



Geometrie

Homepage zur Veranstaltung: <http://www.juergen-roth.de> ▶ Lehre ▶ Geometrie

Geometrie

- 0 Geometrie!?
- 1 Axiome der Elementargeometrie**
- 2 Kongruenzabbildungen
- 3 Längen-, Winkel- und Flächenmessungen
- 4 Elementare Anwendungen
- 5 Ähnlichkeitsabbildungen



Geometrie

Kapitel 1: **Axiome der** **Elementargeometrie**

Kapitel 1: **Axiome der Elementargeometrie**

- 1.1 Inzidenzaxiome
- 1.2 Anordnungsaxiome
- 1.3 Polygone
- 1.4 Der Winkelbegriff
- 1.5 Axiome der Streckenkongruenz
- 1.6 Axiome der Geradenspiegelung
- 1.7 Die Begriffe Senkrechte, Mittelpunkt
und Winkelhalbierende



Kapitel 1: Axiome der Elementargeometrie

1.1 Inzidenzaxiome

▶ Grundbegriffe

- ▶ Die Begriffe *Punkt*, *Gerade* und *Ebene* werden als Grundbegriffe vorausgesetzt.

▶ Bemerkung

- ▶ Die Elemente der gegebenen
 - ▶ Menge **P** werden Punkte genannt und mit lateinischen Großbuchstaben $A, B, C, \dots, P, Q, \dots$
 - ▶ Menge **G** werden Geraden genannt und mit lateinischen Kleinbuchstaben $a, b, c, \dots, g, h, \dots$
 - ▶ Menge **E** werden Ebenen genannt und mit griechischen Kleinbuchstaben $\varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta, \dots$

bezeichnet.

(I₀) Inzidenzaxiom 0

▷ Für das Tripel $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \mathbf{E})$ gilt: $g \in \mathbf{G} \Rightarrow g \subseteq \mathbf{P}$ und $\varepsilon \in \mathbf{E} \Rightarrow \varepsilon \subseteq \mathbf{P}$

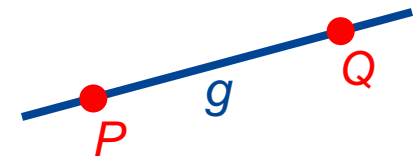
▶ Bezeichnungen

- ▷ Die Zeichen \in bzw. \subseteq werden als „*inzidiert mit*“ (liegt in) gelesen.
- ▷ Jede Teilmenge F von \mathbf{P} wird *Figur* genannt.
- ▷ Ist g eine Gerade und gilt $F \subseteq g$, dann heißt F *linear*.
- ▷ Ist ε eine Ebene und gilt $F \subseteq \varepsilon$, dann heißt F *eben*.
- ▷ Die Punkte einer linearen Figur werden *kollinear*, die Punkte einer ebenen Figur *komplanar* genannt.

(I₁) Inzidenzaxiom 1

- ▷ Jede Gerade g enthält voneinander verschiedene Punkte P, Q .

$$\forall g \in \mathbf{G} \exists P, Q \in g \quad P \neq Q$$



(I₂) Inzidenzaxiom 2

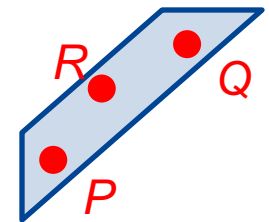
- ▷ Durch zwei Punkte P, Q gibt es genau eine Gerade g .

$$\forall P, Q \in \mathbf{P} \wedge P \neq Q \exists! g \in \mathbf{G} \quad P, Q \in g$$

(I₃) Inzidenzaxiom 3

- ▷ Jede Ebene ε enthält nicht kollineare Punkte P, Q, R .

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{E} \exists P, Q, R \in \mathbf{P} \quad P, Q, R \in \varepsilon \wedge P, Q, R \text{ nicht kollinear}$$



(I₄) Inzidenzaxiom 4

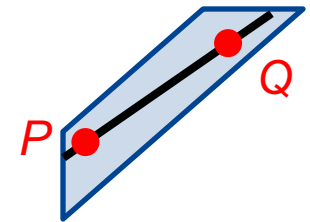
- ▷ Durch nicht kollineare Punkte P, Q, R gibt es genau eine Ebene ε .

$$\forall P, Q, R \in \mathbf{P} \quad P, Q, R \text{ nicht kollinear} \Rightarrow \exists! \varepsilon \in \mathbf{E} \quad P, Q, R \in \varepsilon$$

(I₅) Inzidenzaxiom 5

- ▷ Liegen zwei Punkte P, Q einer Geraden g in einer Ebene ε , dann liegt die Gerade g in der Ebene ε .

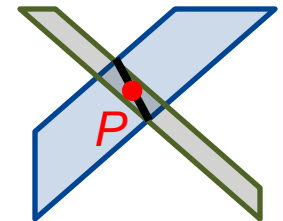
$$\forall P, Q \in \mathbf{P} \quad \forall g \in \mathbf{G} \quad \forall \varepsilon \in \mathbf{E} \quad P, Q \in g \wedge P, Q \in \varepsilon \Rightarrow g \subset \varepsilon$$



(I₆) Inzidenzaxiom 6

- ▷ Für zwei Ebenen ε und η die einen gemeinsamen Punkt besitzen ist $\varepsilon \cap \eta$ eine Gerade.

$$\forall \varepsilon, \eta \in \mathbf{E} \quad \forall P \in \mathbf{P} \quad P \in \varepsilon, \eta \Rightarrow \varepsilon \cap \eta = g \in \mathbf{G}$$



(I₇) Inzidenzaxiom 7

- ▷ Es gibt Punkte P, Q, R, S für die gilt, dass $P \neq Q$ ist und P, Q, R nicht kollinear sowie P, Q, R, S nicht komplanar sind.

$$\exists P, Q, R, S \in \mathbf{P} \quad P \neq Q \wedge P, Q, R \text{ nicht kollinear} \wedge P, Q, R, S \text{ nicht komplanar}$$

Definition 1.1

- ▶ Komplanare Geraden g, h heißen genau dann zueinander **parallel**, wenn $g = h$ oder $g \cap h = \emptyset$. Man schreibt dann: $g \parallel h$
- ▶ Eine Gerade g und eine Ebene ε heißen genau dann zueinander **parallel**, wenn $g \subset \varepsilon$ oder $g \cap \varepsilon = \emptyset$. Man schreibt dann: $g \parallel \varepsilon$
- ▶ Zwei Ebenen ε, η heißen genau dann zueinander **parallel**, wenn $\varepsilon = \eta$ oder $\varepsilon \cap \eta = \emptyset$. Man schreibt dann: $\varepsilon \parallel \eta$

(P) Parallelenaxiom

- ▶ Sind zwei Geraden f und g jeweils parallel zu einer dritten Geraden h , dann sind f und g auch zueinander parallel.

$$\forall_{f,g,h \in \mathbf{G}} f \parallel h \wedge g \parallel h \Rightarrow f \parallel g$$

▶ Bemerkung

- ▶ **(P)** beschreibt die Transitivität der Relation \parallel .

Bezeichnung: Geraden g und h für die gilt $g \cap h = \emptyset$ nennt man **echt parallel**.

Definition 1.2

- ▷ Eine Gerade g heißt die **Verbindungsgerade** der Punkte P und Q (in Zeichen $g = g_{PQ} = PQ$), wenn $P \neq Q$ und $P, Q \in g$.
- ▷ Zwei Geraden g und h **schneiden sich** genau dann im Punkt P , wenn $g \neq h$ und $P \in g, h$.
 P heißt dann der **Schnittpunkt** von g und h (in Zeichen $P = P_{gh}$).
- ▷ Die Ebene ε heißt genau dann die **Verbindungsebene** von P, Q, R (in Zeichen $\varepsilon = \varepsilon_{PQR}$), wenn P, Q, R nicht kollinear sind und in ε liegen.

Satz 1.1

- a) Durch einen Punkt P und eine Gerade g mit $P \notin g$ wird genau eine Ebene festgelegt.
- b) Durch zwei verschiedenen Geraden g und h die parallel sind oder sich schneiden, wird genau eine Ebene festgelegt.

▶ Beweis zu Satz 1.1a

Satz 1.1a: Durch einen Punkt P und eine Gerade g mit $P \notin g$ wird genau eine Ebene festgelegt.

▷ Existenz:

- ▶ P liegt nicht auf der Geraden g .
- ▶ g enthält nach **(I₁)** zwei verschiedene Punkte Q, R .
- ▶ Damit sind P, Q, R nicht kollinear und legen nach **(I₄)** eine Ebene fest.

▷ Eindeutigkeit:

- ▶ Annahme: Es gibt zwei Ebenen ε und η durch g und P .
- ▶ Dann gilt: $P, Q, R \in \varepsilon, \eta$.
- ▶ Nach **(I₄)** folgt daraus $\varepsilon = \eta$. #

▶ Beweis zu Satz 1.1b

▷ Übungsaufgabe

Definition 1.3

- ▷ Eine Ebene ε heißt die **Verbindungsebene** des Punktes P und der Geraden g (in Zeichen $\varepsilon = \varepsilon_{gP}$) genau dann, wenn $P \notin g$, $P \in \varepsilon$ und $g \subset \varepsilon$.
- ▷ Eine Ebene ε heißt die **Verbindungsebene** der Geraden g und h (in Zeichen $\varepsilon = \varepsilon_{gh}$) genau dann, wenn $g \neq h$ und $g, h \subset \varepsilon$.

P-Satz 1.2

- ▷ Durch einen Punkt P gibt es zu einer Geraden g **höchstens** eine Parallele: $P \in f, h \parallel g \Rightarrow f = h$ **(EP)**

- ▶ **Beweis** (Langfassung: $P \in f \wedge P \in h \wedge f \parallel g \wedge h \parallel g \Rightarrow f = h$)
- ▷ Aus $P \in f, h \parallel g$ folgt nach **(P)** zunächst $f \parallel h$. Da $P \in f \cap h$ ist, gilt $f \cap h \neq \emptyset$. Daraus folgt mit der Definition von $f \parallel h$ direkt: $f = h$ #

► Bemerkungen

- ▶ Man kann zeigen, dass **(P)** unter der Voraussetzung **(I₁)** bis **(I₇)** gleichbedeutend mit **(EP)** dem ***Euklidischen Parallelenaxiom*** ist.
- ▶ Es lässt sich sogar zeigen, dass gilt: Zu jeder Geraden gibt es durch jeden Punkt ***genau*** eine Parallele.
- ▶ Das Parallelenaxiom hat einen Sonderstatus:
 - ▶ Es gibt Geometrien, in denen alle Axiome bis auf das Parallelenaxiom gelten und mit denen der uns umgebende Raum (im Rahmen der Messgenauigkeit) auch beschrieben werden kann.
- ▶ Sätze die ohne das Parallelenaxiom beweisbar sind, umfassen die sogenannte ***absolute Geometrie***.
- ▶ In diesem Skript werden Sätze, für deren Beweis das Parallelenaxiom **(P)** benötigt wird, als „**P-Satz**“ bezeichnet.

P-Satz 1.3

▶ In \mathbf{G} ist \parallel eine Äquivalenzrelation.

▶ Erinnerung:

▶ Eine Äquivalenzrelation \sim ist eine Relation, die folgenden Eigenschaften genügt:

- ▶ Reflexivität: $a \sim a$
- ▶ Symmetrie: $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$
- ▶ Transitivität: $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

▶ Beweis

▶ Nach Definition 1.1 gilt für parallele Geraden g, h entweder $g = h$ oder $g \cap h = \emptyset$.

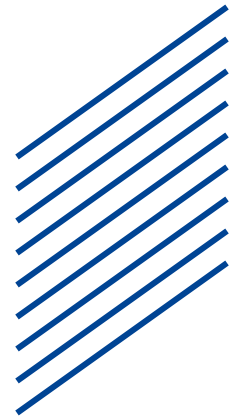
Damit ist \parallel mit $g = g$ reflexiv und

wegen $g = h \Leftrightarrow h = g$ sowie $g \cap h = \emptyset \Leftrightarrow h \cap g = \emptyset$ symmetrisch.

Wegen **(P)** ist \parallel auch transitiv. #

Bemerkung:

Aus P-Satz 1.3 folgt:
 \parallel teilt die Menge aller Geraden in Äquivalenzklassen ein. Jede solche Klasse ist eine Parallelschar und legt eine **Richtung** fest.

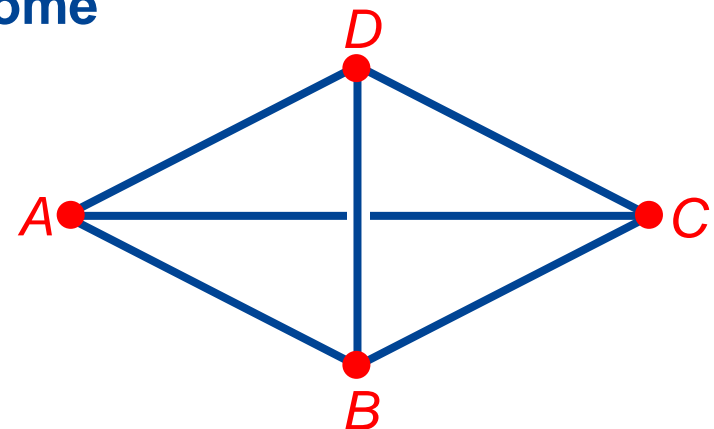


► Anmerkung

- ▶ Mit dem Inzidenzaxiomen kann *nicht* alles hergeleitet werden, was wir aus der anschaulichen Geometrie kennen.
- ▶ Beispielsweise ist mit ihnen nicht beweisbar,
 - ▶ dass Geraden mehr als zwei und Ebenen mehr als drei Punkte enthalten,
 - ▶ dass zu einer Geraden durch einen Punkt immer eine (echte) Parallele existiert.

► Modell M des Systems der Inzidenzaxiome

- ▶ $\mathbf{P}_M := \{A, B, C, D\}$
- ▶ $\mathbf{G}_M := \{\{X, Y\} \subset \mathbf{P}_M \mid X \neq Y\}$
- ▶ $\mathbf{E}_M := \{\mathbf{P}_M \setminus \{X\} \mid X \in \mathbf{P}_M\}$
- ▶ Überprüfen Sie die Gültigkeit der Axiome **(I₁)** bis **(I₇)** für dieses Modell.





