^5	d^4
d^4s	d^4s	d^3s	d^2s	ds	s	d^5s	d^4	d^3	d^2	d	id	d^5
d^5s	d^5s	d^4s	d^3s	d^2s	ds	s	d^5	d^4	d^3	d^2	d	id

Verknüpfungstafel D_5



$d := D_{M,\,72°}$

$s := S_a \quad \text{mit} \quad S_a(F_5) = F_5$

Deckabbildungen von F_5:

$id_\varepsilon, d, d^2, d^3, d^4, s, ds, d^2s, d^3s, d^4s$

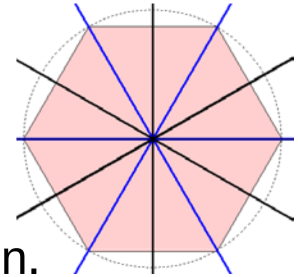
Z_5

$\circ$	id	d	d^2	d^3	d^4	s	ds	d^2s	d^3s	d^4s
id	id	d	d^2	d^3	d^4	s	ds	d^2s	d^3s	d^4s
d	d	d^2	d^3	d^4	id	ds	d^2s	d^3s	d^4s	s
d^2	d^2	d^3	d^4	id	d	d^2s	d^3s	d^4s	s	ds
d^3	d^3	d^4	id	d	d	d^3s	d^4s	s	ds	d^2s
d^4	d^4	id	d	d	d^2	d^4s	s	ds	d^2s	d^3s
s	s	d^4s	d^3s	d^2s	ds	id	d^4	d^3	d^2	d
ds	ds	s	d^4s	d^3s	d^2s	d	id	d^4	d^3	d^2
d^2s	d^2s	ds	s	d^4s	d^3s	d^2	d	id	d^4	d^3
d^3s	d^3s	d^2s	ds	s	d^4s	d^3	d^2	d	id	d^4
d^4s	d^4s	d^3s	d^2s	ds	s	d^4	d^3	d^2	d	id

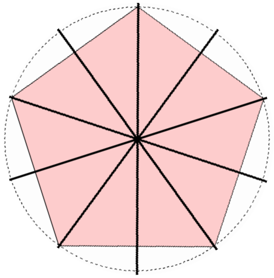
$\mathbf{D_5} = (\{id_\varepsilon, d, d^2, d^3, d^4, s, ds, d^2s, d^3s, d^4s\}, \circ)$

Bemerkung

- Bei regulären *n*-Ecken mit geradzahligem *n* treten zwei Arten von Symmetrieachsen auf:
  - *n*/2 Symmetrieachsen durch gegenüberliegende Eckpunkte,
  - *n*/2 Symmetrieachsen durch gegenüberliegende Seitenmitten.



- Bei regulären *n*-Ecken mit ungeradzahligem *n* gibt es nur eine Art von Symmetrieachsen:
  - Alle *n* Symmetrieachsen verlaufen durch einen Eckpunkt und die gegenüberliegende Seitenmitte.



Satz 4.21: Deckabbildungen des regulären *n*-Ecks mit Mittelpunkt M

Jedes reguläre *n*-Eck ist *n*-fach drehsymmetrisch und *n*-fach achsensymmetrisch. Es gibt genau *n* Deckdrehungen um *M* mit den Drehwinkeln $k \cdot \alpha = k/n \cdot 360°$, wobei $0 \leq k \leq n$ ist und genau *n* Deckspiegelungen, wobei der Schnittwinkel zwischen zwei Symmetrieachsen ein Vielfaches von $1/n \cdot 180°$ ist.

Diedergruppe D_n und zyklische Gruppe Z_n

Definition 4.14

- Die Gruppe der Deckabbildungen eines regulären n-Ecks heißt **Diedergruppe** D_n.
- Die zyklische Gruppe der Deckdrehungen eines regulären n-Ecks heißt **zyklische Drehgruppe** Z_n.

- **Bemerkung:** Z_n ist eine Untergruppe der Diedergruppe D_n. (Satz 4.13)

Satz 4.22: Endliche Untergruppen der Kongruenzgruppe

Jede endliche Untergruppe der Gruppe der Kongruenzabbildungen der Ebene ε ist entweder eine zyklische Drehgruppe Z_n oder eine Diedergruppe D_n.

