



Geometrie

Homepage zur Veranstaltung: <http://www.juergen-roth.de> ▶ Lehre ▶ Geometrie

Geometrie

- 0 Geometrie!?
- 1 Axiome der Elementargeometrie
- 2 Kongruenzabbildungen
- 3 Längen-, Winkel- und
Flächenmessungen**
- 4 Elementare Anwendungen
- 5 Ähnlichkeitsabbildungen



Geometrie

Kapitel 3: **Längen-, Winkel- und Flächenmessung**

Kapitel 3:

Längen-, Winkel- und Flächenmessung

3.1 Längenmessung

3.2 Winkelmessung

3.3 Flächengrößen und Flächenmessung



Kapitel 3: Längen-, Winkel- und Flächenmessung

3.1 Längenmessung

- ▶ **Vorgang des Messens am Beispiel der Längen**
 - ▷ Vergleich von **Strecken** durch Abtragen auf einer Halbgerade
 - ▷ Bildung des Begriffs **Länge** als Klasse kongruenter Strecken
 - ▷ Wahl einer speziellen Länge als **Maßeinheit**
 - ▷ **Vervielfachen** und **Unterteilen** einer Länge und speziell der gewählten Maßeinheit
 - ▷ **Vergleichen (Auslegen)** einer zu messenden Strecke **mit der Maßeinheit**
- ▶ **Der letzte Punkt ist das eigentliche Messen!**
 - ▷ Die Anzahl der benötigten Repräsentanten der gewählten Maßeinheit bzw. ihr Bruchteil ist die **Maßzahl**.
 - ▷ Die Maßzahl dient zusammen mit der (Maß-) **Einheit** als Name für die Länge der zu messenden Strecke.

▶ Offene Fragen:

- ▶ Kann jeder Strecke eine Maßzahl zugeordnet werden?
Diese Frage lässt sich nur mit Hilfe einer axiomatischen Festlegung angehen (**Archimedischen Axiom**).
- ▶ Gibt es zu jeder Maßzahl eine Strecke?
Auch diese Frage macht ein weiteres Axiom nötig (**Stetigkeitsaxiom**).
- ▶ Entsprechende Aussagen für Winkel und Flächen lassen sich als Sätze beweisen, werden also letztlich auf die Axiome der Längenmessung zurückgeführt.
- ▶ Die beiden zusätzlichen Axiome bilden die Brücke zwischen der Geometrie und dem Zahlensystem und ermöglichen es, mit reellen Zahlen als Koordinaten analytische Geometrie zu betreiben.

► Bemerkung

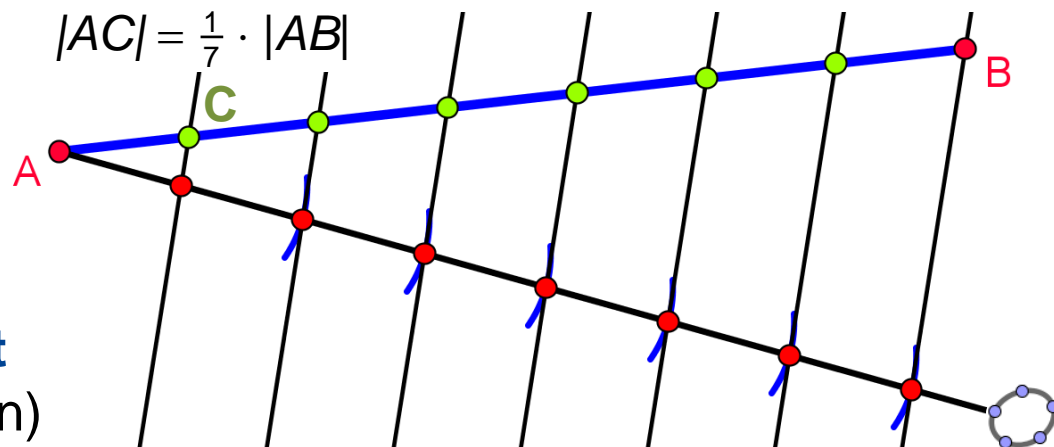
- Der Satz 2.39 von der Mittelparallelen im Dreieck lässt sich wie folgt verallgemeinern:

Satz 3.1

Eine Schar paralleler Geraden p_1, p_2, p_3, \dots , die aus einer Geraden g kongruente Strecken herausschneidet, schneidet aus jeder Geraden h , die nicht zur Schar parallel ist, ebenfalls kongruente Strecken heraus.

► Bemerkung

- Damit lässt sich jede Strecke in n kongruente Teilstrecken zerlegen.
(**Teilbarkeitseigenschaft** für (echte) Streckenlängen)



► Bemerkung

- Das Messen beruht auf dem Vervielfachen einer Länge a , die sich durch folgende Bedingungen erklären lässt:

$$1 \cdot a = a \quad \wedge \quad (n + 1) \cdot a = n \cdot a + a$$

- Das Bilden des n -ten Teils einer Länge beruht formal auf dem Vervielfachen, denn man kann erklären:

$$x = \frac{1}{n} \cdot a \quad :\Leftrightarrow \quad n \cdot x = a$$

- Unter einem Bruchteil einer Länge $|PQ|$ ist dann ihr m -facher n -ter Teil zu verstehen. An Stelle von $m \cdot (\frac{1}{n} \cdot |PQ|)$ schreibt man wie üblich $\frac{m}{n} \cdot |PQ|$.

Definition 3.1

- Ist $\frac{m}{n}$ eine nicht negative rationale Zahl, $e = |PQ|$ die Länge einer Strecke $[PQ]$ mit $P \neq Q$ und $|AB| = \frac{m}{n} \cdot e$, dann heißt die Zahl $\frac{m}{n}$ **Maßzahl** von $[AB]$ bzw. von $|AB|$ bezüglich der **Maßeinheit** e .

- ▶ **Forderungen an die Zuordnung einer Maßzahl zu einer Strecke:**
 - ▷ Die Maßzahl einer Strecke ist eine nicht negative Zahl (**Nichtnegativität**)
 - ▶ Die Anzahl der benötigten Maßeinheiten oder ihrer Bruchteile ist eine nichtnegative Zahl.
 - ▷ Die als Maßeinheit gewählte Länge bzw. eine diese Länge repräsentierende Strecke erhält die Maßzahl 1. (**Normierung**)
 - ▶ Nach den Festlegungen über das Vervielfachen gilt $e = 1 \cdot e$.
 - ▷ Kongruenten Strecken wird dieselbe Maßzahl zugeordnet. (**Kongruenzaxiom**)
 - ▶ Ist $|AB| = \frac{m}{n} \cdot e$ und $[CD] \cong [AB]$, dann muss sich ein Repräsentant des n -ten Teils von e wegen der Axiome der Streckenkongruenz auch auf $[CD]$ genau m -fach abtragen lassen.
 - ▷ Werden Längen addiert, dann addieren sich auch die zugehörigen Maßzahlen. (**Additivität**)
 - ▶ Vgl. Satz 3.2

Satz 3.2

Die Maßzahl der Summe zweier Längen ist gleich der Summe der Maßzahlen der beiden Längen. Es gilt also:

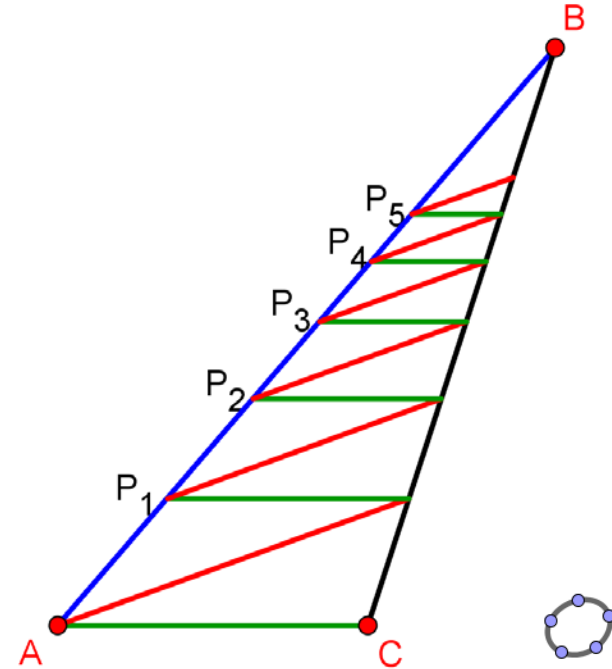
$$\frac{m}{n} \cdot e + \frac{p}{q} \cdot e = \left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q} \right) \cdot e$$

► Bemerkung

- Diese Gleichung sieht wie das Distributivgesetz für Zahlen aus. Es ist aber zu beachten, dass $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ Zahlen sind, während e eine Länge bezeichnet.
- Der Beweis dieses Satzes, der hier übergangen wird, beruht einerseits auf den Axiomen der Streckenkongruenz und andererseits auf Folgerungen aus den Gesetzen eines Größenbereichs und der rekursiven Definition des Vervielfachens von Längen.

► Problem

- Wenn eine Strecke als Repräsentant der gewählten Einheit e von A aus auf der zu messenden Strecke $[AB]$ abgetragen wird, ist es dann sicher, dass der Punkt B nach endlichen vielen Schritten erreicht oder überschritten wird?
- Das folgende Axiom stellt das sicher.



(Ar) Archimedisches Axiom

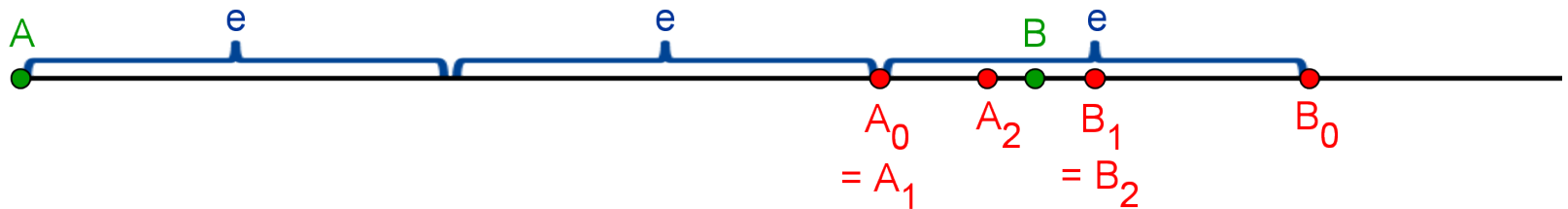
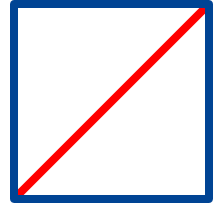
- Ist $A \neq B$ und $|AB| < |CD|$, dann gibt es genau eine natürliche Zahl n , für die gilt:

$$n \cdot |AB| \leq |CD| \quad \text{und} \\ (n + 1) \cdot |AB| > |CD|$$

Zuordnung einer Maßzahl zu einer Strecke

► Bemerkung

- Die Seite und die Diagonale eines Quadrats besitzen z. B. kein gemeinsames Maß, sie sind inkommensurabel.