Kapitel 1: Axiome der Elementargeometrie

1.2 Anordnungsaxiome

(A₀) Anordnungsaxiom 0

- ▶ Jeder Geraden $g \in \mathbf{G}$ werden zwei zueinander entgegengesetzte Ordnungsrelationen zugeordnet.



▶ Bezeichnungen

- ▶ Jede dieser Ordnungsrelationen wird **Durchlaufsin**n genannt.
- ▶ Der jeweils ausgezeichnete Durchlaufsin von g wird mit $<$ bezeichnet. Wenn für zwei Punkte A und B von g gilt $A < B$, dann sagt man „ A **liegt vor** B “ oder kurz „ A **vor** B “.

(A₁) Anordnungsaxiom 1

▷ Die Menge der Punkte einer Geraden g ist **streng linear geordnet**, d. h. bezüglich eines Durchlaufsinns $<$ gilt:

a) $\forall_{A \in g} A \not< A$ (Irreflexivität)

b) $\forall_{A, B \in g} A < B \Rightarrow B \not< A$ (Asymmetrie)

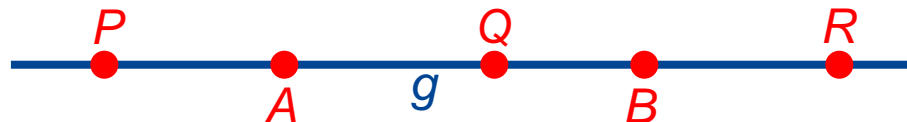
c) $\forall_{A, B, C \in g} A < B \wedge B < C \Rightarrow A < C$ (Transitivität)

d) $\forall_{A, B \in g} A \neq B \Rightarrow A < B \vee B < A$ (Linearität)

(A₂) Anordnungsaxiom 2

▷ Sind A und B zwei verschiedene Punkte einer Geraden g , mit $A < B$, dann gibt es auf g noch drei weitere Punkte P, Q, R mit $P < A < Q < B < R$.

$$\forall_{A, B \in g} \exists_{P, Q, R \in g} P < A < Q < B < R$$



Definition 1.4

- ▷ Der Punkt B **liegt zwischen** A und C genau dann, wenn $B \in AC$ und entweder $A < B < C$ oder $C < B < A$ gilt.
Für B **liegt zwischen** A und C schreibt man kurz A - B - C .
- ▷ Die **Menge der zwischen A und B liegenden Punkte** wird mit $]AB[$ bezeichnet.
- ▷ $[AB] :=]AB[\cup \{A, B\}$ heißt die (abgeschlossene) **Strecke** mit den **Endpunkten** A und B .
- ▷ $]AB[$ ist das **Innere** von $[AB]$ und wird **offene Strecke** genannt.
 - ▶ Für $A = B$ ist $]AB[= \emptyset$ und $[AB] = \{A\}$.
- ▷ Die Menge $g_A := \{X \in g \mid A = X \vee A < X\}$ heißt **Halbgerade** oder Strahl mit dem Anfangspunkt A .

Wird der Anfangspunkt ausgenommen, so entsteht eine **offene Halbgerade** und man schreibt $g_{(A)} = g_A \setminus \{A\} = \{X \in g \mid A < X\}$.

► Bemerkung

- Jeder Punkt A einer Geraden g zerlegt g in zwei offene Halbgeraden, nämlich außer $g_{(A)}$ auch die zu $g_{(A)}$ **entgegengesetzte offene Halbgerade** $g_{(A)}^* := g \setminus g_A = \{X \in g \mid X < A\}$.



- Sind eine Gerade g und ein Anfangspunkt A vorgegeben, so ist erst dann klar, welche der beiden möglichen Halbgeraden gemeint ist, wenn für einen weiteren Punkt $B \in g$ bekannt ist, ob für ihn $A < B$ oder $B < A$ gilt.

► Bezeichnung

- Sind zwei Punkte $A, B \in g$ mit $A \neq B$ gegeben, dann bezeichnet $[AB$ die **Halbgerade** mit Anfangspunkt A , auf der B liegt und $]AB$ die entsprechende **offene Halbgerade**.

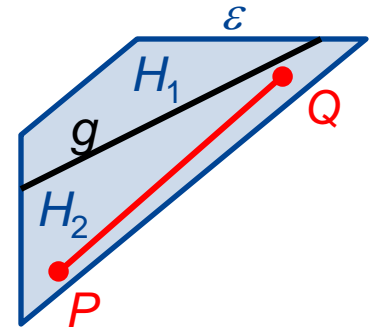
(A₃) Anordnungsaxiom 3

▷ Zu jeder Ebene ε und jeder in ε enthaltenen Geraden g gibt es genau eine Menge $\{H_1, H_2\}$, für die gilt:

a) $H_1 \cup H_2 = \varepsilon \setminus g$

b) $P, Q \in \varepsilon \setminus g$ liegen genau dann in derselben Halbebene, wenn $[PQ] \cap g = \emptyset$.

H_1 und H_2 werden **offene Halbebenen** in ε bzgl. der Geraden g genannt.



(A₄) Anordnungsaxiom 4

▷ Zu jeder Ebene ε gibt es genau eine Menge $\{H_1, H_2\}$, für die gilt:

a) $H_1 \cup H_2 = \mathbf{P} \setminus \varepsilon$

b) $P, Q \in \mathbf{P} \setminus \varepsilon$ liegen genau dann im selben Halbraum, wenn $[PQ] \cap \varepsilon = \emptyset$.

H_1 und H_2 heißen **offene Halbräume** bzgl. der Ebene ε .

Satz 1.4

- a) Sind P und Q Punkte derselben Halbebene H in ε bzgl. der Geraden g , dann gehören auch alle *inneren* Punkte von $[PQ]$ zu H .
- b) Ist $P \in g$ und $Q \notin g$, dann gehört die offene Strecke $]PQ[$ ganz zu der Halbebene in ε bzgl. der Geraden g , in der Q liegt.

► **Beweis:** Übungsaufgabe

Definition 1.4a

- ▷ Ist H eine offene Halbebene in ε bzgl. $g = g_{PQ}$ und $R \in H$, dann heißen $PQR^+ = gR^+ := H \cup g$ und $PQR^- = gR^- := \varepsilon \setminus H$ **abgeschlossene Halbebenen**.
- ▷ Analog werden für $S \notin \varepsilon = \varepsilon_{PQR}$ die **abgeschlossenen Halbräume** $PQRS^+ = \varepsilon S^+$ bzw. $PQRS^- = \varepsilon S^-$ eingeführt.
- ▷ Ist p eine offene Halbgerade mit $p =]PQ \subset g$ und H wie oben definiert, dann nennt man $p \cup H$ bzw. $]PQ \cup H$ eine **Fahne**.

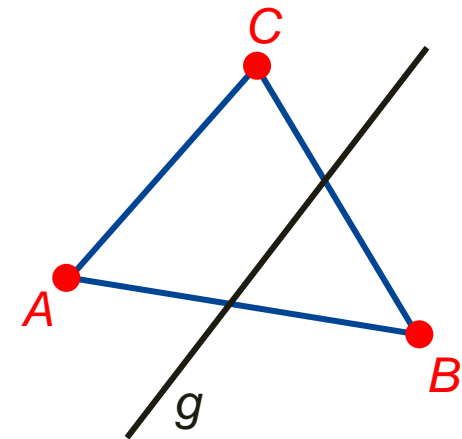


► Bemerkung

- Das Anordnungsaxiom (\mathbf{A}_3) ist gleichwertig zu einer Aussage, die von Hilbert in seinen „Grundlagen der Geometrie“ anstelle des Axioms (\mathbf{A}_3) verwendet wurde. Es wird nach Pasch, der es als erstes aufgestellt, hat auch *Axiom von Pasch* (**AP**) genannt.

Satz 1.5 „Axiom von Pasch“ (AP)

- Sind in einer Ebene ε drei nicht kollineare Punkte A , B , C und eine Gerade g beliebig gegeben, dann gilt: Trifft die Gerade g die offene Strecke $]AB[$, aber keinen der Punkte A , B , C , dann trifft g auch mindestens eine der offenen Strecken $]AC[$ oder $]BC[$.



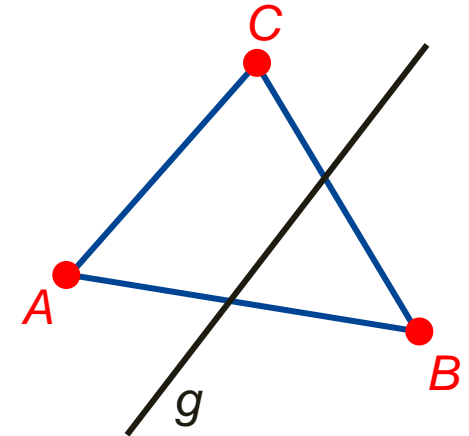
► Beweis (Widerspruchsbeweis)

► *Annahme*: g trifft die offene Strecke $]AB[$ (es gilt also $g \cap]AB[\neq \emptyset$) sowie *keinen* der drei Punkte A , B , C und keine der offenen Strecken $]AC[$ und $]BC[$.

- (1) Aus $g \cap]AC[= \emptyset$ folgt mit **(A₃)**, dass A und C in derselben Halbebene bzgl. g liegen.
- (2) Aus $g \cap]BC[= \emptyset$ folgt mit **(A₃)**, dass B und C in derselben Halbebene bzgl. g liegen.
- (3) Aus (1) und (2) folgt, dass A und B in derselben Halbebene bzgl. g liegen, also $g \cap]AB[= \emptyset$.

💣 **Widerspruch zur Voraussetzung**

► Damit ist die Annahme falsch und folglich deren Gegenteil, die Aussage des Satzes wahr.



#



Kapitel 1: Axiome der Elementargeometrie

1.3 Polygone

Definition 1.5

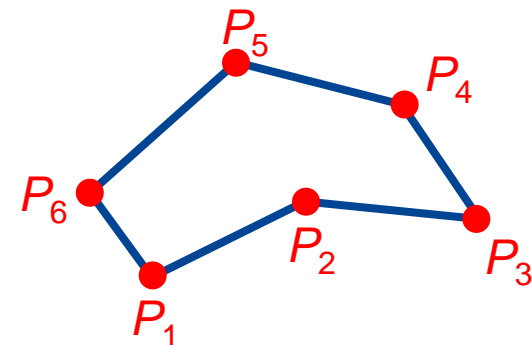
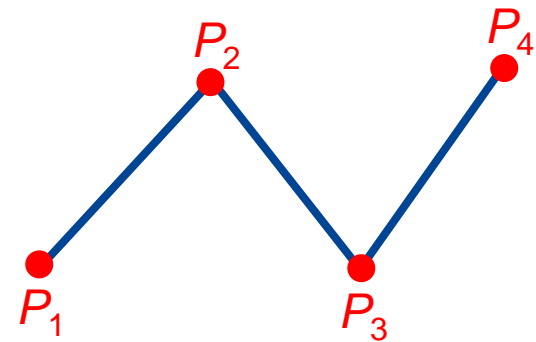
- ▶ Für n Punkte $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ einer Ebene ε heißt

$$[P_1P_2] \cup [P_2P_3] \cup \dots \cup [P_{n-1}P_n]$$

Streckenzug oder **Polygonzug** mit dem Anfangspunkt P_1 und dem Endpunkt P_n .

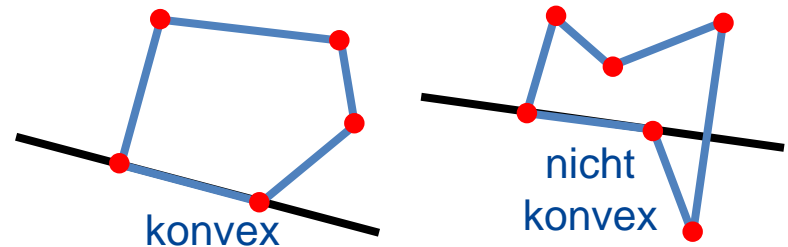
- ▶ Die Punkte $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ werden **Ecken**, die Strecken $[P_1P_2], [P_2P_3], \dots, [P_{n-1}P_n]$ **Seiten** des Polygonzugs genannt.

- ▶ Ein Polygonzug heißt **geschlossen**, wenn sein Anfangspunkt gleichzeitig der Endpunkt ist. Ein geschlossener Polygonzug $P_1P_2P_3 \dots P_n = [P_1P_2] \cup [P_2P_3] \cup \dots \cup [P_{n-1}P_n] \cup [P_nP_1]$ heißt **Polygon** oder **n -Eck**.



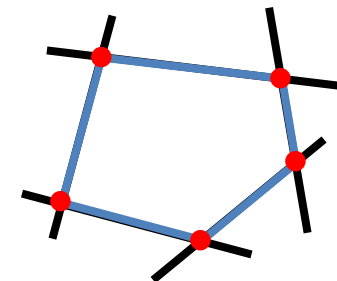
Definition 1.6

- ▶ Eine Gerade g heißt genau dann **Trägergerade** der Polygonseite $[P_k P_{k+1}]$, wenn gilt: $[P_k P_{k+1}] \subset g$.



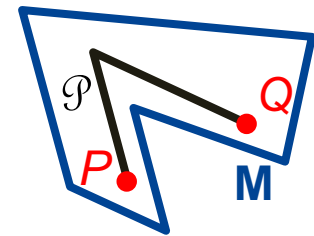
- ▶ Die Trägergerade g einer Polygonseite $[P_k P_{k+1}]$ heißt genau dann **Stützgerade**, wenn alle anderen Eckpunkte des Polygons in derselben Halbebene bzgl. g liegen.

- ▶ Ein Polygon heißt genau dann **konvex**, wenn die Trägergeraden aller Polygonseiten Stützgeraden sind.