Satz 4.23: Symmetrische Figuren

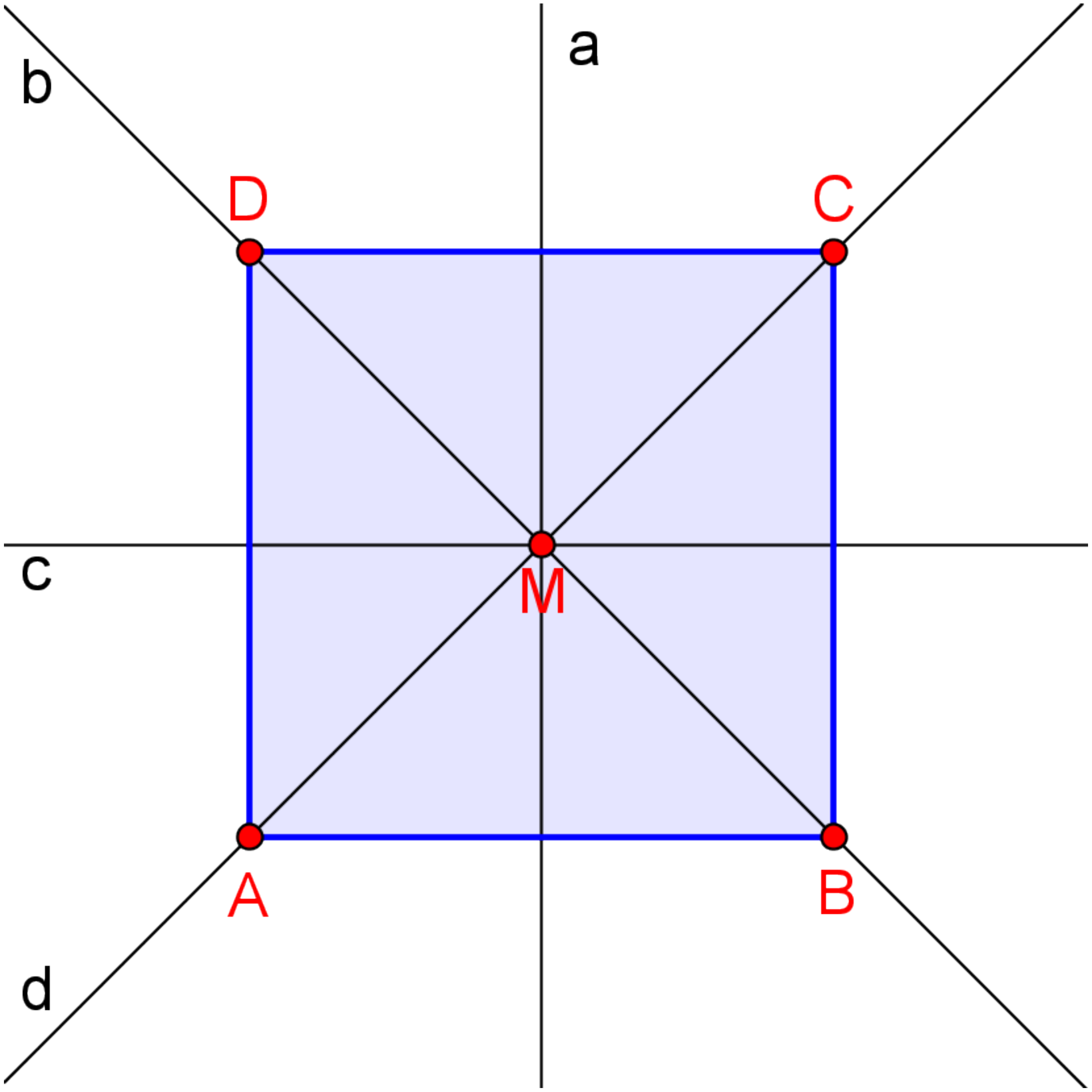
Jede Figur mit endlichen vielen Symmetrien hat als Symmetriegruppe entweder eine zyklische Drehgruppe Z_n oder eine Diedergruppe D_n.