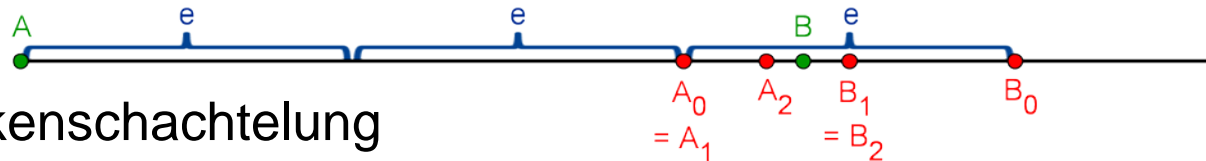
- Um eine Länge $|AB|$ näherungsweise mit der Einheit e zu messen, trägt man von A aus auf $[AB]$ die Länge e ab und erhält nach k Schritten einen Punkt A_0 mit $|AA_0| \leq |AB|$ und nach $k + 1$ Schritten einen Punkt B_0 mit $|AB_0| > |AB|$.
- Der Mittelpunkt M_0 der Strecke $[A_0B_0]$ wird bestimmt.
 - $A_1 = M_0$ und $B_1 = B_0$ wenn $|AM_0| \leq |AB|$
 - $A_1 = A_0$ und $B_1 = M_0$ wenn $|AM_0| > |AB|$
- Anschließend wird der Mittelpunkt M_1 der Strecke $[A_1B_1]$ bestimmt und wieder wie oben die Punkte A_2 und B_2 festgelegt. ...



Definition 3.2

- ▶ Eine Folge von Strecken $([A_n B_n])$ heißt genau dann **Streckenschachtelung**, wenn gilt:
 - ▶ $\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad [A_{n+1} B_{n+1}] \subseteq [A_n B_n]$
 - ▶ Es gibt keine echte Strecke, die in allen Strecken $[A_n B_n]$ enthalten ist.

▶ Bemerkung



- ▶ Eine solche Streckenschachtelung lässt sich etwa über ein Streckenhalbierungsverfahren realisieren.
- ▶ Gäbe es eine Strecke $[BB^*]$ die in allen Strecken der Streckenschachtelung enthalten wäre, dann würde gelten:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |BB^*| < \frac{1}{2^n} \cdot |A_0 B_0| \quad \text{bzw.} \quad 2^n \cdot |BB^*| < |A_0 B_0|$$

●* **Widerspruch zum Archimedischen Axiom**

► Bemerkung

- ▶ Bei obiger Streckenschachtelung bilden die Maßzahlen der Längen
 - ▶ $|AA_n|$ eine monoton wachsende Folge,
 - ▶ $|AB_n|$ eine monoton fallende Folge und
 - ▶ $|A_nB_n| = |AB_n| - |AA_n|$ eine Nullfolge, nämlich die Folge $\left(\frac{1}{2^n}\right)$.
- ▶ Die Maßzahlen der Folgen $|AA_n|$ und $|AB_n|$ bilden zusammen eine Intervallschachtelung. Der gemeinsame Grenzwert der beiden Zahlenfolgen ist die reelle Zahl, die der Strecke $[AB]$ als Maßzahl zugeordnet werden kann.

Definition 3.3

- ▶ Ist $[AB]$ eine Strecke und $([A_nB_n])$ Streckenschachtelung mit $[A_nB_n] \subseteq [AB]$ und rationalen Maßzahlen für die Längen $|AA_n|$ und $|AB_n|$, die den Punkt B einschließt, dann ist der gemeinsame Grenzwert der zu $|AA_n|$ bzw. $|AB_n|$ gehörenden Maßzahlenfolgen die **Maßzahl der Strecke** $[AB]$.

► Bemerkung

- ▷ Mit Hilfe der Streckenschachtelung (d. h. letztlich aufgrund des Archimedischen Axioms) kann jeder Strecke eine Maßzahl zugeordnet werden.
- ▷ Es bleibt die Frage zu klären, ob zu jeder nichtnegativen reellen Zahl r eine Strecke existiert, deren Maßzahl r ist.
- ▷ Mit anderen Worten: Gibt es zu jeder Streckenschachtelung einen Punkt, der auf allen Strecken der Streckenschachtelung liegt? Dazu wird ein weiteres Axiom benötigt:

(S) Axiom der Streckenschachtelung (Cantorsches Axiom)

- ▷ Zu jeder Streckenschachtelung gibt es (genau) einen Punkt, der allen Strecken der Schachtelung angehört.

► Bemerkung

- ▷ Dieses Axiom stellt sicher, dass eine Gerade „keine Lücken“ hat.
- ▷ Die Axiome (Ar) und (S) werden auch **Stetigkeitsaxiome** genannt.

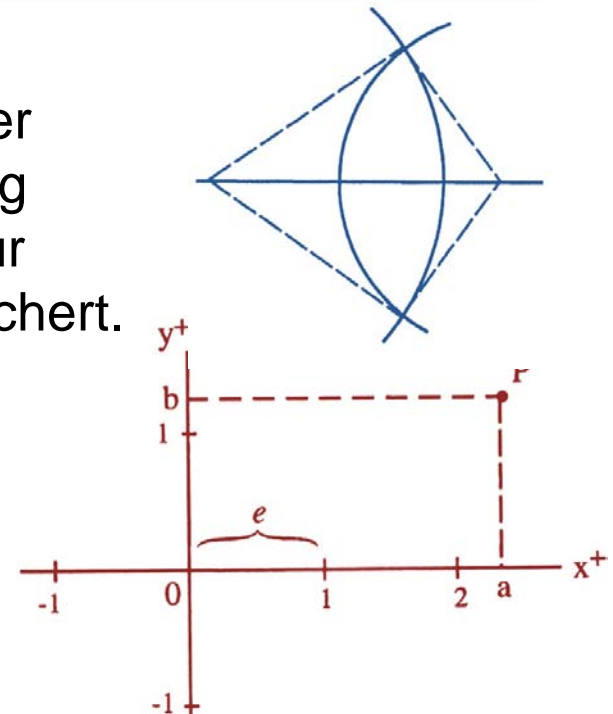
Satz 3.3

Bei gegebener Maßeinheit

- ▷ gehört zu jeder Strecke genau eine reelle Zahl als Maßzahl,
- ▷ gibt es zu jeder nicht negativen reellen Zahl r eine Strecke, deren Maßzahl r ist.

► Bemerkungen

- ▷ U. a. die *Existenz* von Schnittpunkten zweier Kreise sowie die Möglichkeit der Darstellung des Kreisumfangs durch eine Strecke ist nur mit dem Streckenschachtelungsaxiom gesichert.
- ▷ Erst mit den Stetigkeitsaxiomen und Satz 3.3 lässt sich analytische Geometrie betreiben. Die Punkte der Ebene lassen sich eineindeutig Zahlenpaaren aus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zuordnen.



▶ Folgerungen

- ▶ Man kann umgekehrt auch ein **Modell des Axiomensystems** gewinnen, indem man definiert:
 - ▶ Die Ebene ist die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
 - ▶ Punkte sind Zahlenpaare aus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
 - ▶ Geraden sind Lösungsmengen der linearen Gleichungen $ax + by + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R} \wedge (a \neq 0 \vee b \neq 0)$.
 - ▶ Für $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$ ist das Längenmaß von $|PQ|$ durch $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ gegeben.
 - ▶ Zwei Strecken sind kongruent, wenn sie dasselbe Längenmaß besitzen.
- ▶ Es lässt sich zeigen, dass alle Axiome erfüllt sind und damit ein Modell (das **arithmetische Modell**) der euklidischen Geometrie der Ebene gefunden wurde.
- ▶ Wenn das Rechnen mit reellen Zahlen widerspruchsfrei ist, dann ist auch die euklidische Geometrie widerspruchsfrei.



Kapitel 3: Längen-, Winkel- und Flächenmessung

3.2 Winkelmessung

Definition 3.4

Eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $+$ und einer Relation $<$ heißt **Größenbereich**, wenn für alle $a, b, c \in G$ gilt:

- ▷ Kommutativität: $a + b = b + a$
- ▷ Assoziativität: $a + (b + c) = (a + b) + c$
- ▷ Trichotomie: entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$
- ▷ Lösbarkeit: $\exists_{x \in G} a + x = b \Leftrightarrow a < b$

► Bemerkungen

▷ Das Messen von Winkelgrößen weicht in vielen Punkten deutlich von der Längenmessung ab. Zunächst erklärt man aber für einen Winkel bzw. eine Winkelgröße α analog zur Längenmessung:

- ▷ **Vervielfachen:** $1 \cdot \alpha = \alpha \quad \wedge \quad (n + 1) \cdot \alpha = n \cdot \alpha + \alpha$
- ▷ **Teilen:** $\beta = \frac{1}{n} \cdot \alpha \Leftrightarrow n \cdot \beta = \alpha$
- ▷ Man folgert: $\frac{m}{n} \cdot \alpha + \frac{p}{q} \cdot \alpha = \left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) \cdot \alpha$

► Bemerkungen

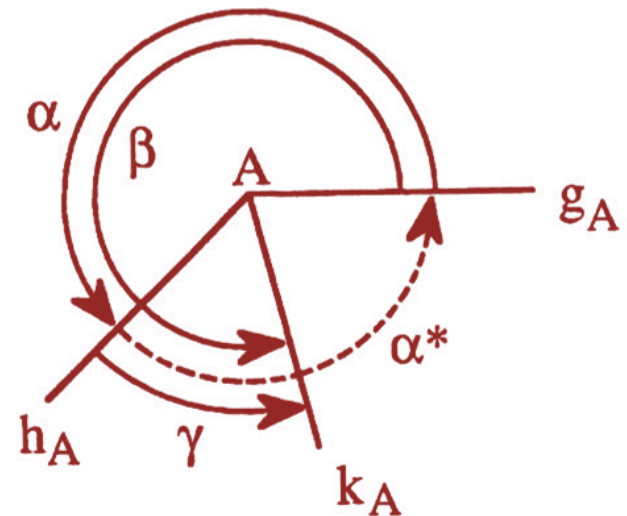
- Man spricht zwar von Winkelgrößen, die geltenden Gesetze sind jedoch nicht die eines Größenbereichs.
- Die Lösbarkeit gilt nur unter einer zusätzlichen Bedingung im Hinblick auf den zu α komplementären und gleichorientierten Winkel α^* .