Definition 1.6a

- ▶ Zwei Punkte P und Q heißen in einer Ebene ε **verbindbar** in Bezug auf eine Punktmenge \mathbf{M} , wenn es einen Polygonzug \mathcal{P} in ε mit Anfangspunkt P und Endpunkt Q gibt, der \mathbf{M} nicht trifft. ($\exists_{\mathcal{P} \in \varepsilon} \mathcal{P} \cap \mathbf{M} = \emptyset$)



▶ Bemerkung

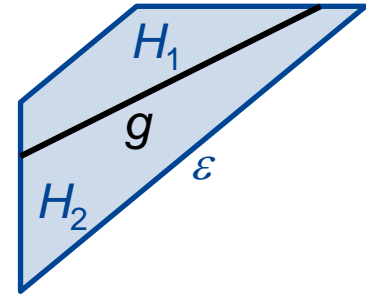
- ▶ Die Relation „verbindbar in ε bzgl. $\mathbf{M} \subset \varepsilon$ “ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\varepsilon \setminus \mathbf{M}$. (Beweis: Übungsaufgabe)

Definition 1.7

- ▶ Ist \mathbf{M} eine echte Teilmenge von ε , dann heißen die durch die Relation „verbindbar“ auf der Menge $\varepsilon \setminus \mathbf{M}$ definierten Äquivalenzklassen die durch \mathbf{M} in ε bestimmten **Gebiete**.

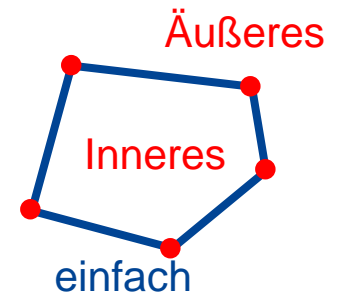
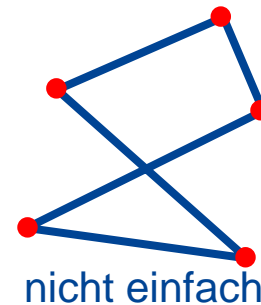
► Beispiel

- Die durch die Gerade $g \subset \varepsilon$ in der Ebene ε bestimmten Gebiete sind die Halbebenen H_1 und H_2 .



Definition 1.8

- Ein Polygon $P_1P_2P_3 \dots P_n$ heißt genau dann **einfach (zusammenhängend)**, wenn $\varepsilon \setminus P_1P_2P_3 \dots P_n$ bezüglich der Streckenzugäquivalenz genau zwei Äquivalenzklassen (Gebiete) enthält.
- Die Klasse, die keine Geraden enthält nennt man das **Innere** (Gebiet) des Polygons, die andere Klasse das **Äußere** (Gebiet) des Polygons.

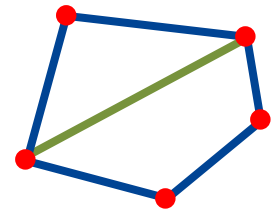


Satz 1.6

- ▶ Ein einfach zusammenhängendes Polygon ist genau dann **konvex**, wenn je zwei Punkte seines Inneren durch eine Strecke verbindbar sind, die ganz im Inneren des Polygons liegt.

Definition 1.9

- ▶ Eckpunkte eines Polygons heißen **benachbart**, wenn sie Endpunkte derselben Polygonseite sind.
- ▶ Eine Strecke, die zwei nicht benachbarte Eckpunkte eines Polygons verbindet, heißt **Diagonale** des Polygons.

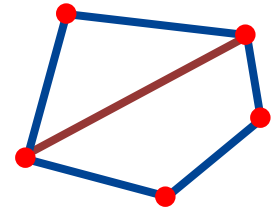


Satz 1.7

- ▶ Ein einfach zusammenhängendes Polygon ist genau dann **konvex**, wenn seine Diagonalen (als offene Strecken) ganz zum Inneren des Polygons gehören.

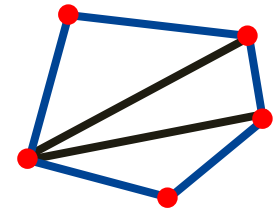
Satz 1.8

- ▶ Das Innere eines konvexen Polygons wird durch jede seiner Diagonalen in zwei konvexe Gebiete zerlegt.



▶ Bemerkung

- ▶ Zeichnet man alle Diagonalen in ein konvexes Polygon ein, die von einem Eckpunkt ausgehen, so wird das Polygon in Dreiecke **zerlegt**.



Satz 1.9

- Ein konvexes **n -Eck** (Polygon mit n Ecken) lässt sich von jeder Ecke aus, mit Hilfe von $n - 3$ Diagonalen in $n - 2$ Dreiecke zerlegen.
- Jedes einfach zusammenhängende Polygon ist **triangulierbar**, d.h. in endlich viele Dreiecke zerlegbar.



Kapitel 1: Axiome der Elementargeometrie

1.4 Der Winkelbegriff

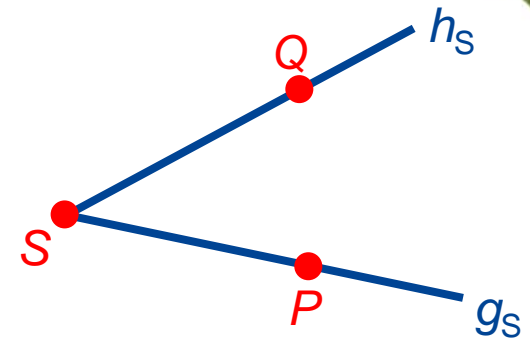
► **Bemerkung**

Die Bezeichnung „Winkel“ wird in verschiedensten Bedeutungen verwendet:

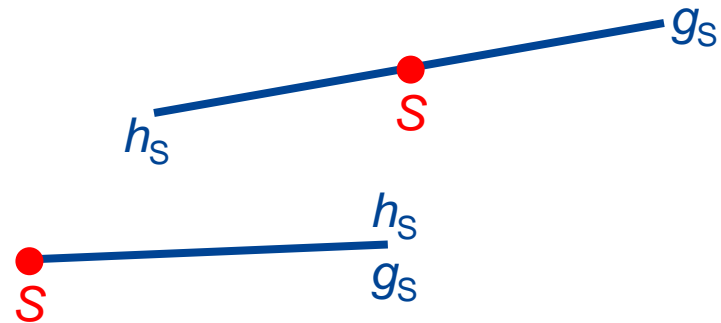
- ▷ **Winkel**: Paar zweier Halbgeraden
- ▷ **Winkelfeld**: Von den Schenkeln eines Winkels definiertes Gebiet
- ▷ **Orientierter** (gerichteter) **Winkel**: Geordnetes Paar zweier Halbgeraden
- ▷ **Schnittwinkel** als orientierter Winkel zwischen zwei Geraden
- ▷ **Größe eines Winkels**, etwa im Zusammenhang mit Winkeln in Dreiecken oder anderen Figuren
- ▷ **Winkelmaß**, wenn es darum geht Winkelgrößen durch Maßzahl und Einheit genau zu bezeichnen

Definition 1.10

- ▶ Eine Menge $\{g_S, h_S\}$ aus zwei Halbgeraden g_S und h_S mit demselben Anfangspunkt S heißt **Winkel** mit dem **Scheitel** S und den **Schenkeln** g_S und h_S . Man schreibt $\angle(g_S, h_S) := \{g_S, h_S\}$.

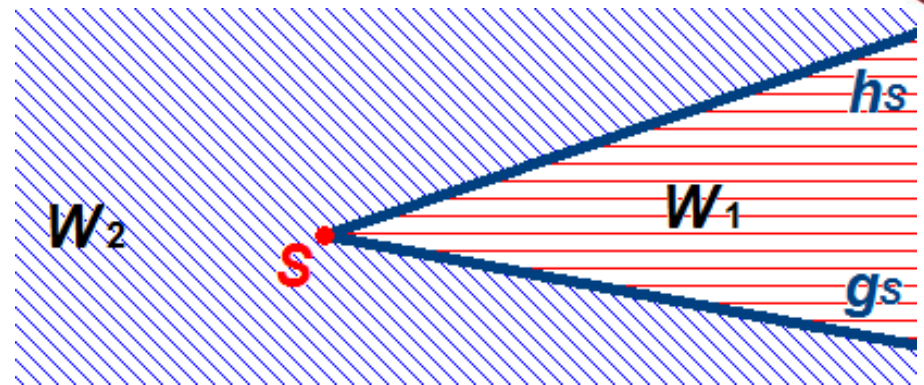


- ▶ Ist ein Punkte $P \in g_{(S)}$ und ein Punkt $Q \in h_{(S)}$ gegeben, gilt also $g_S = [SP$ und $h_S = [SQ$, dann schreibt man $\angle PSQ = \angle(g_S, h_S)$.
- ▶ Liegen die beiden Schenkel eines Winkels auf derselben Geraden
 - ▶ und gilt $h_S = g_S^*$ dann heißt $\angle(g_S, h_S)$ **gestreckter Winkel**.
 - ▶ und gilt $h_S = g_S$ dann heißt $\angle(g_S, h_S)$ **Nullwinkel**.



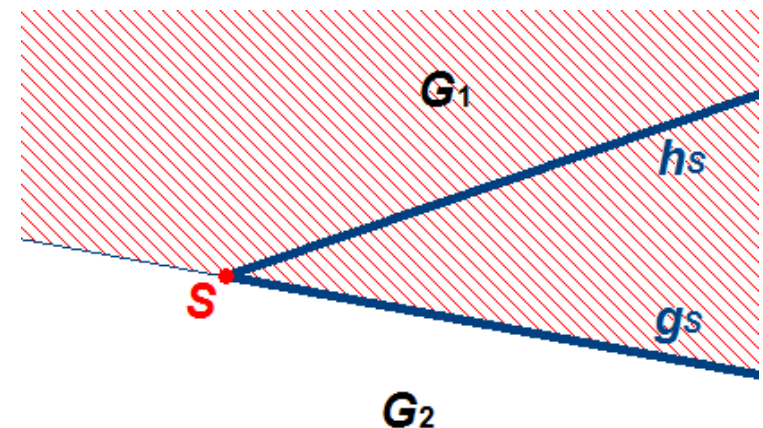
Satz 1.10

- ▷ Sind g_S und h_S zwei verschiedenen Halbgeraden mit demselben Anfangspunkt S in der Ebene ε , dann werden durch die Menge $g_S \cup h_S$ genau zwei Gebiete in ε festgelegt. Man nennt sie die zu $\angle(g_S, h_S)$ gehörenden **Winkelfelder** W_1 und W_2 .



▶ Bezeichnung

- ▷ Für einen Winkel $\angle(g_S, h_S)$ wird die Halbebene bzgl. g , in der $h_{(S)}$ liegt mit G_1 bezeichnet, die andere mit G_2 . Entsprechend wird die Halbebene bzgl. h , in der $g_{(S)}$ liegt mit H_1 bezeichnet, die andere mit H_2 .



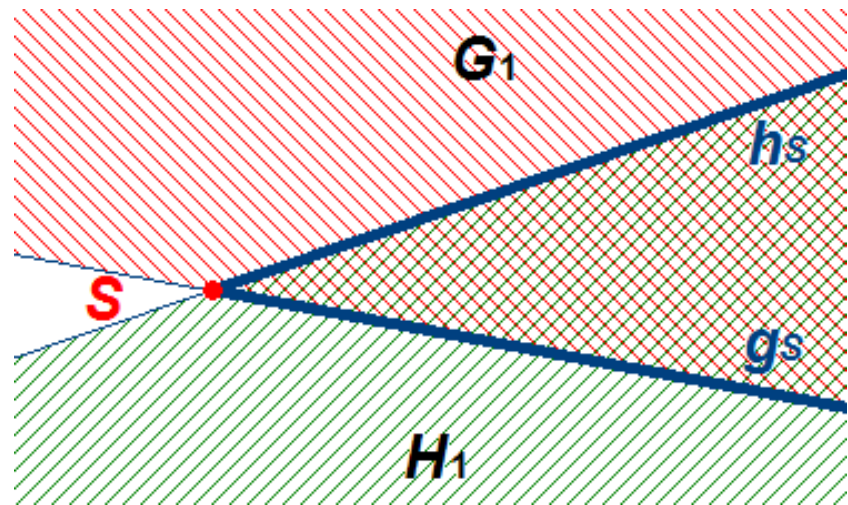
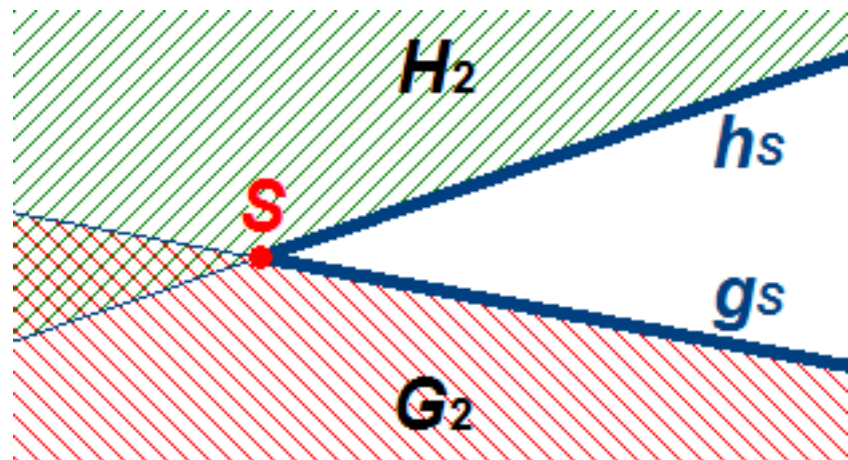
Definition 1.11

- ▷ Ein Winkelfeld W eines Winkels $\angle(g_S, h_S)$ heißt genau dann **überstumpf**, wenn gilt:

$$W = G_2 \cup H_2$$

- ▷ Ein Winkelfeld W eines Winkels $\angle(g_S, h_S)$ heißt genau dann **nicht überstumpf**, wenn gilt:

$$W = G_1 \cap H_1$$

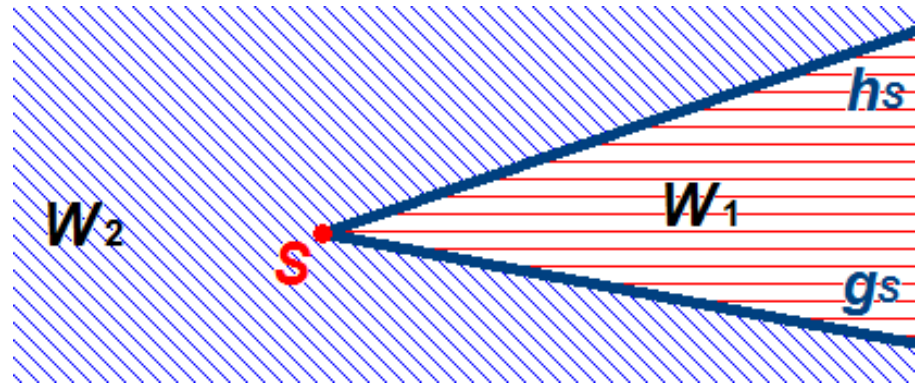


► Beweis zu Satz 1.10

► Gemäß Definition 1.11
sei $W_1 = G_1 \cap H_1$ und
 $W_2 = G_2 \cup H_2$.