Diedergruppe D_4

$$id_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix} = D_{M,90^\circ}$$

$$s = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} = S_a$$



Diedergruppe D_4

$$id_\varepsilon = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix} = D_{M,90°}$$

$$d^2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} = D_{M,180°} = P_M$$

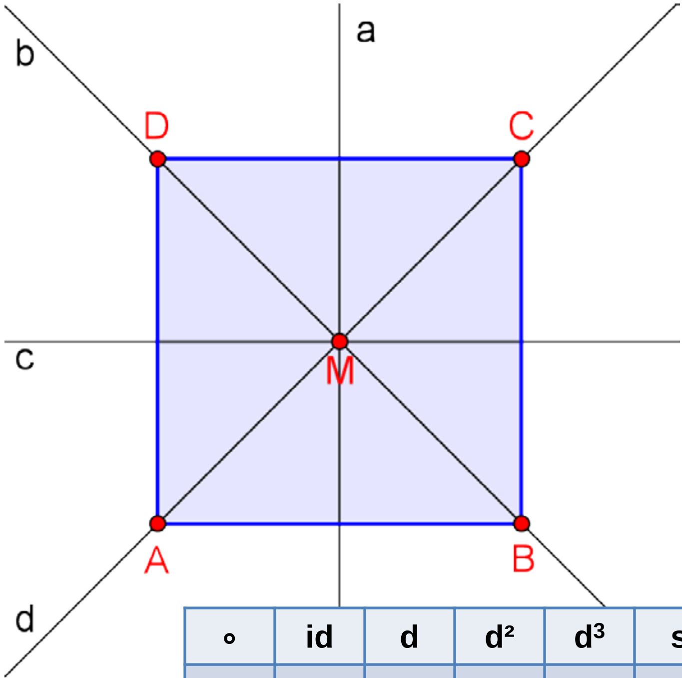
$$d^3 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix} = D_{M,270°}$$

$$s = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} = S_a$$

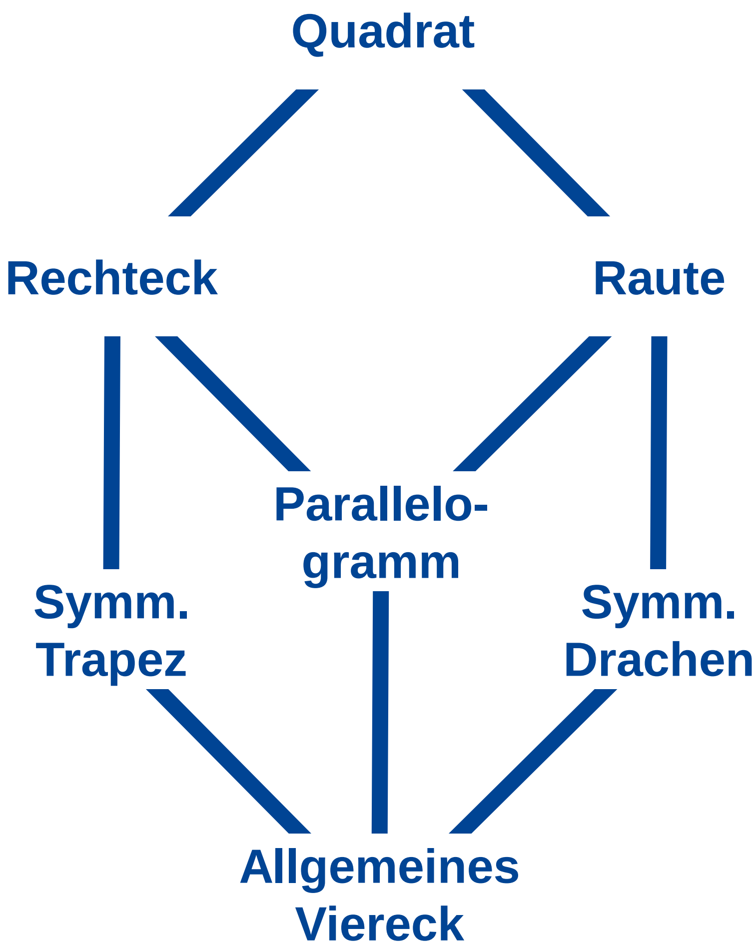
$$ds = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{pmatrix} = S_b$$