Satz 3.4

$\alpha < \beta$ gilt genau dann, wenn es einen vom Nullwinkel verschiedenen Winkel γ gibt, mit $\alpha + \gamma = \beta$ und $\gamma < \alpha^*$.

► Bemerkungen

- $\alpha = \sphericalangle(g_A, h_A)$; $\alpha^* = \sphericalangle(h_A, g_A)$
- $\beta = \sphericalangle(g_A, k_A)$; $\gamma = \sphericalangle(h_A, k_A)$



Satz 3.5

a) Wenn β^* das Komplement von β und $\gamma < \beta^*$ ist, dann gilt:

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$$

b) Ist $q > 0$ und $p \cdot \beta < \beta^*$ für $0 < p < q - 1$, dann gilt:

$$\alpha < \beta \Rightarrow q \cdot \alpha < q \cdot \beta$$

► Bemerkungen

- Die Bedingung $\gamma < \beta^*$ sorgt dafür, dass der Vollwinkel nicht überschritten wird.
- Wird der Vollwinkel nicht überschritten und werden nur gleichorientierte Winkel betrachtet, dann gelten für das Rechnen mit Winkelgrößen die Rechengesetze für das Rechnen in Größenbereichen.

Definition 3.5

- ▶ Ist $\sphericalangle(g_A, h_A)$ ein rechter Winkel, so gilt: $|\sphericalangle(g_A, h_A)| = 90^\circ$
- ▶ Ein rechter Winkel hat die Größe 90 Grad.

▶ Bemerkungen

- ▶ Damit ist indirekt eine Maßeinheit bestimmt, nämlich die Winkelgröße 1 Grad als neunzigster Teil des rechten Winkels.
- ▶ Zwei sich senkrecht schneidende Geraden zerlegen die Ebene in vier kongruente Winkelfelder. Demnach beträgt die Winkelgröße des Vollwinkels $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$ und die des gestreckten Winkels $2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$.
- ▶ Die Summe zweier Winkelgrößen ist nur dann die Summe der beiden Winkelmaßzahlen zugeordnet, wenn diese Summe kleiner als der Vollwinkel ist.

Satz 3.6

Sind a und b die Maßzahlen der Winkel α und β , dann hat die „Winkelsumme“ $\alpha + \beta$ die Maßzahl

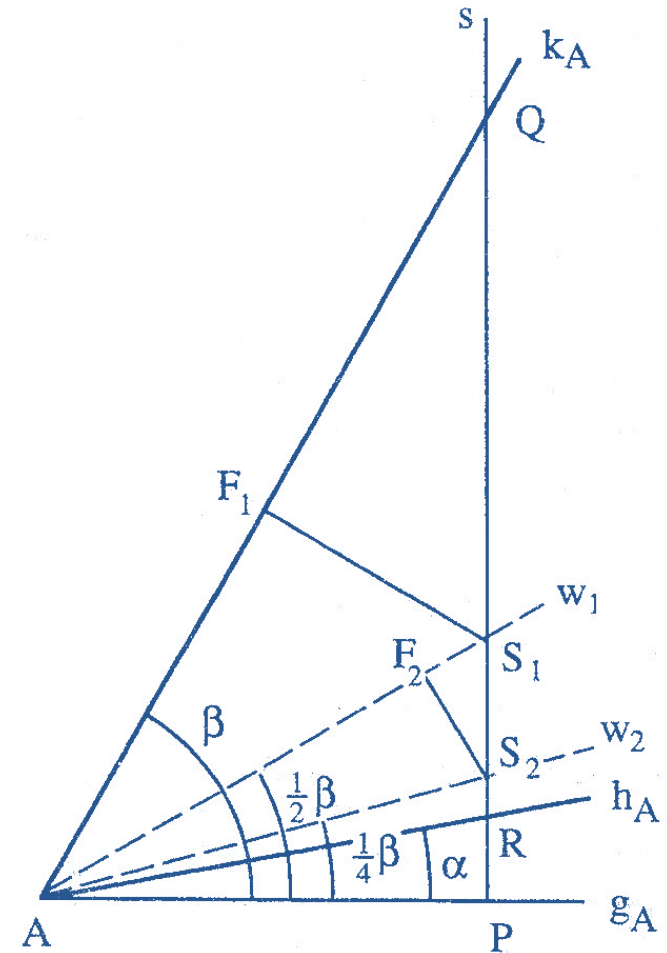
$$a + b \quad \text{falls } \beta < \alpha^*$$

$$a + b - 360 \quad \text{falls } \beta \geq \alpha^*$$

Satz 3.7

Wenn β ein spitzer Winkel, α nicht der Nullwinkel und $\alpha < \beta$ ist, dann gibt es eine natürliche Zahl n , für die gilt:

$$\frac{1}{2^n} \cdot \beta < \alpha$$



Definition 3.6

Eine Folge von Winkeln (α_n) mit einem allen Winkeln gemeinsamen Scheitel heißt genau dann **Winkelschachtelung**, wenn gilt:

$$\triangleright \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad W_{\alpha_{n+1}} \subseteq W_{\alpha_n}$$

\triangleright Es gibt keinen vom Nullwinkel verschiedenen Winkel, dessen Winkelfeld in allen Winkelfeldern der Folge enthalten ist.

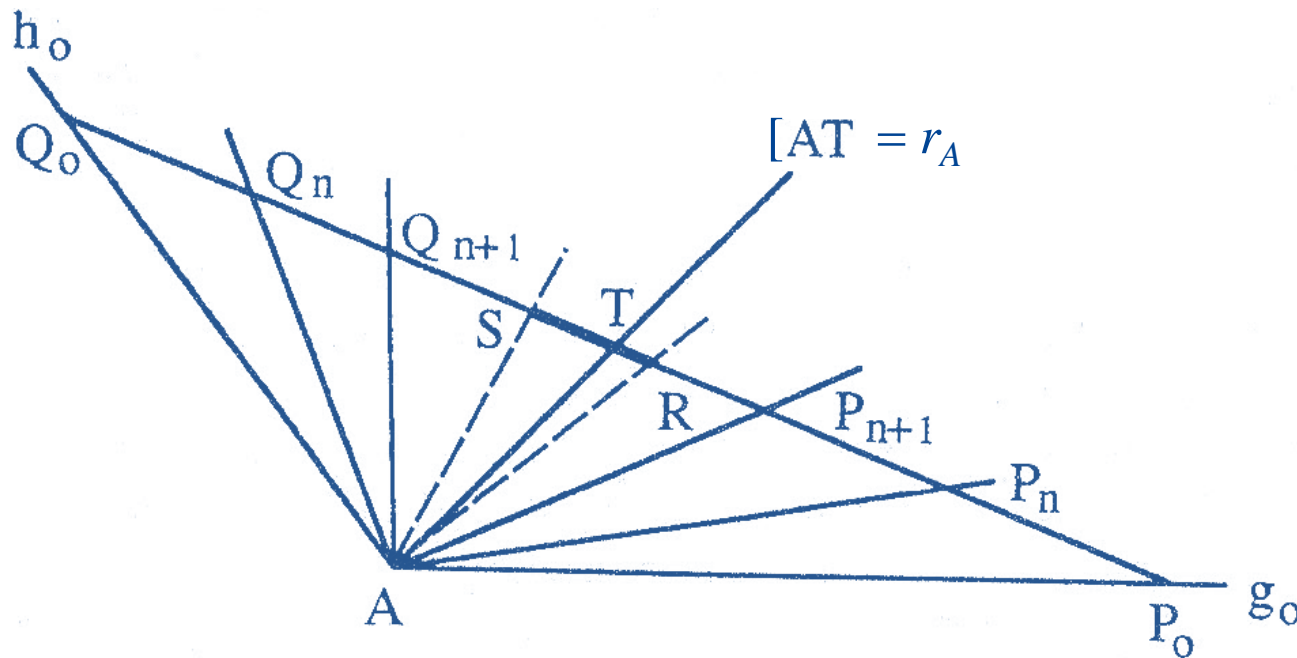
Definition 3.7

Es sei $\alpha = \sphericalangle(g_A, h_A)$ ein höchstens gestreckter Winkel, und $(\sphericalangle(k_n, l_n))$ eine Winkelschachtelung, die die Halbgerade h_A einschließt. Sind dann a_n die Maßzahlen der Winkel $\sphericalangle(g_A, k_n)$ und die Zahlen b_n die Maßzahlen der Winkel $\sphericalangle(g_A, l_n)$, dann ist der gemeinsame Grenzwert der Folgen (a_n) und (b_n) die Maßzahl des Winkels α .

Ist α überstumpf mit der Größe $180^\circ + \alpha'$ und hat α' die Maßzahl a' , dann hat α die Maßzahl $180 + a'$.

Satz 3.8

Ist (α_n) eine Winkelschachtelung mit dem Scheitel A , dann gibt es genau eine Halbgerade r_A , die in allen abgeschlossenen Winkelfeldern der Schachtelung liegt.



► Bemerkung

- ▷ Zu jeder reellen Zahl r gibt es eine Drehung im physikalischen Sinn mit $|\sphericalangle(PAP')| = (r \bmod 360)^\circ$.
 - ▷ P' ist dabei ein Punkt der Ebene ε , auf den ein Punkt P bei einer Drehung um A fällt.
- ▷ Auf diese Weise kann über die Drehung im physikalischen Sinn jeder reellen Zahl eindeutig ein Winkel zugeordnet werden, nicht aber umgekehrt.
- ▷ Das Addieren und Vervielfachen reeller Zahlen entspricht dann genau dem Verketteten und Wiederholen von Drehungen im physikalischen Sinn.