► Zu zeigen ist:

- $W_1 \neq \emptyset \wedge W_2 \neq \emptyset \wedge W_1 \cup W_2 = \varepsilon \setminus (g_S \cup h_S)$
- Alle Punkte aus W_1 sind in ε bzgl. $g_S \cup h_S$ verbindbar.
- Alle Punkte aus W_2 sind in ε bzgl. $g_S \cup h_S$ verbindbar.
- Kein Punkt aus W_1 ist in ε bzgl. $g_S \cup h_S$ mit einem Punkt aus W_2 verbindbar.



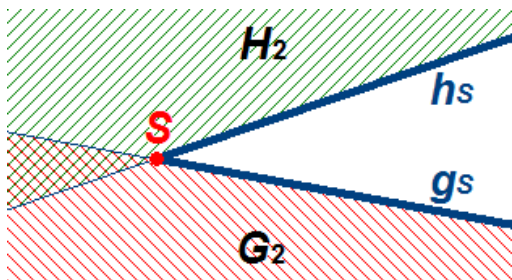
a) Zu Zeigen:

$$W_1 \neq \emptyset \wedge W_2 \neq \emptyset \wedge \\ W_1 \cup W_2 = \varepsilon \setminus (g_S \cup h_S)$$

$$P \in h_{(S)} \subset G_1 \wedge Q \in g_{(S)} \subset H_1 \\ \stackrel{\text{Satz 1.4b}}{\Rightarrow}]PQ[\subset G_1 \cap H_1 = W_1 \\ \Rightarrow W_1 \neq \emptyset$$

$$W_2 = G_2 \cup H_2 \neq \emptyset$$

$$W_1 \cup W_2 \\ = W_1 \cup (G_2 \cup H_2) \\ = W_1 \cup \varepsilon \setminus (g_S \cup h_S \cup W_1) \\ = \varepsilon \setminus (g_S \cup h_S)$$



#

b) Zu Zeigen:

Alle Punkte aus W_1 sind
bzgl. $g_S \cup h_S$ verbindbar.

$$P, Q \in W_1 \\ \Leftrightarrow P, Q \in G_1 \cap H_1 \\ \Leftrightarrow P, Q \in G_1 \wedge P, Q \in H_1$$

Mit Satz 1.4 folgt daraus:

$$[PQ] \subset G_1 \wedge [PQ] \subset H_1 \\ \Leftrightarrow [PQ] \subset G_1 \cap H_1 = W_1 \\ \Rightarrow P \text{ und } Q \text{ sind bzgl. } g_S \cup h_S \\ \text{verbindbar.}$$

#

c) **Zu Zeigen:**
Alle Punkte aus W_2 sind bzgl. $g_S \cup h_S$ verbindbar.

$$P, Q \in W_2 = G_2 \cup H_2$$

$$\Rightarrow (P \in G_2 \vee P \in H_2) \wedge (Q \in G_2 \vee Q \in H_2)$$

Sei $R \in G_2 \cap H_2$

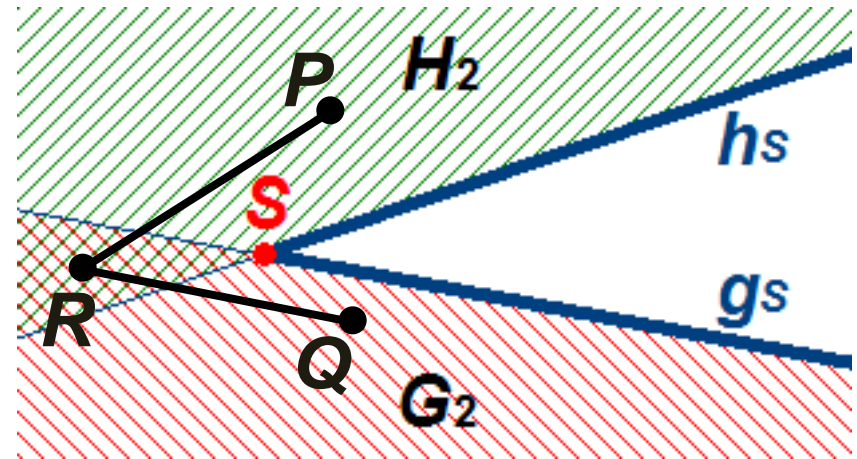
$$\Leftrightarrow R \in G_2 \wedge R \in H_2$$

$$\Rightarrow R \text{ liegt mit } P \text{ in derselben Halbebene und } R \text{ liegt mit } Q \text{ in derselben Halbebene.}$$

$$\Rightarrow [PR] \subset W_2 \wedge [RQ] \subset W_2$$

$$\Rightarrow [PR] \cup [RQ] \subset W_2$$

$$\Rightarrow P, Q \text{ sind bzgl. } g_S \cup h_S \text{ verbindbar.}$$



d) **Zu Zeigen:**
Kein Punkt aus W_1 ist bzgl. $g_S \cup h_S$ mit einem Punkt aus W_2 verbindbar.



Es genügt zu zeigen:

$$\neg (\exists_{[PQ]} P \in W_1 \wedge Q \in W_2 \wedge [PQ] \cap (g_S \cup h_S) = \emptyset)$$

#

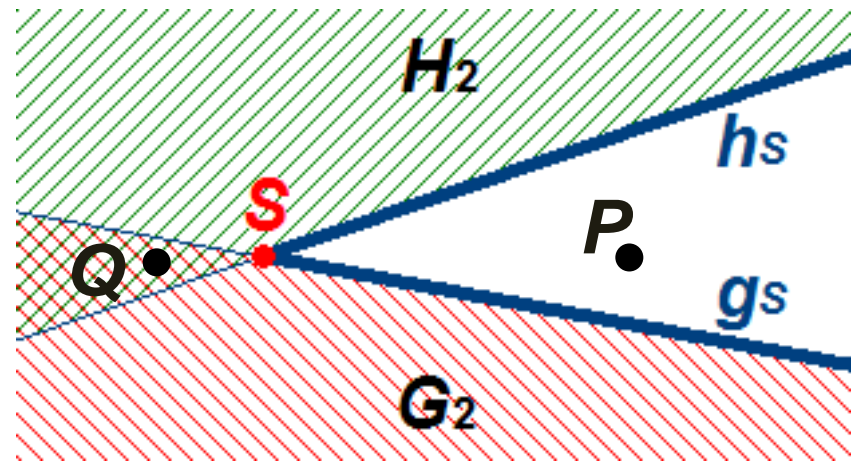
Annahme:

$$\exists_{[PQ]} P \in W_1 \wedge Q \in W_2 \\ \wedge [PQ] \cap (g_S \cup h_S) = \emptyset$$

- i. Ist $Q \in G_1 \cap W_2$, dann schneidet $[PQ]$ nach **(A₃)** die Halbgerade h_S . 
- ii. Ist $Q \in H_1 \cap W_2$, dann schneidet $[PQ]$ nach **(A₃)** die Halbgerade g_S . 
- iii. Ist $Q \in G_2 \cap H_2$, dann gilt nach **(A₃)**, weil P und Q bzgl. g und h in verschiedenen Halbebenen liegen:

$$\exists_{R \in g} [PQ] \cap g = \{R\} \text{ und} \\ \exists_{S \in h} [PQ] \cap h = \{S\}$$

R liegt wegen der Annahme auf $g_{(S)}$ *.




Daraus folgt nach Satz 1.4b:

$$]RP[\subset G_1$$

Wegen $R \in H_2$ und $P \in H_1$ folgt daraus $]RP[\cap h_S \neq \emptyset$.

Da $[PQ] \supset]RP[$ folgt:

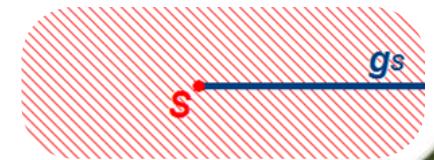
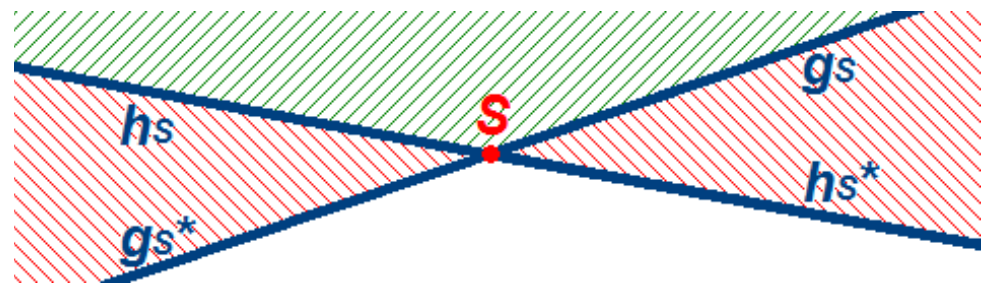
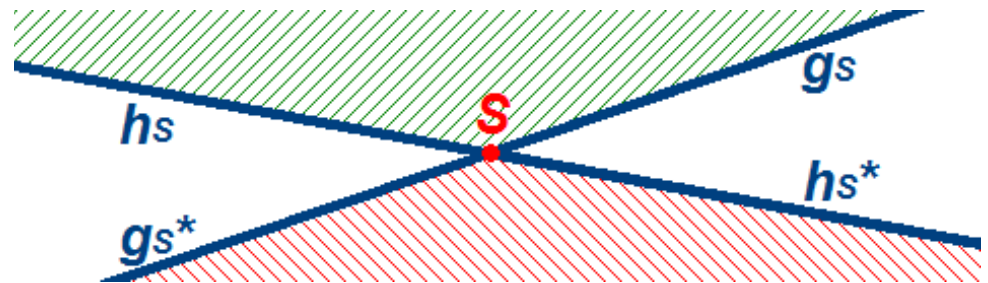
$$[PQ] \cap h_S \neq \emptyset \quad \text{$$

Analog ergibt sich für den Schnittpunkt S von $[PQ]$ mit h :

$$[PQ] \cap g_S \neq \emptyset \quad \text{ \quad \#}$$

Definition 1.12

- ▶ Der Winkel $\angle(g_S^*, h_S^*)$ heißt **Scheitelwinkel** des Winkels $\angle(g_S, h_S)$.
- ▶ Die Winkel $\angle(g_S, h_S^*)$ und $\angle(g_S^*, h_S)$ heißen **Nebenwinkel** des Winkels $\angle(g_S, h_S)$.
- ▶ Ein Winkel mit $g_S = h_S$ und der Punktmenge $\varepsilon \setminus g_S$ als zugehörigem Winkelfeld heißt **Vollwinkel**.



- ▶ **Bemerkung:** Aus der Definition folgt direkt: *Nebenwinkel ergänzen sich zu einem gestreckten Winkel. Scheitelwinkel sind gleich groß*, weil sie vom selben Winkel zu einem gestreckten Winkel ergänzt werden.

► Bemerkung

► Der bisherige Winkelbegriff ist dadurch gekennzeichnet, dass nicht zwischen den beiden Schenkeln p und q unterschieden wird. Es gilt:

$$\angle(p, q) = \{p, q\} = \angle(q, p)$$

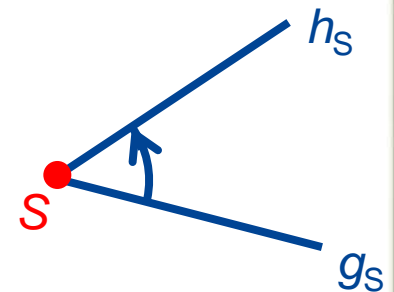
► Für Drehungen wird ein weiterer Winkelbegriff benötigt, der sogenannte orientierte (bzw. gerichtete) Winkel. Bei ihm wird zwischen dem ersten und zweiten Schenkel des Winkels unterschieden. Es gilt: $\sphericalangle(p, q) = \sphericalangle(q, p) \Leftrightarrow p = q$

Definition 1.13

► Ein **orientierter** (bzw. gerichteter) **Winkel** ist ein geordnetes Paar (g_S, h_S) aus zwei Halbgeraden g_S und h_S , die denselben Anfangspunkt S besitzen.

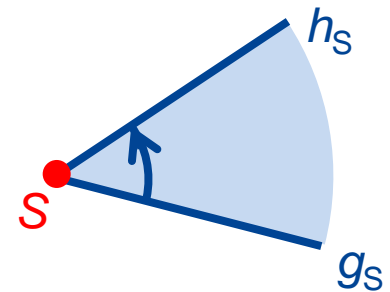
► Man schreibt: $\sphericalangle(g_S, h_S) := (g_S, h_S)$

► g_S heißt **erster Schenkel** des Winkels und h_S **zweiter Schenkel**.



► Bemerkung

- Ein orientierter Winkel $\alpha = \sphericalangle(g_S, h_S)$ kann anschaulich auch über das zugehörige Winkelfeld W_α charakterisiert werden, das beim Drehen des ersten Schenkels von α zum zweiten Schenkel überstrichen wird.