$$d^2s = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix} = S_c$$

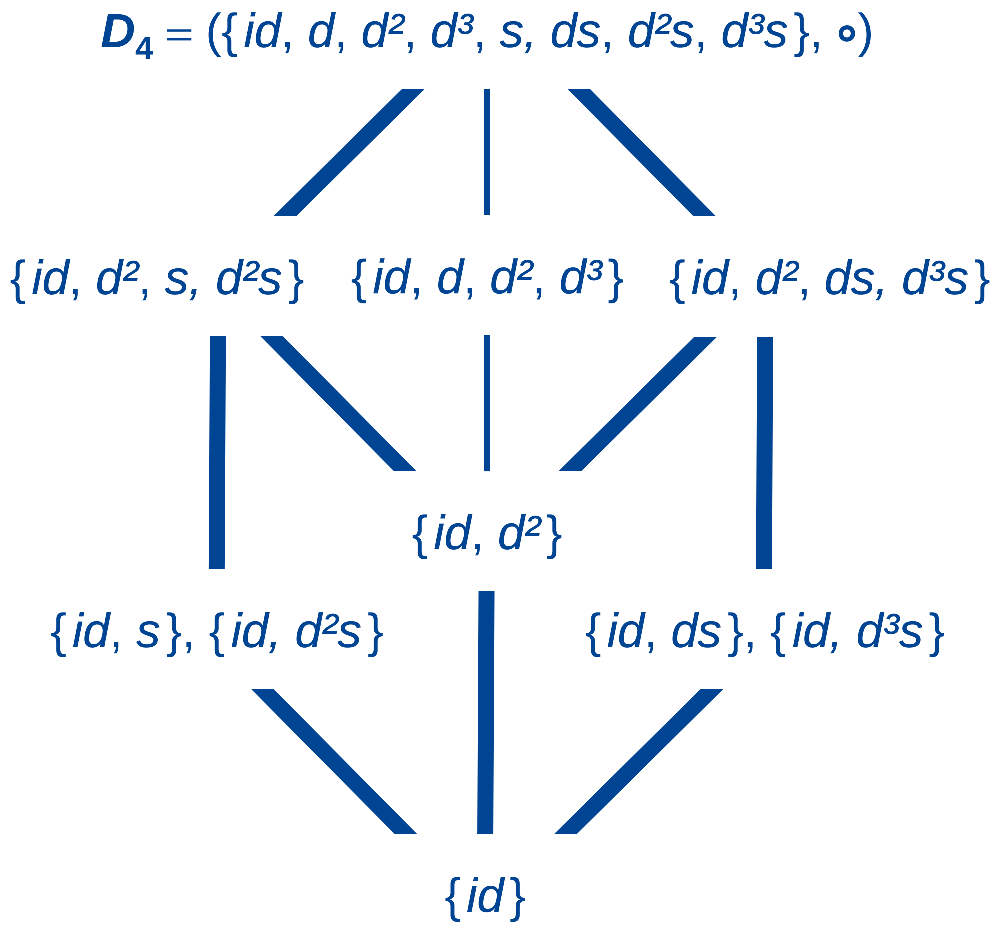
$$d^3s = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{pmatrix} = S_d$$



∘	id	d	d^2	d^3	s	ds	d^2s	d^3s
id	id	d	d^2	d^3	s	ds	d^2s	d^3s
d	d	d^2	d^3	d^4	ds	d^2s	d^3s	s
d^2	d^2	d^3	id	d	d^2s	d^3s	s	ds
d^3	d^3	id	d	d^2	d^3s	s	ds	d^2s
s	s	d^3s	d^2s	ds	id	d^3	d^2	d
ds	ds	s	d^3s	d^2s	d	id	d^3	d^2
d^2s	d^2s	ds	s	d^3s	d^2	d	id	d^3
d^3s	d^3s	d^2s	ds	s	d^3	d^2	d	id



Quadrat
Rechteck
Raute
Parallelo-gramm
Symm. Trapez
Symm. Drachen
Allgemeines Viereck



$D_4 = (\{id, d, d^2, d^3, s, ds, d^2s, d^3s\}, \circ)$
$\{id, d^2, s, d^2s\}$
$\{id, d, d^2, d^3\}$
$\{id, d^2, ds, d^3s\}$
$\{id, d^2\}$
$\{id, s\}, \{id, d^2s\}$
$\{id, ds\}, \{id, d^3s\}$
$\{id\}$

Diedergruppe D_4 und ihre Untergruppen