Kapitel 3: Längen-, Winkel- und Flächenmessung

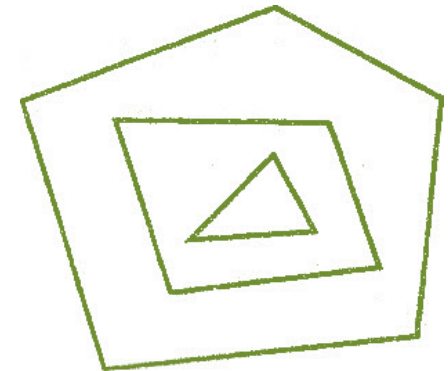
3.3 Flächengrößen und Flächenmessung

Definition 3.8

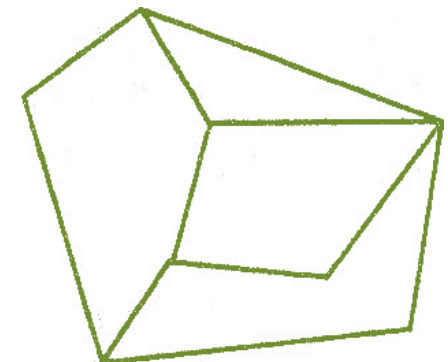
Die Vereinigungsmenge von endlich vielen einfach zusammenhängenden Polygonen P_k heißt genau dann **Netz**, wenn folgendes gilt:

- (1) Zwei verschiedene Polygone haben keinen inneren Punkt gemeinsam.
- (2) Zwei Polygone, die nicht disjunkt sind, haben nur Ecken oder Seiten gemeinsam.
- (3) Die Seiten, die jeweils nur zu einem der Polygone gehören, bilden zusammen ein einfach zusammenhängendes Polygon P .

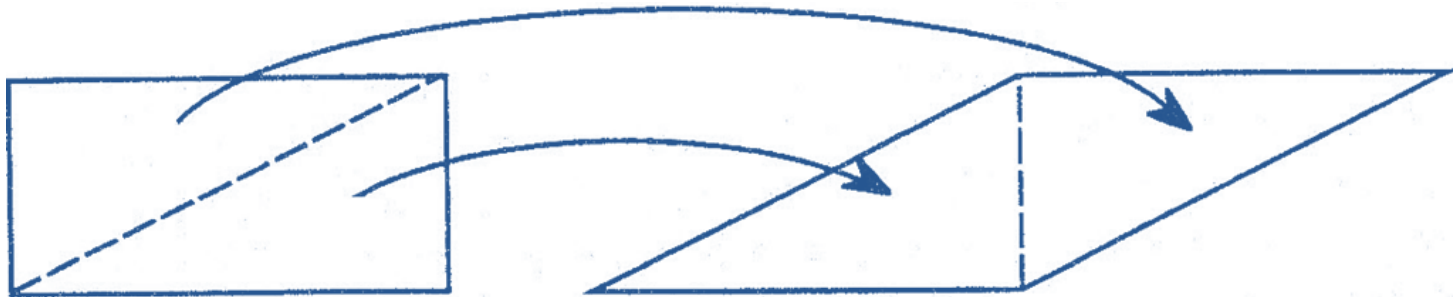
P wird auch als **äußeres Polygon** des Netzes bezeichnet und das Netz als **Zerlegung** von P in die Teilpolygone P_k .



Kein Netz



Netz



Definition 3.9

Zwei Polygone P und Q heißen genau dann **zerlegungsgleich**, wenn sie sich so in gleichviele Teilpolygone P_k und Q_k zerlegen lassen, dass gilt:

- ▷ Es gibt eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der Teilpolygone von P zu denen von Q , so dass jedem Teilpolygon P_k ein zu P_k kongruentes Teilpolygon Q_k zugeordnet wird.
- ▷ Man schreibt dann kurz: $P \stackrel{z}{=} Q$

Satz 3.9

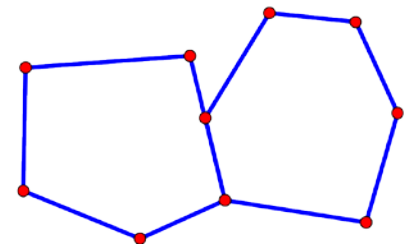
Die Zerlegungsgleichheit ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der einfach zusammenhängenden Polygone.

Definition 3.10

Die **Größe** $|P|$ des durch ein Polygon bestimmten abgeschlossenen Polygonebiets $[P]$ ist die Klasse aller zu $[P]$ zerlegungsgleichen Polygonebiets.

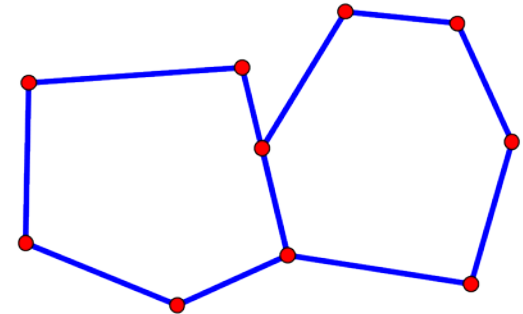
► Bemerkungen

- Ein Polygon P wird unterschieden von seinem inneren Gebiet (P) und dem abgeschlossenen Gebiet $[P]$, bei dem der Rand mit eingeschlossen ist.
- Flächengrößen lassen sich addieren, indem man Repräsentanten so vereinigt, dass sie keinen inneren Punkt, aber mindestens eine echte Strecke gemeinsam haben, damit sich ein abgeschlossenes Polygonebiet ergibt.



Definition 3.11

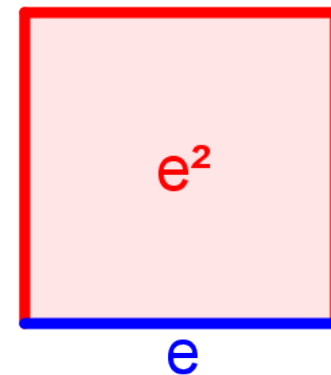
Sind $[A]$ und $[B]$ abgeschlossene Polygongebiete mit $(A) \cap (B) = \emptyset$ und $[A] \cup [B]$ ein abgeschlossenes Polygonegebiet, das durch ein einfach zusammenhängendes Polygon begrenzt ist, dann ist die Größe von $[A] \cup [B]$ die Summe der Flächengrößen $|A|$ und $|B|$.



Definition 3.12

Wenn e die Maßeinheit für Längen ist, dann ist die Größe eines Quadrats der Seitenlänge e die Maßeinheit für die Flächengrößen.

Als Symbol für die Flächengröße wird e^2 verwendet.



► Bemerkungen

- Das vervielfachen der Maßeinheit entspricht bei der Flächenmessung genau dem Vorgehen bei der Längenmessung. Setzt man mehrere „Einheitsquadrate“ aneinander, dann ergibt sich ein Streifen der Breite e .

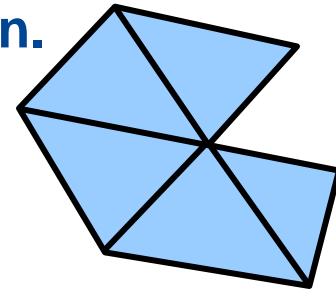


$$4\frac{3}{4} \cdot e^2 = \left(4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot e^2$$

- Die Maßzahl der Länge des Streifens ist gleich der Anzahl der in ihm enthaltenen Quadrate.
- Um jedem Polygone eine Maßzahl zuordnen zu können, muss noch gezeigt werden, dass zu jedem einfach zusammenhängenden Polygon ein zerlegungsgleicher derartiger Streifen existiert.

▶ Schritte zur Zuordnung einer Maßzahl zu einem Polygon.

- ▶ Jedes einfach zusammenhängende Polygon ist triangulierbar, d. h. es lässt sich in Dreiecke zerlegen.
- ▶ Zu jedem Dreieck gibt es ein zerlegungsgleiches Parallelogramm, dessen eine Seite eine der Dreiecksseiten ist.
- ▶ Zu jedem Parallelogramm gibt es ein zerlegungsgleiches Rechteck, dessen eine Seite eine der Parallelogrammseiten ist.
- ▶ Zu jedem Rechteck gibt es ein zerlegungsgleiches Rechteck, dessen eine Seite die Länge e besitzt.



▶ Bemerkung

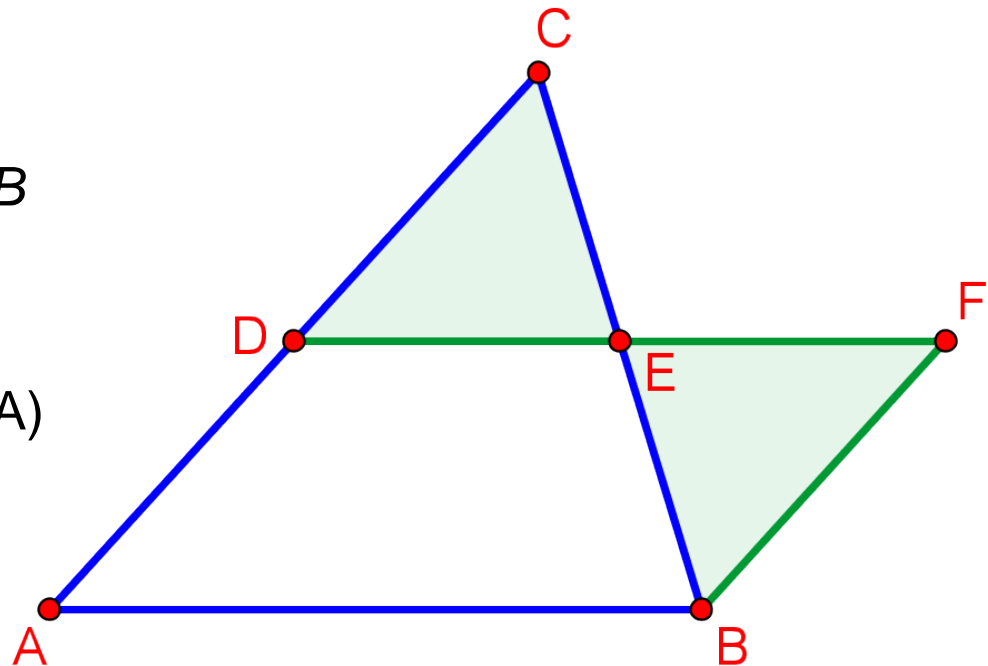
- ▶ Die sich ergebende Zuordnung einer Maßzahl zu einem Polygon muss eindeutig sein, also insbesondere unabhängig von der Zerlegung sein.
- ▶ Bei Euklid gibt es hierfür ein Axiom, Hilbert hat einen Weg aufgezeigt, der ohne ein weiteres Axiom auskommt.

Satz 3.10

Zu jedem Dreieck gibt es ein zerlegungsgleiches Parallelogramm, das mit dem Dreieck in einer wählbaren Seite übereinstimmt.