Definition 1.14

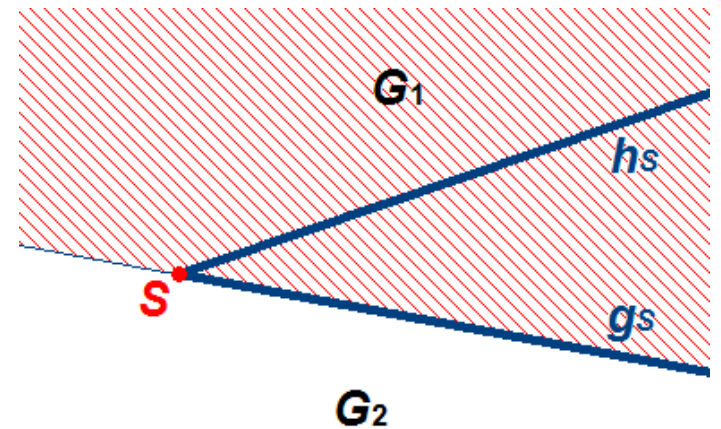
- Zwei Winkel α und β mit *gleichem ersten Schenkel* heißen genau dann **gleichorientiert**, wenn gilt

$$W_\alpha \subseteq W_\beta \vee W_\beta \subseteq W_\alpha$$

wenn also eines der Winkelfelder im anderen enthalten ist.

Satz 1.11

- ▷ Zwei nicht überstumpfe Winkel $\alpha = \sphericalangle(g_S, h_S)$ und $\beta = \sphericalangle(g_S, k_S)$ mit gemeinsamem ersten Schenkel g_S sind genau dann **gleichorientiert**, wenn $h_{(S)}$ und $k_{(S)}$ in derselben Halbebene bzgl. der Geraden g liegen.



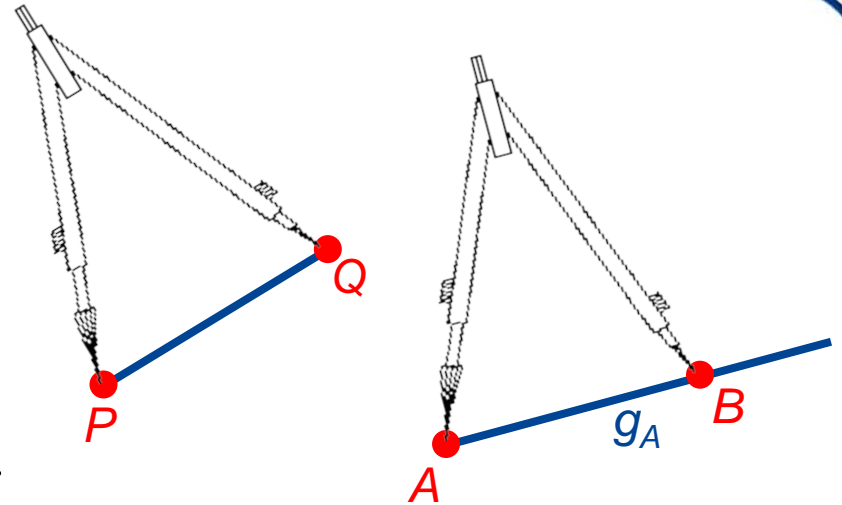


Kapitel 1: Axiome der Elementargeometrie

1.5 Axiome der Streckenkongruenz

(SK₁) Streckenkongruenzaxiom 1

- ▷ Ist $[PQ]$ eine Strecke und g_A eine von A ausgehende Halbgerade, dann gibt es genau einen Punkt $B \in g_A$, so dass $[PQ]$ **kongruent** zu $[AB]$ ist.
- ▷ Man schreibt dann: $[PQ] \cong [AB]$.

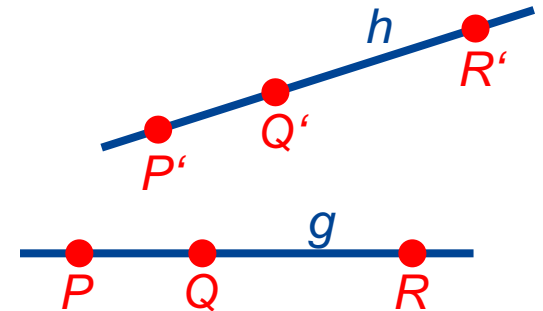


(SK₂) Streckenkongruenzaxiom 2

- ▷ Die Streckenkongruenz ist eine **Äquivalenzrelation** in der Menge der Strecken.

(SK₃) Streckenkongruenzaxiom 3

- ▷ Sind P, Q, R Punkte einer Geraden g mit $P-Q-R$ und P', Q', R' Punkte einer Geraden h mit $P'-Q'-R'$, dann folgt aus $[PQ] \cong [P'Q']$ und $[QR] \cong [Q'R']$, dass auch $[PR] \cong [P'R']$. (**Aneinandersetzen**)



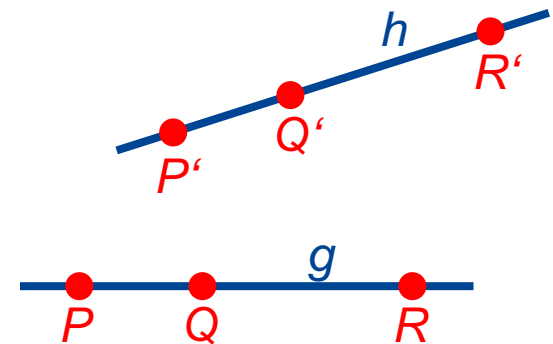
Definition 1.15

- Die **Länge** $|PQ|$ einer Strecke $[PQ]$ ist die Klasse aller zu $[PQ]$ kongruenten Strecken.

$$|PQ| := \{[AB] \mid [AB] \cong [PQ]\}$$

► Bemerkung

- **(SK₃)** bezieht sich auf das Aneinandersetzen von Strecken.
- Der folgende Satz bezieht sich auf „Unterschiede“ von Strecken.



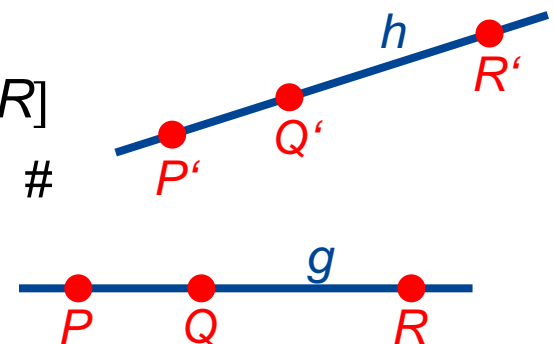
Satz 1.11a: Unterschiede von Strecken

- Sind P, Q, R Punkte einer Geraden g mit $P-Q-R$ und P', Q', R' Punkte einer Geraden h mit $P'-Q'-R'$, dann folgt aus $[PQ] \cong [P'Q']$ und $[PR] \cong [P'R']$, dass auch $[QR] \cong [Q'R']$.

► **Beweis zu Satz 1.11**

Sind P, Q, R Punkte einer Geraden g mit $P-Q-R$ und P', Q', R' Punkte einer Geraden h mit $P'-Q'-R'$, dann folgt aus $[PQ] \cong [P'Q']$ und $[PR] \cong [P'R']$, dass auch $[QR] \cong [Q'R']$.

- | | |
|--|--|
| (1) Nach (SK₁) gilt: | $\exists!_{R^* \in [Q'R']} [Q'R^*] \cong [QR]$ |
| (2) Nach Voraussetzung gilt: | $[P'Q'] \cong [PQ]$ |
| (3) Aus (1) und (2) folgt mit (SK₃) : | $[P'R^*] \cong [PR]$ |
| (4) Da nach Voraussetzung ist, folgt mit (SK₂) wegen der Transitivität von \cong : | $[PR] \cong [P'R']$ |
| (5) Daraus folgt wegen (SK₁) : | $[P'R^*] \cong [P'R']$ |
| (6) Mit (1) folgt: | $R^* = R'$ |
| | $[Q'R'] \cong [QR]$ |

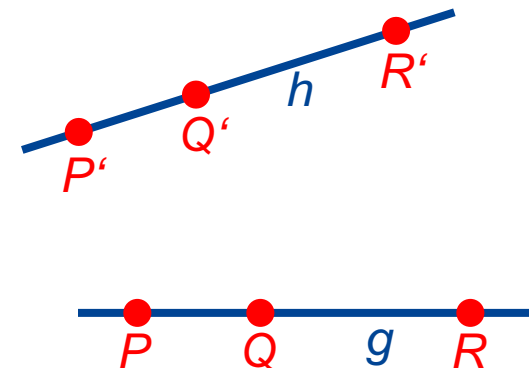


Satz 1.12: Das Abtragen von Strecken erhält die Anordnung.

- ▷ Sind P, Q, R Punkte einer Halbgeraden g_P und P', Q', R' Punkte einer Halbgeraden $h_{P'}$ und gilt $[PQ] \cong [P'Q']$ sowie $[PR] \cong [P'R']$, dann folgt aus $P-Q-R$, dass auch $P'-Q'-R'$ gilt.

► Beweis

- (1) $h_{Q'}$ ist die Halbgerade mit Anfangspunkt Q' auf h , für die gilt: $P' \notin h_{Q'}$.
- (2) Dann gibt es nach **(SK₁)** genau einen Punkt $R^* \in h_{Q'}$ mit $[Q'R^*] \cong [QR]$.
- (3) Aus (1) und (2) folgt: $P'-Q'-R^*$
- (4) Wegen $[PQ] \cong [P'Q']$ folgt aus (2) mit **(SK₃)**: $[PR] \cong [P'R^*]$
- (5) Mit $[PR] \cong [P'R']$ folgt aus (4) mit **(SK₂)** und **(SK₁)**: $R^* = R'$
- (6) Aus (3) und (5) ergibt sich: $P'-Q'-R'$



#

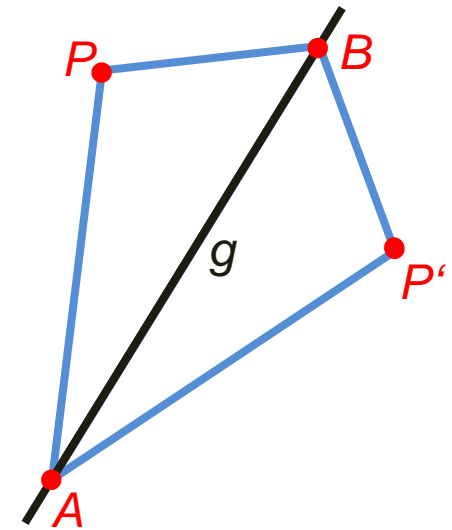
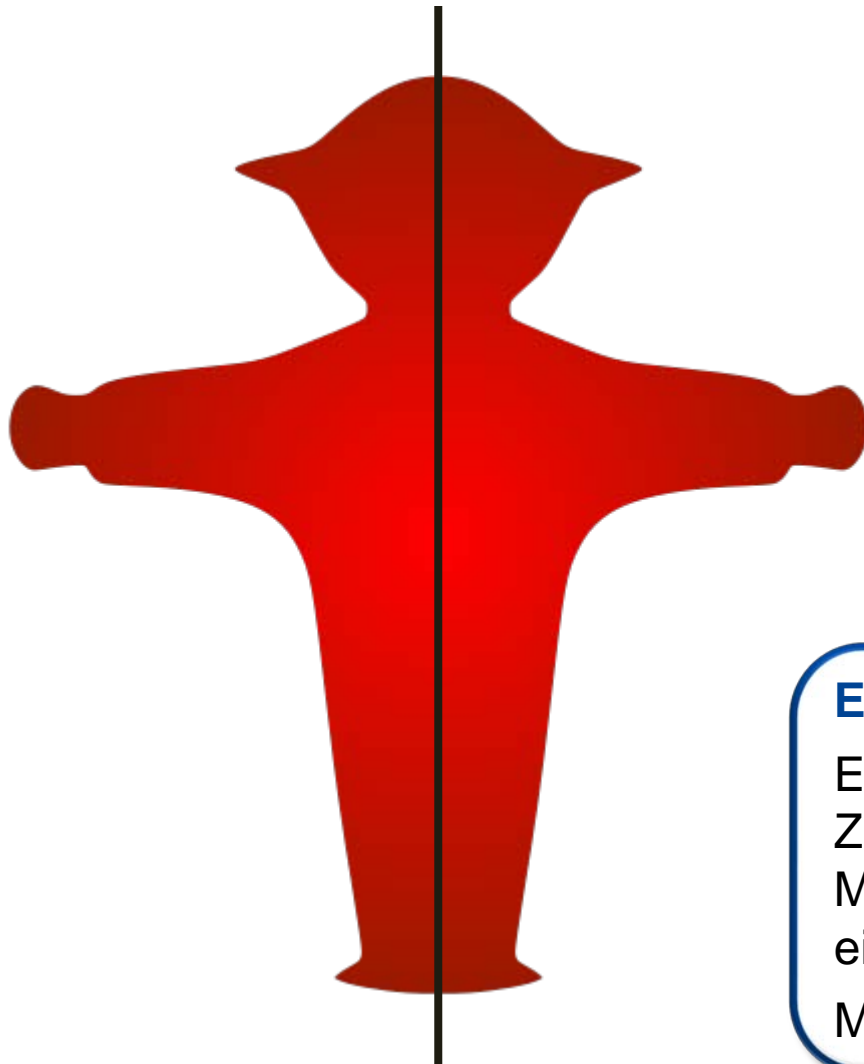
► **Bemerkung:**

- In den Elementen des EUKLID und später sauber bei Hilbert, werden neben der Streckenkongruenz auch weitere Axiome über das Abtragen und die Kongruenz von Winkeln, sowie von Dreiecken eingeführt.
- Hier wird ein anderer Weg beschritten: Die Kongruenz (Deckungsgleichheit) von Winkeln und Dreiecken wird nicht über Kongruenzaxiome festgelegt, sondern über Kongruenzabbildungen.
- Wie später gezeigt wird, lassen sich alle diese Abbildungen durch die Hintereinanderausführung von Geradenspiegelungen realisieren. Deshalb genügt es Axiome zu den Geradenspiegelungen einzuführen.