► Beweisidee

- ▶ Gegeben: ABC
- ▶ DE Mittelparallele bzgl. AB
- ▶ $P_E(DEC) = FEB$
- ▶ $DEC \cong FEB \wedge$
 $ABFD$ Parallelogramm (PA)
- ▶ $ABED$ und DEC
ergeben ABC
- ▶ $ABED$ und FEB
ergeben $ABFD$
- ▶ ABC und $ABDF$ zerlegungsgleich. Sie stimmen in $[AB]$ überein.



Satz 3.11

Parallelelogramme die in der Länge einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen sind zerlegungsgleich.

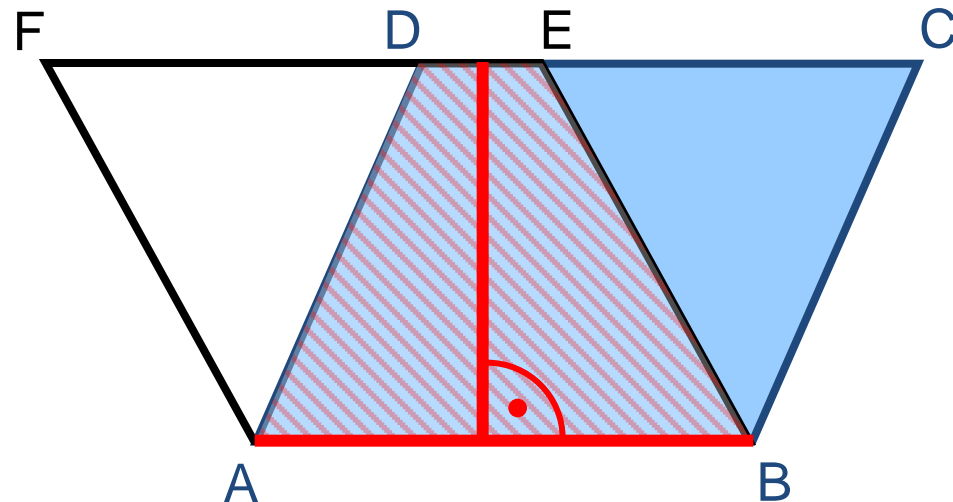
► Bemerkung

► Der Abstand der Trägergeraden zweier paralleler Seiten eines Parallelogramms wird **Höhe** genannt.

► Beweisidee

► Parallelelogramme $ABCD$ und $ABEF$ mit $\overrightarrow{(AB, CD)} = \overrightarrow{(AB, EF)}$

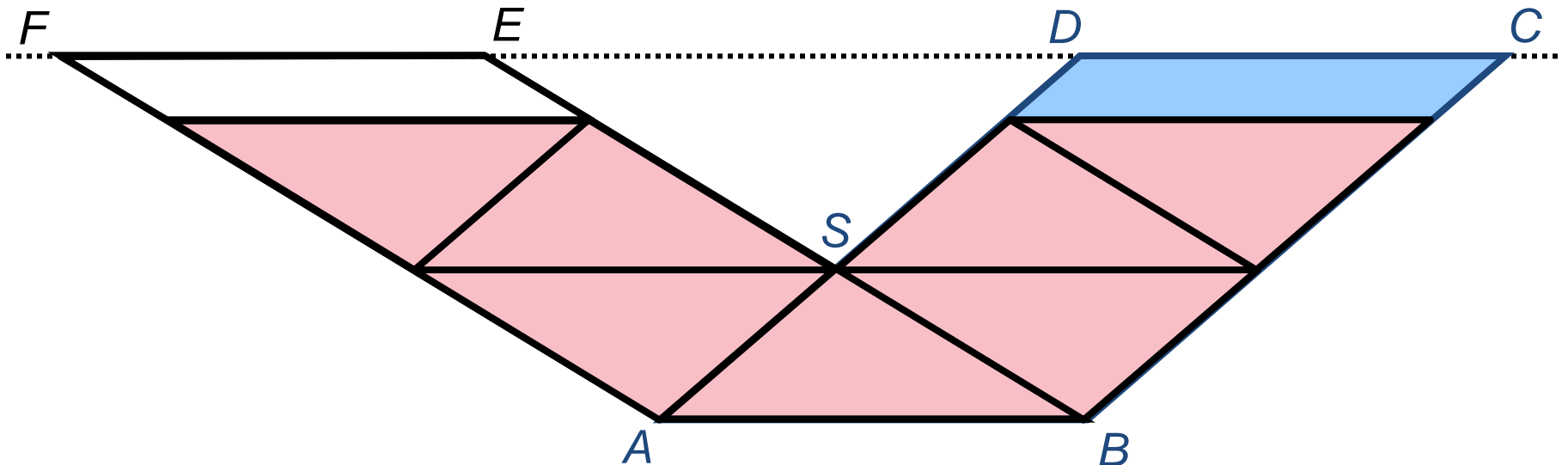
- 1. Fall: $[CD] \cap [EF] \neq \emptyset$
 - $ABED$ ist Teilpolygon von $ABCD$ und $ABEF$.
 - $T_{\overrightarrow{AB}}(ADF) = BCE$
 - $ADF \cong BCE$
 - $ABCD$ und $ABEF$ sind zerlegungsgleich.



► Beweisidee zu Satz 3.11 (Fortsetzung)

▷ 2. Fall: $[CD] \cap [EF] = \emptyset$

- ▷ Dreieck ABS mehrfach geeignet an Seitenmitten punktspiegeln.
- ▷ Zerlegung ist aufgrund des Archimedischen Axioms möglich.
- ▷ Anwendung des 1. Falls auf die kleinen Restparallelogramme!
- ▷ $ABCD$ und $ABEF$ sind zerlegungsgleich.



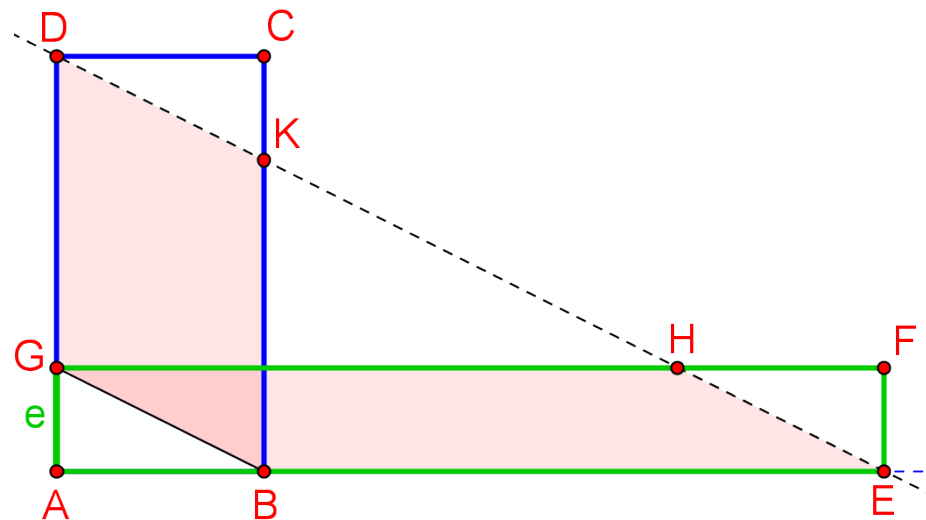
► Bemerkung

- Da das Rechteck ein spezielles Parallelogramm ist, gibt es zu jedem Parallelogramm ein zerlegungsgleiches Rechteck, dass in einer Seitenlänge mit dem Parallelogramm übereinstimmt.

Satz 3.12

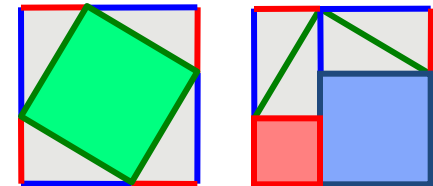
Zu jedem Rechteck gibt es ein zerlegungsgleiches Rechteck, dessen eine Seite eine vorgegebene (von Null verschiedene) Länge e hat.

► Beweisidee



Definition 3.13

Zwei Polygone P und Q heißen genau dann **ergänzungsgleich**, wenn sich zu P und Q je endlich viele, paarweise zerlegungsgleiche Polygone P_k und Q_k so hinzunehmen lassen, dass die beiden Gesamtpolygone zerlegungsgleich sind.

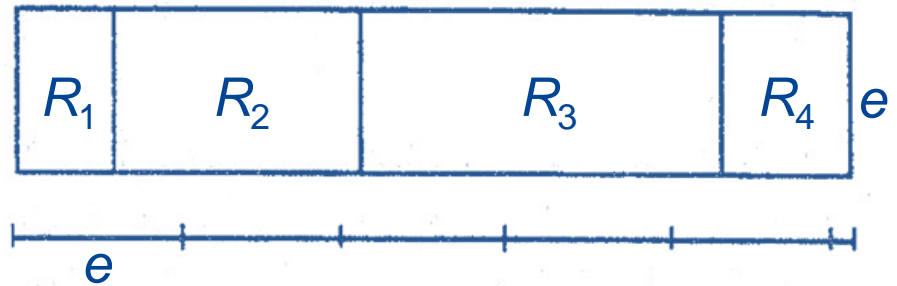
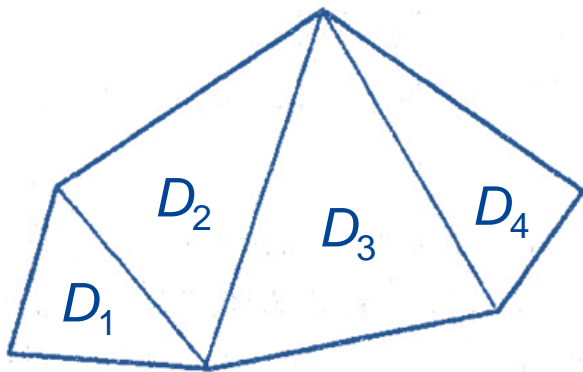


- **Bemerkung:** Man kann zeigen, dass zwei zerlegungsgleiche Polygone auch ergänzungsgleich sind und (mit dem Archimedischen Axiom) zwei ergänzungsgleiche Polygone auch zerlegungsgleich sind.

Satz 3.13

Zu jedem einfach zusammenhängenden Polygon gibt es ein zerlegungsgleiches (ergänzungsgleiches) Rechteck, dessen eine Seite als Länge die Maßeinheit e hat. Die Maßzahl der Länge der benachbarten Seite ist dann die Maßzahl der Flächengröße des Polygonegebiets.

Messung der Flächengröße

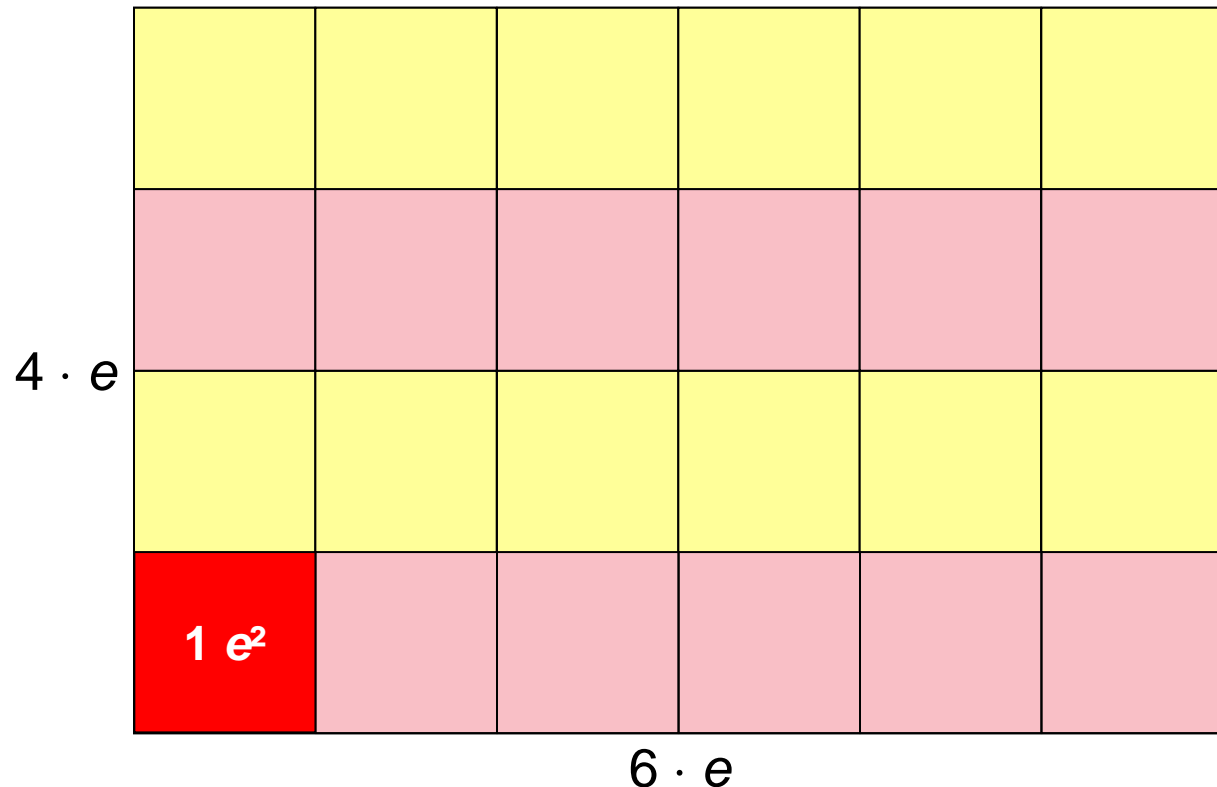


► Bemerkung

- Die Flächenmessung beruht darauf ein Flächenstück mit Einheitsquadraten auszulegen und die dazu benötigte Anzahl zu bestimmen.

Satz 3.14

In einem Rechteck mit den Seitenlängen a und b ist die Maßzahl seiner Flächengröße gleich dem Produkt der Maßzahlen seiner Seitenlängen.



Messung der Flächengröße

$$a, b \in \mathbb{R}^+$$

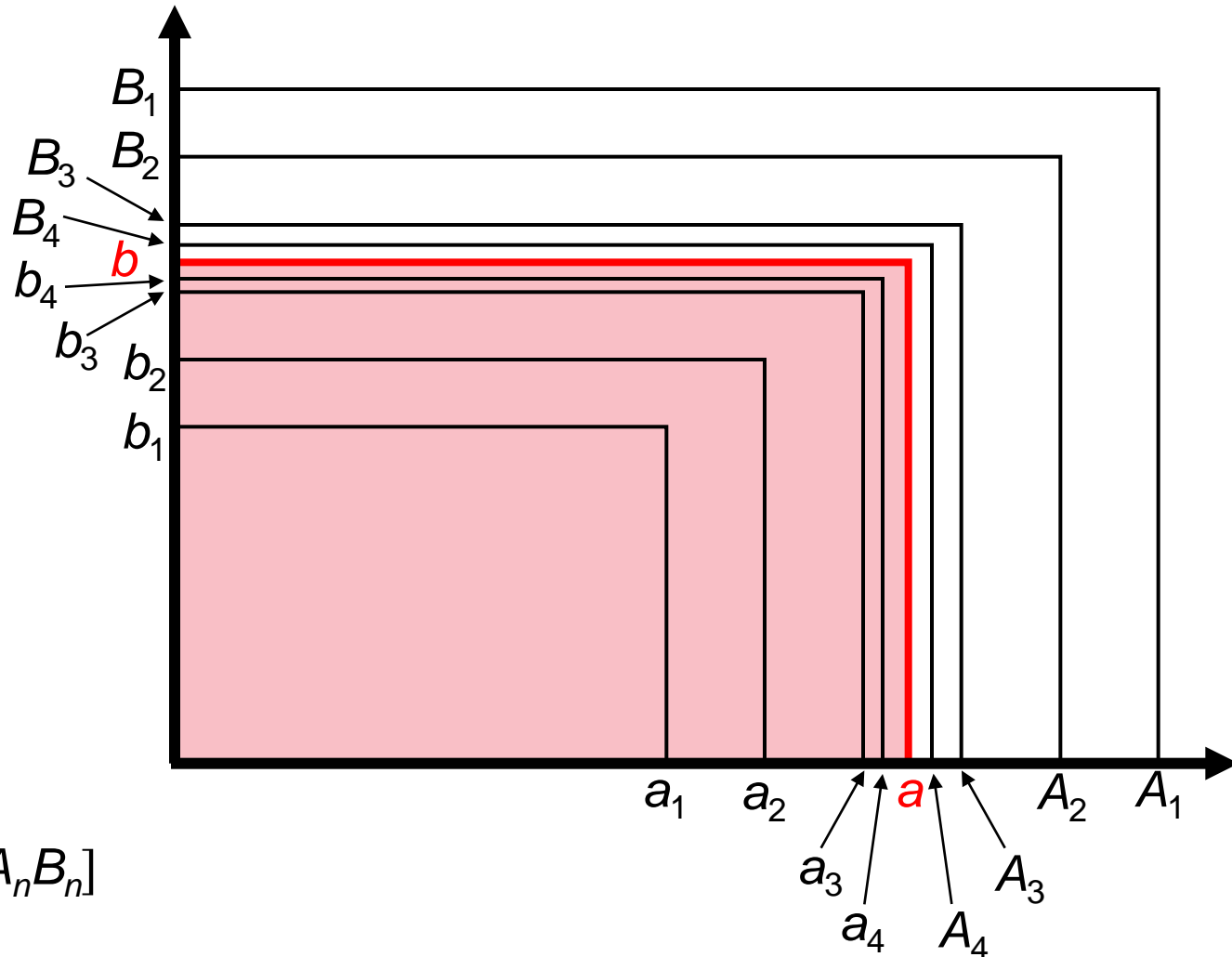
Idee: Intervall-
schachtelung für
den Flächeninhalt

$$a_n, b_n, A_n, B_n \in \mathbb{Q}^+$$

$$\{a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, A_n]$$

$$\{b\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [b_n, B_n]$$

$$\Rightarrow \{ab\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n b_n, A_n B_n]$$



► Bemerkungen

- ▶ Man rechnet „ $4 \cdot (6 \text{ cm}^2)$ “ und nicht „ $4 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm}$ “, weil wie in allen Größenbereichen für die Längen nur Addition und die auf die Addition beruhende Vervielfachung definiert ist, nicht aber die Multiplikation der Größen.
- ▶ Wegen Satz 3.14 kann man zur Legitimation der Sprechweise, wonach der Flächeninhalt eines Rechtecks das Produkt der Seitenlängen ist, eine Multiplikation von Längen als eigenständige Operation definieren.
- ▶ Dabei wird aber zwei *Längen* eine *Flächengröße* als Produkt zugeordnet. Die so definierte Verknüpfung ist also keine innere Verknüpfung!

Definition 3.14

Das **Produkt** zweier Längen a und b ist der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b : $A_R = a \cdot b$

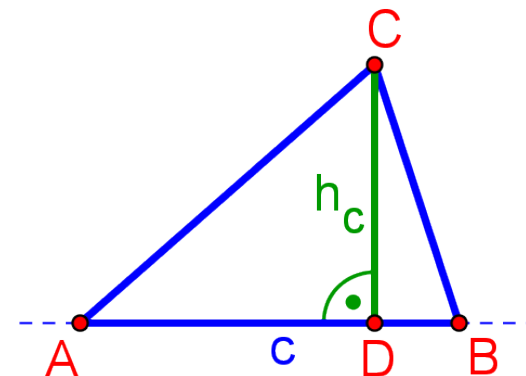
► Bemerkung

- Nach Satz 3.11 sind Parallelogramme die in der Länge einer Seite g und der zugehörigen Höhe h_g übereinstimmen zerlegungsgleich.
- Folglich ist jedes Parallelogramm zerlegungsgleich zu einem Rechteck mit den Seitenlängen g und h_g . Mit Satz 3.14 folgt daraus für den Flächeninhalt eines Parallelogramms:

$$A_{\text{Parallelogramm}} = g \cdot h_g$$

Definition 3.15

In einem Dreieck ABC ist der Abstand des der Seite c gegenüberliegenden Eckpunkts C von (der Trägergeraden AB) der Seite c die **zur Dreiecksseite c gehörende Höhe h_c** .