Kapitel 1: Axiome der Elementargeometrie

1.6 Axiome der Geradenspiegelung



Erinnerung:

Eine **Funktion** oder **Abbildung** f ist eine Zuordnung, die *jedem* Element x einer Menge \mathbf{D} *genau ein* Element $y = f(x)$ einer Menge \mathbf{B} zuordnet.

Man schreibt: $f: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}, x \mapsto y = f(x)$

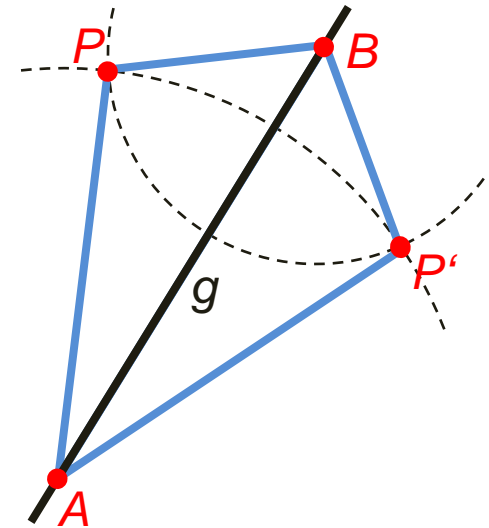
Axiome der Geradenspiegelung

Definition 1.16

- ▷ Sind A und B zwei verschiedene Punkte einer Geraden g in der Ebene ε und gilt für zwei Punkte P, P' der Ebene ε

$$[AP] \cong [AP'] \text{ und } [BP] \cong [BP'],$$

dann heißt P' das **Bild** von P bzgl. g und P das **Urbild** von P' bzgl. g .



(GS₁) Geradenspiegelungsaxiom 1

- ▷ Zu jedem Punkt P einer Ebene ε gibt es bezüglich jeder Geraden g der Ebene ε **genau einen Bildpunkt** P' .

► Bemerkung

- ▷ Bei gegebener Geraden existiert also immer genau ein Bild, das nicht von der Wahl der Punkte A und B abhängt.

Definition 1.17

- ▷ Die **Abbildung** $S_g: \varepsilon \rightarrow \varepsilon$ der Ebene ε auf sich, die jedem Punkt P der Ebene ε seinen Bildpunkt P' bezüglich der Geraden g zuordnet, heißt **Geradenspiegelung** bzgl. der **Symmetrieachse** g .
Man schreibt: $S_g(P) = P'$

(GS₂) Geradenspiegelungsaxiom 2

- ▷ Zu zwei verschiedenen Punkten P und Q einer Ebene ε gibt es in der Ebene ε **genau eine Gerade** g , mit $S_g(P) = Q$.

$$\forall P, Q \in \varepsilon \quad \exists! g \subset \varepsilon \quad S_g(P) = Q$$

(GS₃) Geradenspiegelungsaxiom 3

- ▷ Sind P' und Q' die Bilder der Punkte P und Q bei einer Geradenspiegelung an g , dann gilt: $[P'Q'] \cong [PQ]$

$$S_g(P) = P' \wedge S_g(Q) = Q' \Rightarrow [P'Q'] \cong [PQ]$$

Satz 1.13: Grundeigenschaft der Symmetrieachse

▶ Es seien g eine Gerade und $P \notin g$ ein Punkt in einer Ebene ε , sowie $P' = S_g(P)$. Dann gilt für einen beliebigen Punkt A der Ebene ε : $[AP] \cong [AP']$ genau dann wenn $A \in g$.

▶ Beweis

Zu zeigen ist: $[AP] \cong [AP'] \Leftrightarrow A \in g$

„ \Leftarrow “ $A \in g$

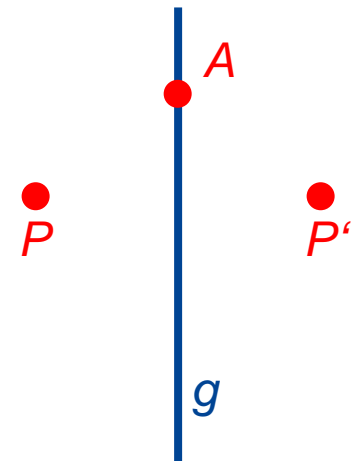
$$\Rightarrow [AA'] \cong [AA] = \{A\} \quad [A' = S_g(A)]$$

$$\Rightarrow A' = A \quad (*)$$

Mit **(GS₃)** gilt $[AP] \cong [A'P']$.

Wegen (*) folgt: $[AP] \cong [AP']$

#



► Beweis (Fortsetzung)

„ \Rightarrow “ Zu zeigen: $[AP] \cong [AP'] \Rightarrow A \in g$

Widerspruchsbeweis:

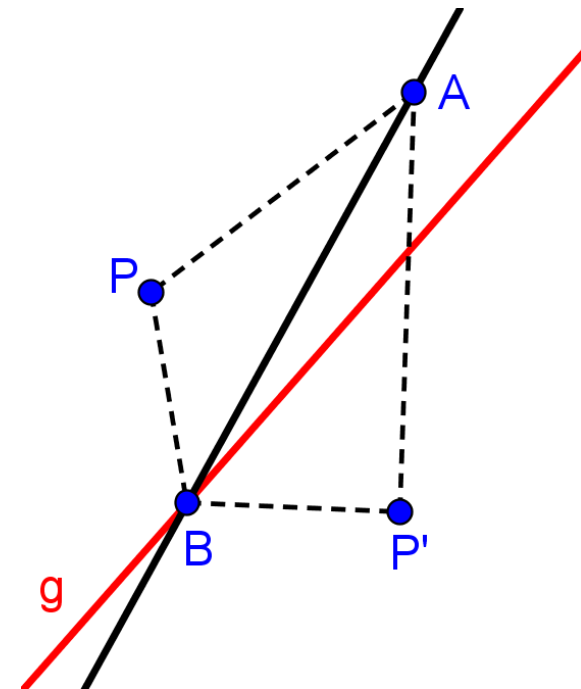
Annahme: $[AP] \cong [AP'] \wedge A \notin g$

Wegen $P' = S_g(P)$ gibt es einen Punkt $B \in g$ mit $[BP] \cong [BP']$.

\Rightarrow Wegen Definition 1.16 und 1.17 ist $BA \neq g$ eine Symmetrieachse für die Punkte P und P' .

❗ **Widerspruch zu (GS_2)**

\Rightarrow Die Annahme ist falsch und ihr Gegenteil, die Aussage $[AP] \cong [AP'] \Rightarrow A \in g$ ist richtig.



#

► Bemerkungen

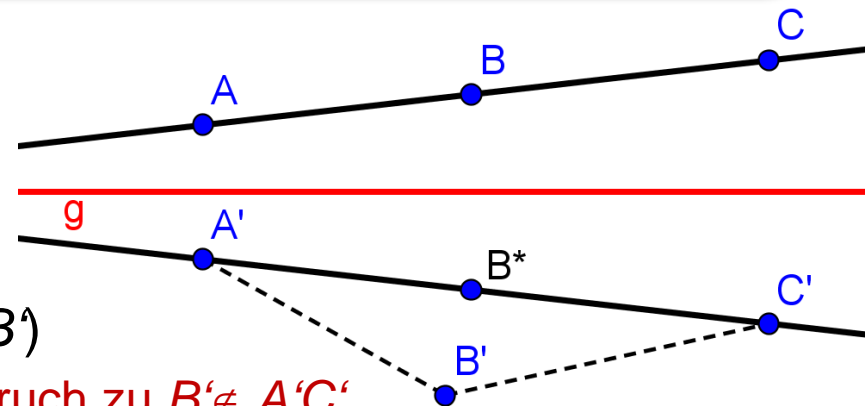
- ▷ $\forall_{P \in g} \forall_{A \in g} [AP] \cong [AP']$, weil $P' = S_g(P) = P$ ist.
- ▷ $P \notin g \Rightarrow P' \notin g$
andernfalls hätte P' zwei Spiegelbilder, den Punkt P und P' selbst.

Satz 1.14: Geradenspiegelungen sind geradentreu

- ▷ Sind A, B, C drei kollineare Punkte und A', B', C' ihre Bilder bei der Spiegelung an der Geraden g , dann sind auch die Punkte A', B', C' kollinear.

► Beweisidee

- ▷ Die Annahme, dass A', B', C' nicht kollinear sind wird zum Widerspruch geführt.
- ▷ $\exists_{B^* \in [A'C']} [A'B^*] \cong [AB] \wedge B^* = S_{A'C'}(B)$



●* Widerspruch zu $B' \notin A'C'$

► Bemerkungen

- ▷ Ein Punkt P , für den gilt $S_g(P) = P$, der also durch die Spiegelung an der Geraden g auf sich selbst abgebildet wird, heißt **Fixpunkt** bezüglich dieser Abbildung.
- ▷ Ein Gerade h , für die gilt $S_g(h) = h$, die also durch die Spiegelung an der Geraden g auf sich selbst abgebildet wird, heißt **Fixgerade** bezüglich dieser Abbildung.
- ▷ Die letzte Bemerkung bedeutet nicht, dass jeder Punkt der Fixgeraden h auf sich selbst abgebildet wird, sondern, dass die Punktmenge der Geraden h

auf die Punktmenge der Geraden h abgebildet wird.

- ▷ Besteht im Sonderfall eine Gerade nur aus Fixpunkten, dann nennt man sie **Fixpunktgerade**.
- ▷ Jede Geradenspiegelung besitzt **genau eine Fixpunktgerade**, die **Symmetrieachse**. Daneben gibt es keine Fixpunkte.
- ▷ Die Geradenspiegelung wurde über die Kongruenz von Strecken definiert (vgl. Definitionen 1.16 und 1.17). Da die Streckenkongruenz symmetrisch ist, folgt direkt:

$$S_g(P) = P' \Leftrightarrow S_g(P') = P$$

► Definition

- ▷ Seien \mathbf{P} , \mathbf{Q} und \mathbf{R} nichtleere Mengen und $f: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ sowie $g: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$ Funktionen (bzw. Abbildungen), dann nennt man die durch

$$g \circ f: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{R}, \\ x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

definierte Funktion (Abbildung) die **Verkettung** von f und g .

- ▷ Für $g \circ f$ spricht man „ **g nach f** “.

► Beispiel

- ▷ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 1;$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

- ▷ $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$
 $x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$
 $= g(x + 1) = (x + 1)^2$

► Definition

- ▷ Die Funktion $id_{\mathbf{A}}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A},$
 $x \mapsto x$, die jedes Element der Menge \mathbf{A} auf sich selbst abbildet, heißt **identische Abbildung** (oder **Identität**) auf \mathbf{A} .

► Definition

- ▷ Die **Umkehrfunktion** f^{-1} einer Funktion $f: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ ist die Funktion $f^{-1}: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$, für die gilt:

$$\forall_{x \in \mathbf{A}} f^{-1}(f(x)) = x \wedge \forall_{y \in \mathbf{B}} f(f^{-1}(y)) = y \\ f^{-1} \circ f = id_{\mathbf{A}} \wedge f \circ f^{-1} = id_{\mathbf{B}}$$

Definition 1.18

- ▶ Eine Abbildung $f: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ einer Menge \mathbf{M} auf sich heißt **involutorisch**, wenn gilt: $f \neq id_{\mathbf{M}} \wedge f \circ f = id_{\mathbf{M}}$

Satz 1.15

- ▶ Jede Spiegelung S_g an einer Geraden g in der Ebene ε ist eine **involutorische** Abbildung der Ebene ε auf sich.

▶ **Beweis** (Übungsaufgabe)

Satz 1.16

- ▶ Jede Spiegelung S_g an einer Geraden g in der Ebene ε ist eine **streckentreue** Abbildung der Ebene ε auf sich. Es gilt also:

$$\forall_{P, Q \in \varepsilon} S_g(P) = P' \wedge S_g(Q) = Q' \Rightarrow S_g([PQ]) = [P'Q']$$

▶ **Beweis** (Übungsaufgabe)

Satz 1.17

- ▶ Jede Spiegelung S_g an einer Geraden g in der Ebene ε ist eine **paralleltreue** Abbildung der Ebene ε auf sich. $\forall_{g,h,k \subset \varepsilon} h \parallel k \Rightarrow S_g(h) \parallel S_g(k)$

- ▶ **Beweis** (Präsenzübung)

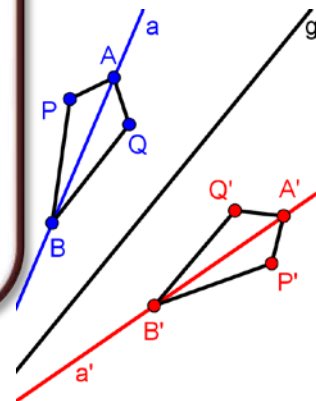
Bemerkung:

Aus Satz 1.18 folgt direkt: Zueinander senkrechte Geraden werden bei einer Achsenspiegelung immer auf zueinander senkrechte Geraden abgebildet.

Satz 1.18

- ▶ Jede Spiegelung S_g an einer Geraden g in der Ebene ε **erhält die Achsensymmetrie** einer Figur. Es gilt also: Ist a die Symmetrieachse der Punkte P und Q und g eine beliebige Gerade in der Ebene ε , dann ist $a' = S_g(a)$ die Symmetrieachse der Punkte $P' = S_g(P)$ und $Q' = S_g(Q)$

- ▶ **Beweisidee:** Verwendung von **Definition 1.16** und **(GS₃)**



Kapitel 1: Axiome der Elementargeometrie

1.7 Die Begriffe Senkrechte, Mittelpunkt und Winkelhalbierende

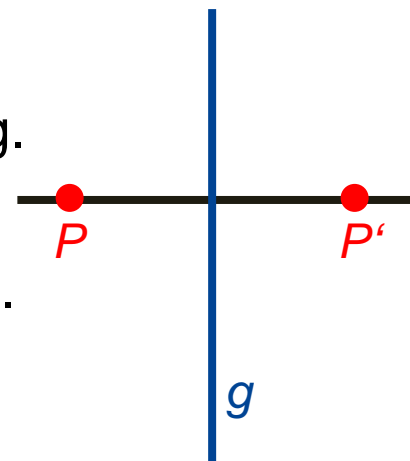
Satz 1.19

▷ Für jeden Punkt $P \in \varepsilon$ und jede Gerade $g \subset \varepsilon$ folgt aus $P \notin g$ und $P' = S_g(P)$, dass die Gerade PP' Fixgerade der Spiegelung S_g ist.