Satz 3.15

Ist g die Länge einer Dreiecksseite (gewählte Grundseite) und h_g die zugehörige Höhe, dann gilt für den Flächeninhalts des Dreiecks:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$$

► Bemerkungen

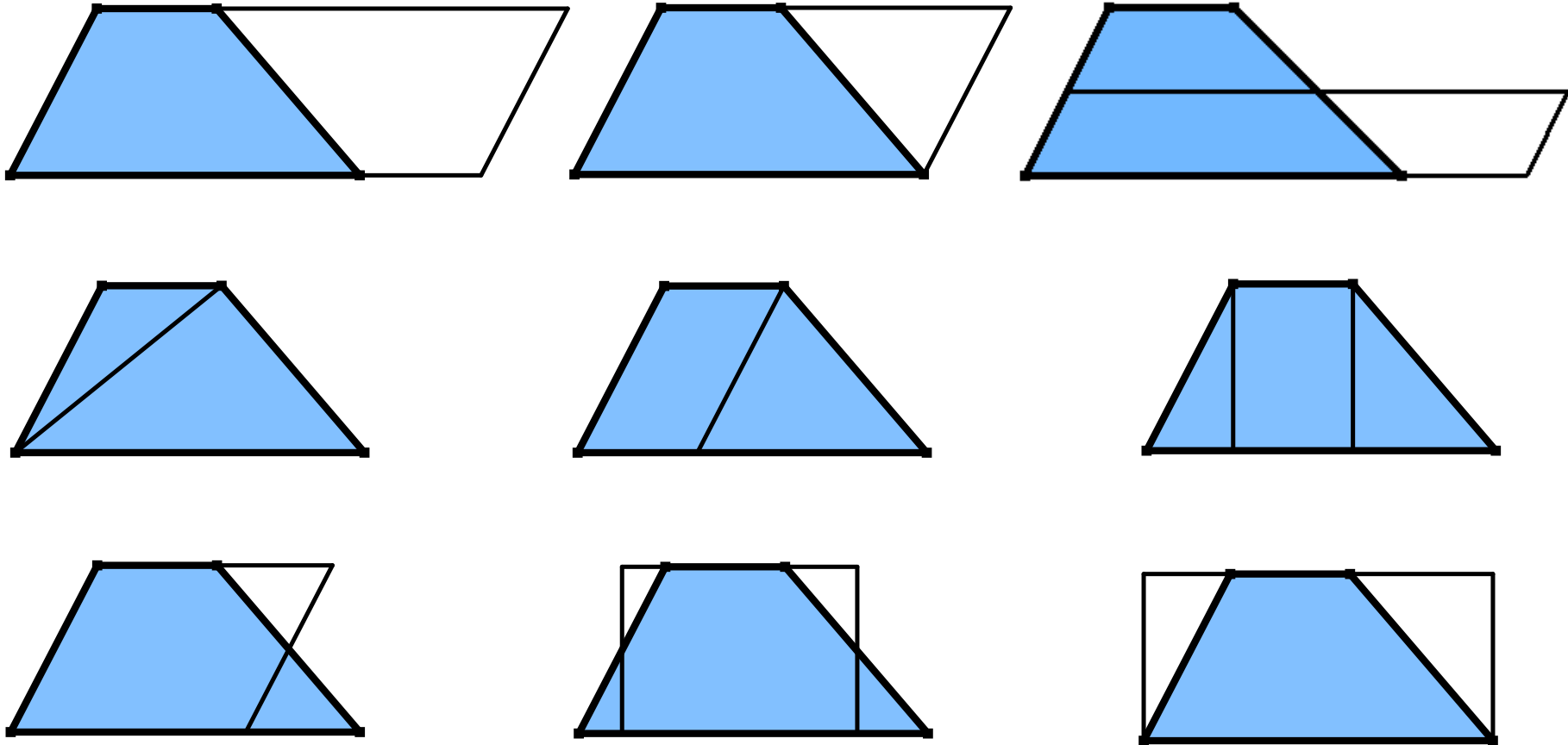
► Übungsaufgabe (vgl. Satz 3.10)

Satz 3.16

Ist $ABCD$ ein Trapez mit „parallelen Seiten“ $[AB]$ und $[CD]$ mit $a = |AB|$ und $c = |CD|$ sowie der Höhe h (Abstand der Trägergeraden der „parallelen Seiten“), dann gilt für den Flächeninhalt:

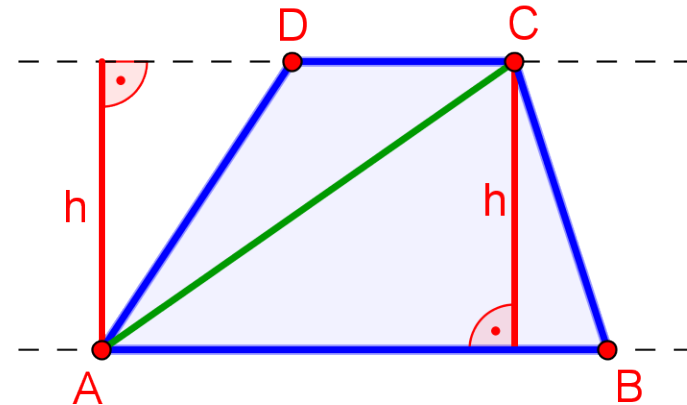
$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$

Einige Beweisideen zu Satz 3.16



► Beweis zu Satz 3.16

- ▷ Die Diagonale $[AC]$ zerlegt das Trapez $ABCD$ in zwei Dreiecke ABC und CDA .
- ▷ Für die Höhe h des Trapezes gilt: $h = d(AB, CD)$
- ▷ Die Höhe des Dreiecks ABC bzgl. der Grundseite $[AB]$ ist h , weil der dritte Eckpunkt C auf der zu AB parallelen Geraden CD liegt, mit $d(AB, CD) = h$.
- ▷ Entsprechend ergibt sich:
Die Höhe des Dreiecks CDA bzgl. der Grundseite $[CD]$ ist h .



Mit Satz 3.15 folgt:

$$\triangleright A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h$$

$$\triangleright A_{CDA} = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot h$$

Mit Definition 3.11 folgt:

$$\begin{aligned} A_{\text{Trapez}} &= A_{ABC} + A_{CDA} \\ &= \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h + \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |CD|) \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h \end{aligned} \quad \#$$

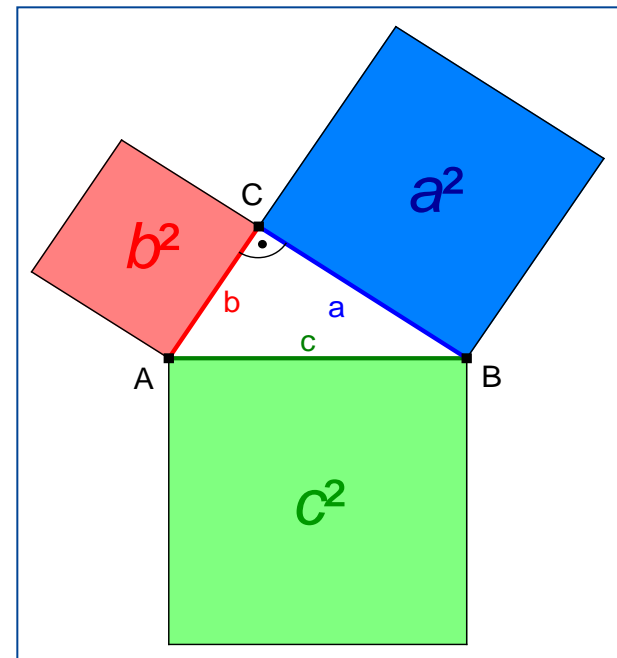
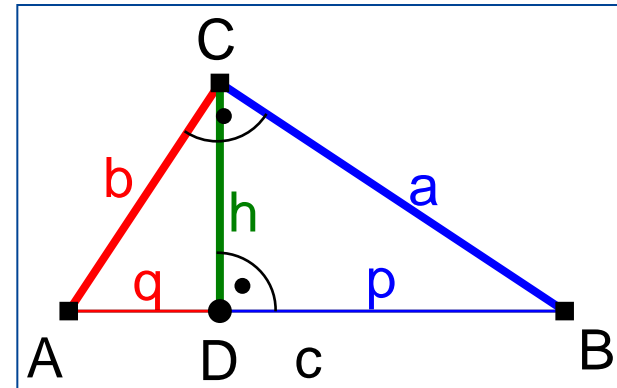
► Satzgruppe des Pythagoras

- Bezieht sich auf rechtwinklige Dreiecke.
- **Hypotenuse**
Dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite des rechtwinkligen Dreiecks
- **Katheten**
Am rechten Winkel anliegende Seiten.

Satz 3.17: Satz des Pythagoras

Bei jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

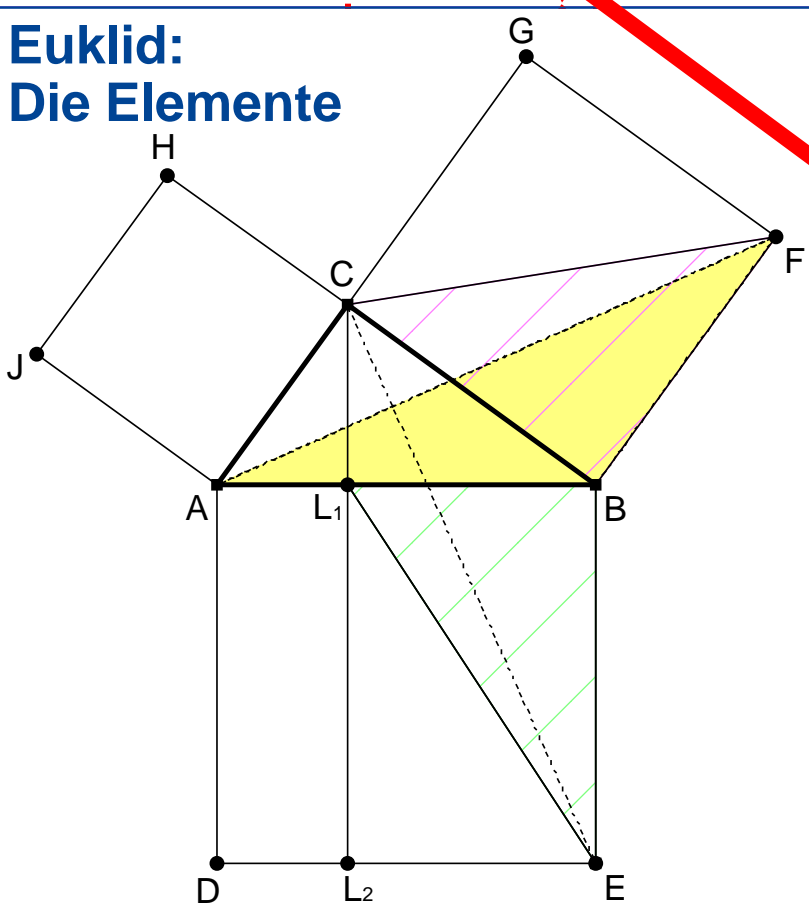


Beweismöglichkeiten Satz des Pythagoras

<http://www.juergen-roth.de/dynageo/pythagoras/pythagoras4.html>

Kongruenzbeweis

**Euklid:
Die Elemente**



$$(I) \quad AC \parallel BF \Rightarrow A_{CBF} = A_{ABF}$$

$$(II) \quad CL_1 \parallel BE \Rightarrow A_{L_1EB} = A_{CEB}$$

(III) Zu zeigen: $ABF \cong CEB$

$$(1) \quad |AB| = |EB| \quad (\text{Hypotenuse } c)$$

$$(2) \quad |\angle FBA| = |\angle CBE| \quad (90^\circ + \beta)$$

$$(3) \quad |BF| = |BC| \quad (\text{Kathete } a)$$

SWS

$$\Rightarrow ABF \cong CEB$$

$$\Rightarrow A_{ABF} = A_{CEB}$$

(I), (II), (III)

$$\Rightarrow A_{CBF} = A_{L_1BE}$$

$$\Rightarrow a^2 = c \cdot |L_1B| \quad (\text{Kathetensatz 1. Teil})$$

Analog ergibt sich:

$$b^2 = c \cdot |AL_1| \quad (\text{Kathetensatz 2. Teil})$$

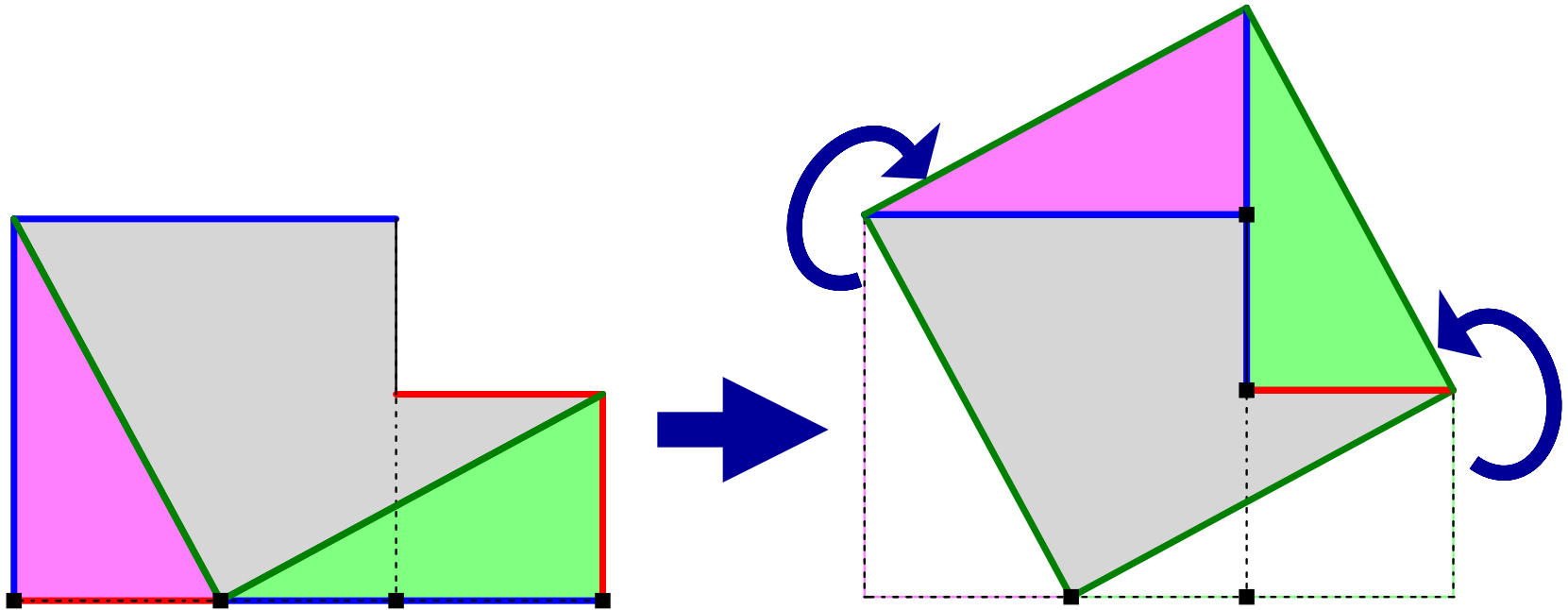
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c \cdot |L_1B| + c \cdot |AL_1|$$

$$= c \cdot (|L_1B| + |AL_1|) = c \cdot c = c^2 \quad \#$$



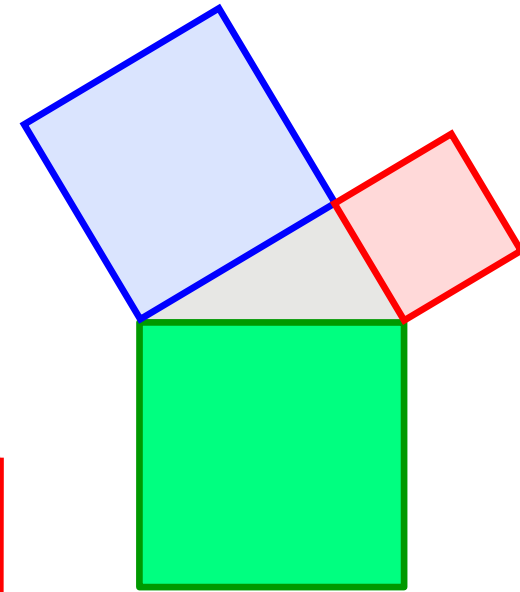
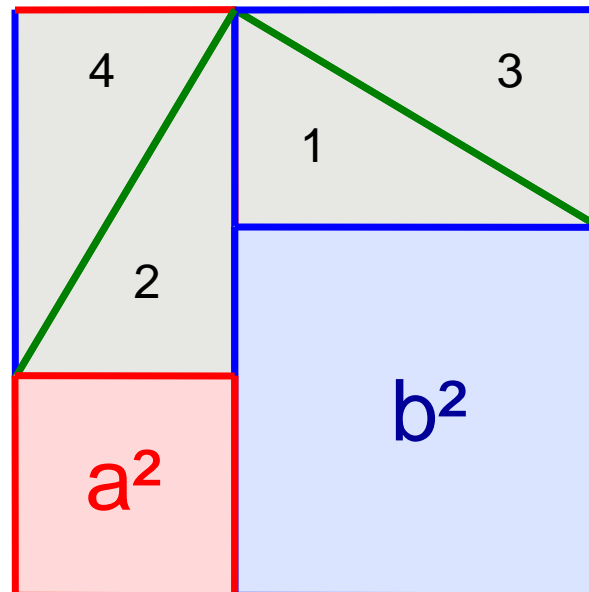
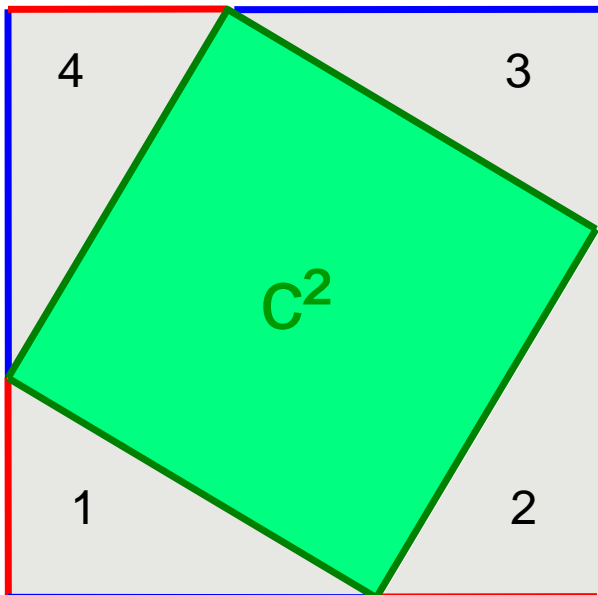
Prinzip der Zerlegungsgleichheit

Stuhl der Braut



Prinzip der Ergänzungsgleichheit

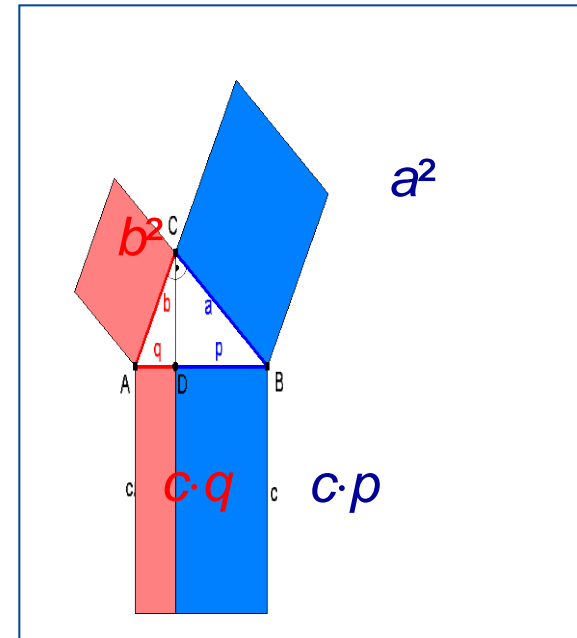
Altindischer Ergänzungsbeweis



Satz 3.18: Kathetensatz (Satz des Euklid)

Bei jedem rechtwinkligen Dreieck hat ein Kathetenquadrat denselben Flächeninhalt wie ein Rechteck mit der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt als Seitenlängen.

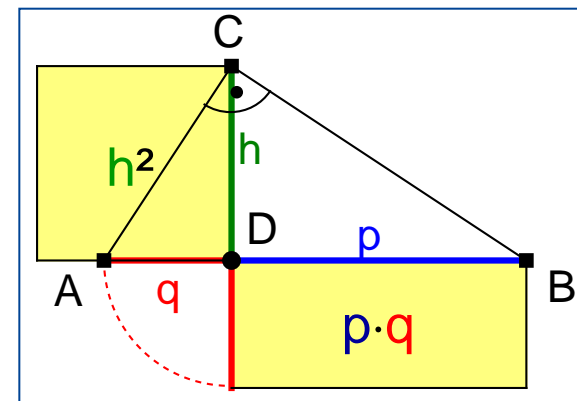
$$a^2 = c \cdot p \quad \text{und} \quad b^2 = c \cdot q$$



Satz 3.19: Höhensatz

Bei jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Höhenquadrat denselben Flächeninhalt wie ein Rechteck mit den beiden Hypotenusenabschnitten als Seitenlängen.

$$h^2 = p \cdot q$$



Beweisidee zum Satz 3.18: Kathetensatz