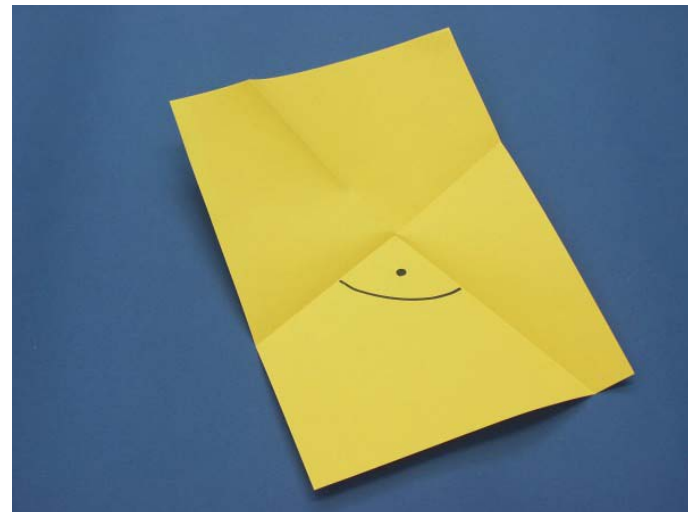
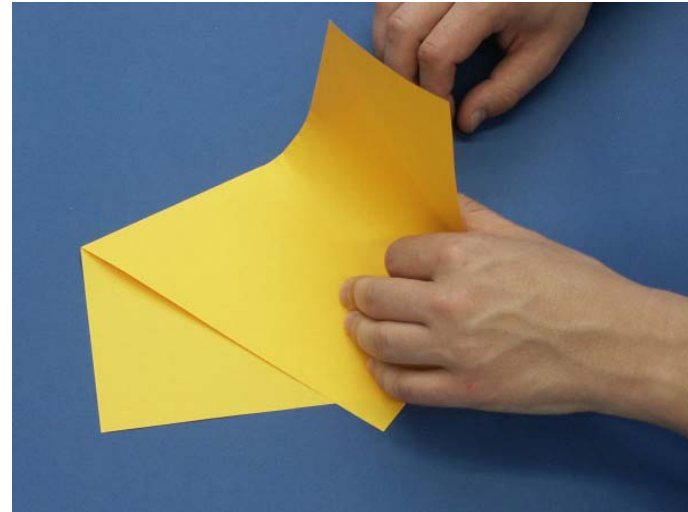
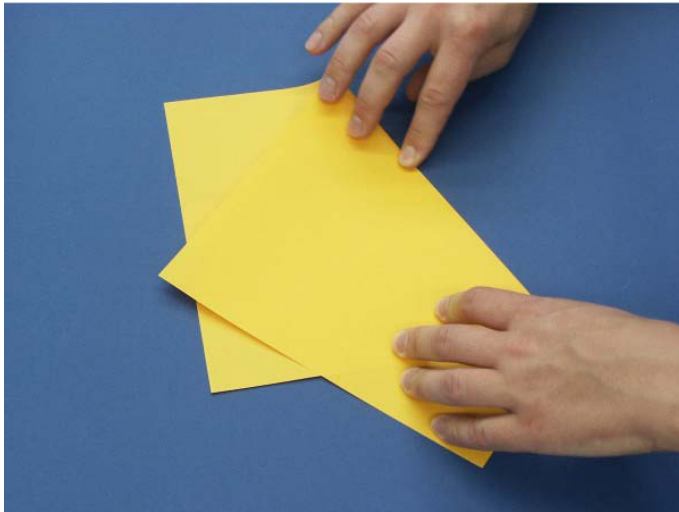
$$\forall P \in \varepsilon \forall g \subset \varepsilon \quad P \notin g \wedge P' = S_g(P) \Rightarrow S_g(PP') = PP'$$

► Beweis

- (1) Nach **Satz 1.15** ist S_g eine involutorische Abbildung. Mit $S_g(P) = P'$ gilt also auch $S_g(P') = P$.
- (2) Nach **Satz 1.14** ist S_g eine geradentreue Abbildung. PP' wird also auf eine Gerade abgebildet, auf der die Punkte $S_g(P) = P'$ und $S_g(P') = P$ liegen.
- (3) Nach **(I₂)** gibt es durch zwei Punkte P und P' genau eine Gerade PP' .



Aus (1), (2) und (3) folgt: $S_g(PP') = PP'$ #



Definition 1.19

- ▶ Für zwei Geraden g und h der Ebene ε gilt:
 h steht genau dann **senkrecht** auf g (bzw. ist **orthogonal** zu g), wenn h Fixgerade bzgl. S_g ist und $h \neq g$.
- ▶ h heißt dann **Senkrechte** bzw. **Orthogonale** zu g .
- ▶ Man schreibt: $h \perp g \iff S_g(h) = h \wedge h \neq g$

Satz 1.20

- ▶ Die Relation „ \perp “ ist symmetrisch, es gilt also $h \perp g \Rightarrow g \perp h$.

▶ Bemerkung

- ▶ Das bedeutet: Ist h Fixgerade bzgl. S_g , dann ist auch g Fixgerade bzgl. S_h . Es gilt dann also auch $S_h(g) = g$.

Satz 1.21

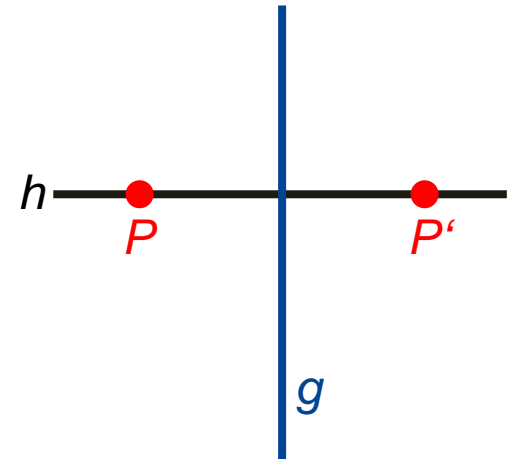
- Für jeden Punkt $P \in \varepsilon$ und jede Gerade $g \subset \varepsilon$ gibt es in der Ebene ε **genau eine** Senkrechte h durch P zu g .

$$\forall P \in \varepsilon \forall g \subset \varepsilon \exists! h \subset \varepsilon \quad h \perp g \wedge P \in h$$

► Beweis

1. Fall: $P \notin g$:

- (1) Nach **(GS₁)** gibt es genau ein P' mit $P' = S_g(P)$ und $P' \neq P$.
- (2) Nach **(I₂)** gibt es durch P und P' genau eine Gerade $h = PP'$, die nach **Satz 1.19** Fixgerade bzgl. S_g ist und damit nach **Definition 1.19** senkrecht auf g steht.



► Beweis (2. Teil)

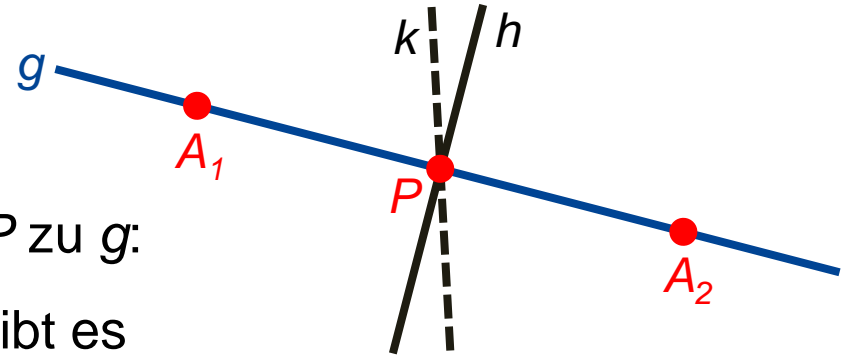
2. Fall: $P \in g$:

Existenz einer Senkrechten durch P zu g :

- (1) Wähle $A_1 \in g_{(P)}$. Wegen **(SK₁)** gibt es einen Punkt $A_2 \in g_{(P)}^*$ mit $[A_1P] \cong [A_2P]$.
- (2) Zu A_1 und A_2 gibt es nach **(GS₂)** genau eine Symmetrieachse h , auf der wegen (1) und **Satz 1.13** auch P liegt.
- (3) $A_1A_2 = g$ ist damit nach **Satz 1.19** Fixgerade bzgl. S_h und steht nach **Definition 1.19** senkrecht auf h . Nach Satz **Satz 1.20** folgt daraus: $h \perp g$

Eindeutigkeit der Senkrechten durch P zu g :

Gäbe es neben h eine weitere Senkrechte k durch P zu g , dann wäre $A_2 = S_h(A_1) = S_k(A_1)$, im Widerspruch zu **(GS₂)**. #



► Sprechweisen

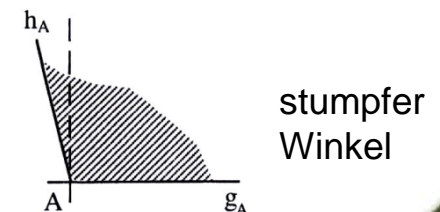
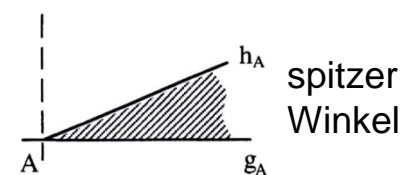
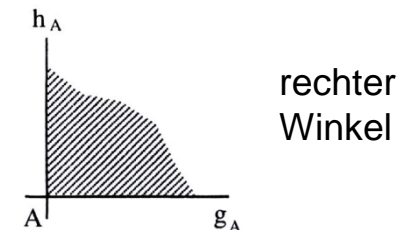
- Konstruiert man die Senkrechte zu g durch einen Punkt $P \notin g$, dann sagt man: Man **fällt das Lot** von P auf g .
- Ist $P \in g$, dann sagt man: Man **errichtet die Senkrechte** zu g im Punkt P .

Bemerkung: Auch Nullwinkel sind spitze Winkel.

Definition 1.20

Ein *nicht* überstumpfer Winkel α mit den Schenkeln g_A und h_A und dem Winkelfeld W_α heißt

- genau dann **rechter Winkel**, wenn $g \perp h$ ist.
- **spitzer Winkel**, wenn er kein rechter Winkel ist und die im Scheitelpunkt A errichtete Senkrechte zu g keinen Punkt von W_α trifft.
- **stumpfer Winkel**, wenn er weder ein rechter, noch ein spitzer noch ein gestreckter Winkel ist.



Satz 1.22

▶ Alle Senkrechten zu einer Geraden g in einer Ebene ε sind untereinander parallel. $\forall_{g, h, k \in \varepsilon} h \perp g \wedge k \perp g \Rightarrow h \parallel k$

▶ Beweis

1. Fall: $h = k \Rightarrow h \parallel k$ (nach Definition von \parallel)

2. Fall: $h \neq k$

Annahme: $\{P\} = h \cap k$

Nach Satz 1.21 folgt daraus $h = k$. 💣 **Widerspruch zur Annahme.** #

P-Satz 1.23: Starkes Parallelenaxiom

▶ Zu jeder Geraden g gibt es durch jeden Punkt $P \notin g$ stets **genau eine** Parallele.

▶ Beweis (Übungsaufgabe)

Satz 1.24: Schneidet g eine Gerade h , dann auch jede Parallele zu h .

- ▷ Schneiden sich in einer Ebene ε die Geraden g und h in einem Punkt P und ist $h \cap k = \emptyset$, dann schneidet g auch die Gerade k .

▶ Beweis (Übungsaufgabe)

Satz 1.25

- ▷ Ist $P \notin g$ und $P' = S_g(P)$, dann liegen P und P' in der Ebene ε in verschiedenen Halbebenen bzgl. g , d. h. es gilt $[PP'] \cap g \neq \emptyset$.

▶ Beweis

- (1) Sei $h \perp g \wedge h \cap g = \{A\}$
- (2) $PP' = S_g(PP')$ [Satz 1.19]
- (3) $PP' \perp g$ [Def. 1.19]
- (4) $PP' \parallel h$ [(1), (2) & Satz 1.22]

$$(5) \quad PP' \cap g = \{B\} \quad [\text{Satz 1.24}]$$

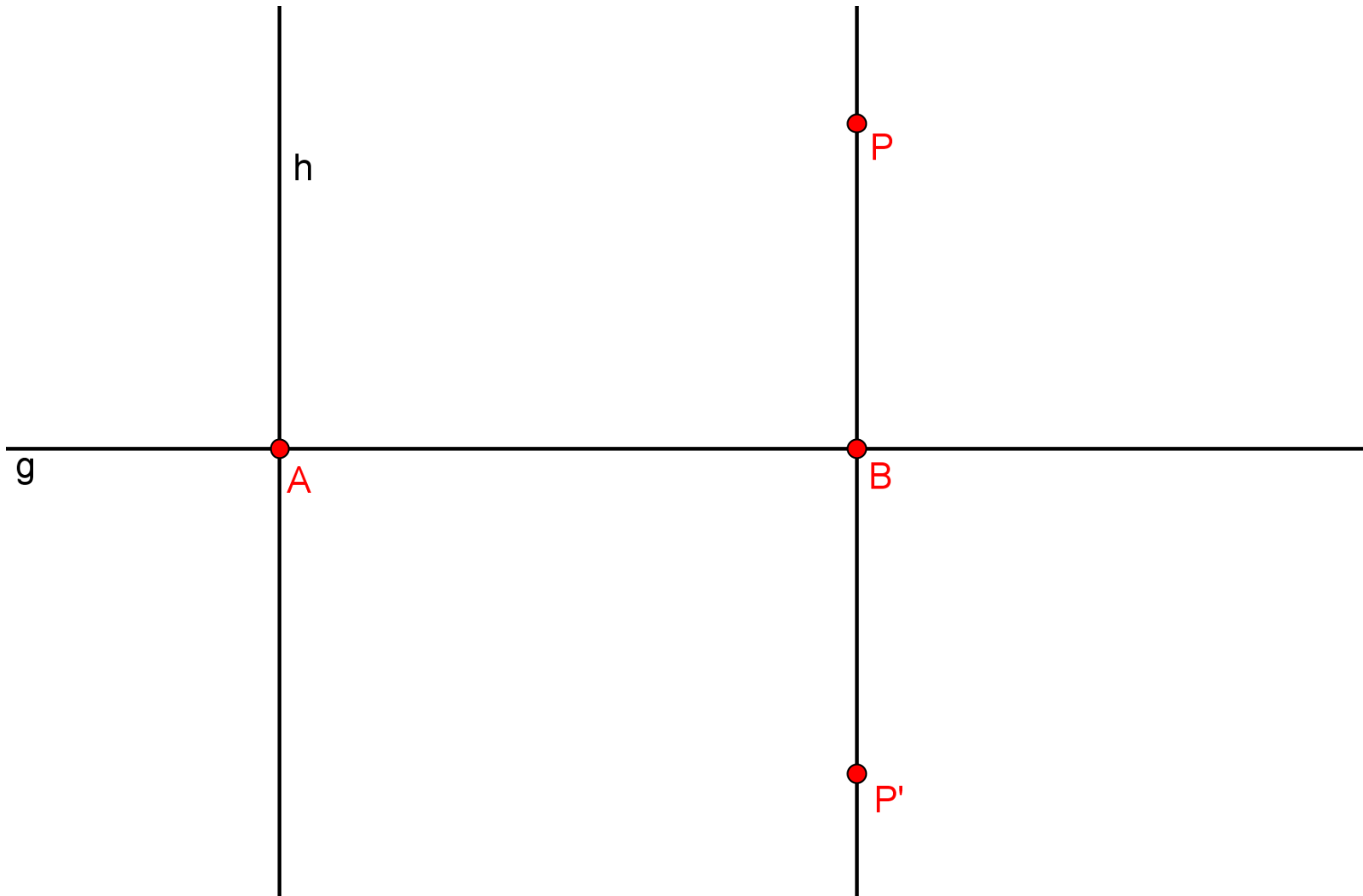
Annahme: $\neg P-B-P'$

$$(6) \quad P' \neq P \wedge [BP] \cong [BP'] \\ [P \notin g \wedge P' = S_g(P) \wedge B \in g]$$

💣 **Widerspruch zur Ann. [(SK₁)]**
 $\Rightarrow P-B-P' \Rightarrow B \in]PP'[\quad \#$



Zum Beweis von Satz 1.25



► Bemerkung

- Sieht man von der Lage von B ab, dann wurde mit dem Beweis von Satz 1.25 insbesondere auch gezeigt:

Satz 1.25*: In einer Ebene ε wird eine Gerade g von jeder Senkrechten zu g geschnitten.

P-Satz 1.26

- Ist in einer Ebene ε die Gerade g senkrecht zu einer Geraden h , dann ist g auch senkrecht zu jeder Parallelen k von h .

$$\forall g, h, k \in \varepsilon \quad g \perp h \wedge k \parallel h \Rightarrow g \perp k$$

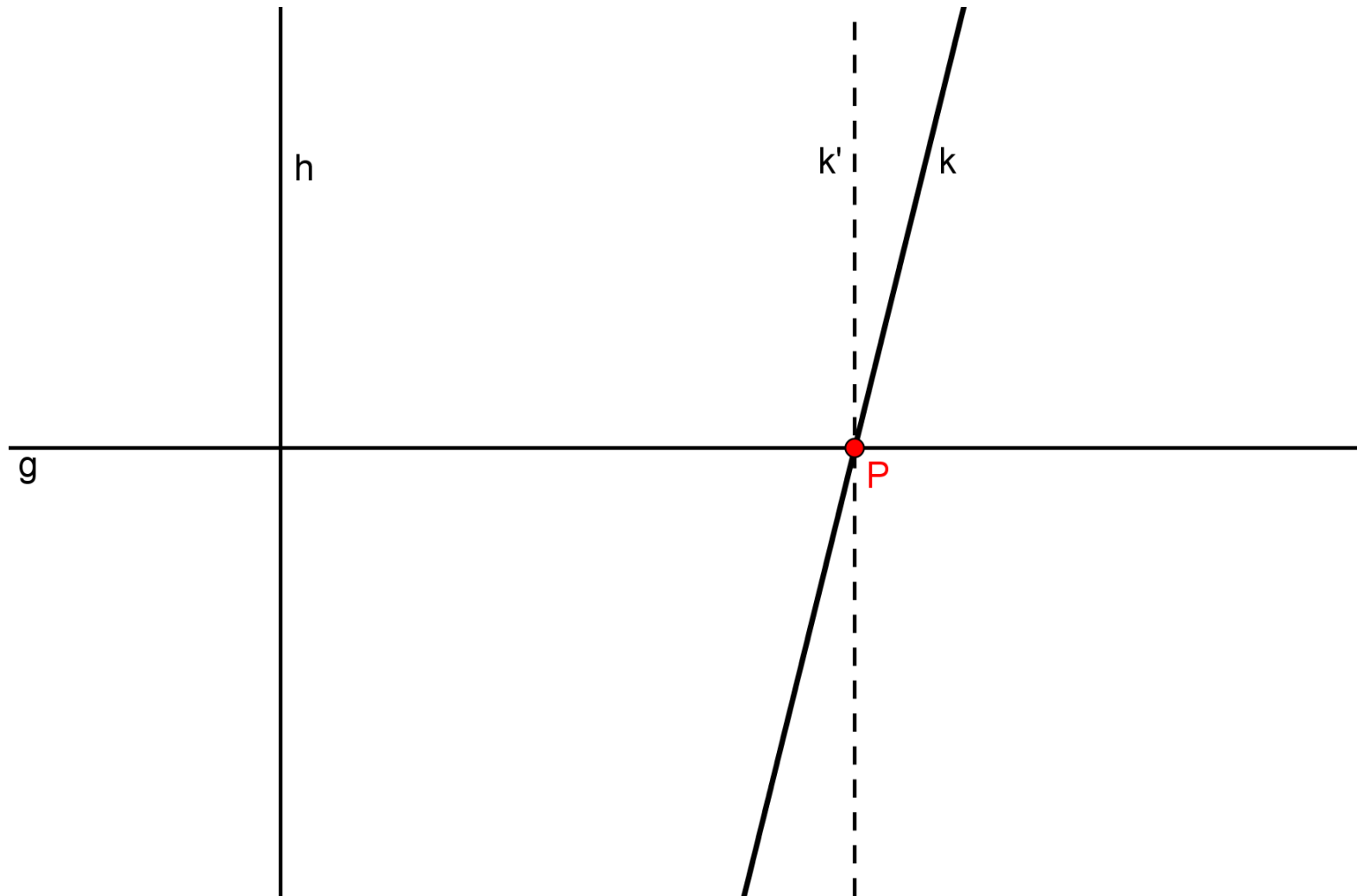
► Beweis

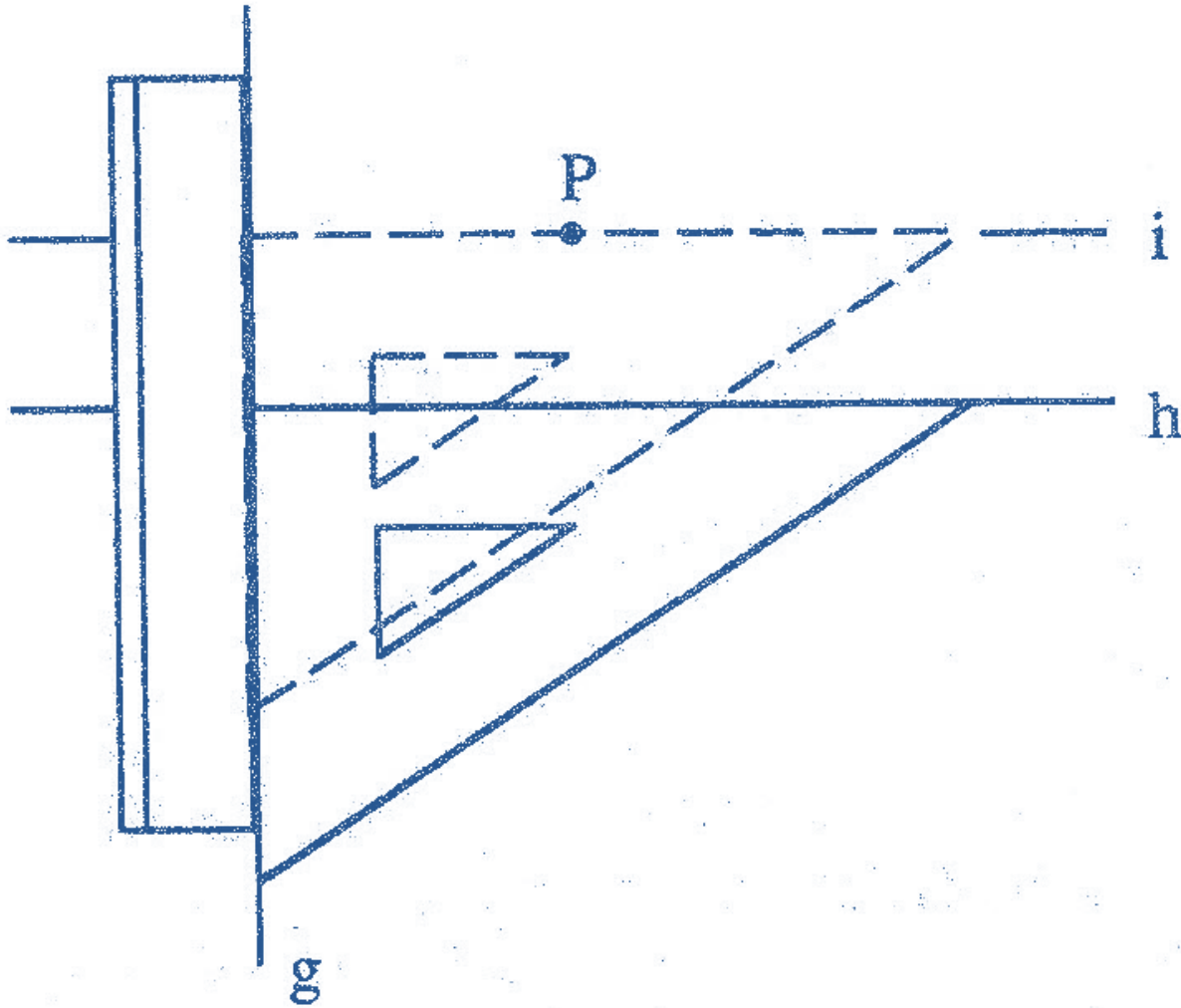
- 1. Fall: $k = h$: Mit $g \perp h$ ist auch $g \perp k$
- 2. Fall: $k \cap h = \emptyset$: $g \cap h \neq \emptyset$ [Satz 1.25*] $\xRightarrow{\text{Satz 1.24}} \exists_{P \in \varepsilon} k \cap g = \{P\}$

Annahme: $k \not\perp g \xRightarrow[\text{Satz 1.22}]{\text{Satz 1.21}} \exists_{k' \subset \varepsilon} k' \cap g = \{P\} \wedge k' \perp g \wedge k' \parallel h \quad \text{⚡ Widerspruch zu P-Satz 1.23}$



Zum Beweis von P-Satz 1.26





Satz 1.27: Mittelpunkt einer Strecke

- ▶ In einer Ebene ε gibt es zu jeder Strecke $[PQ]$ genau einen Punkt $M \in [PQ]$ mit $[MP] \cong [MQ]$, den **Mittelpunkt** von $[PQ]$.

▶ Beweis

$$[MP] \cong [MQ]$$

(GS₂)

Satz 1.13

⇔ Satz 1.19

Def. 1.19

Satz 1.21

$$\exists!_{g \subset \varepsilon} \exists!_{M \in g} \{M\} = g \cap [PQ] \wedge S_g(P) = Q \wedge g \perp PQ \quad \#$$

▶ Bemerkungen

- ▶ Da es mit **(GS₂)** genau eine Symmetriearchse zu zwei Punkten P und Q gibt und diese Symmetriearchse die Strecke $[PQ]$ in genau einem Punkt M trifft, ist M der einzige Mittelpunkt der Strecke $[PQ]$.
- ▶ Man nennt die Symmetriearchse der Punkte P und Q auch die **Mittelsenkrechte** der Strecke $[PQ]$.

► Bemerkung

- Das Anordnungsaxiom 2 wurde eingeführt, um die mit den Anordnungsaxiomen unmittelbar zusammenhängenden Folgerungen direkt ableiten zu können.

(A_2) Anordnungsaxiom 2

Sind A und B zwei verschiedene Punkte einer Geraden g , mit $A < B$, dann gibt es auf g noch drei weitere Punkte P, Q, R mit $P < A < Q < B < R$.

- Es zeigt sich, dass (A_2) abhängig von den übrigen Axiomen ist und man dieses Axiom deshalb ersatzlos streichen kann.
- Aus **Satz 1.27** folgt, dass die Menge der Punkte einer Geraden **dicht** ist, dass es zwischen zwei Punkten einer Geraden immer noch einen weiteren Punkt gibt. Auf dem Weg zu **Satz 1.27** wurde (A_2) nicht benötigt.
- Auch die Tatsache, dass die Menge der Punkte einer Geraden **offen** ist [$\forall_{A,B \in g} \exists_{P,R \in g} P < A < B < R$], lässt sich mit Hilfe des Streckenabtragens gemäß (**SK₁**) beweisen.

Satz 1.28: Symmetrieachsen bzgl. zweier Geraden

In einer Ebene ε gibt es zu zwei Geraden g und h

- (1) unendlich viele Symmetrieachsen, wenn $g = h$ ist,
- (2) genau eine Symmetrieachse, wenn $g \parallel h$ und $g \neq h$ ist,
- (3) genau zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen, die sich im Punkt S schneiden, wenn gilt $g \cap h = \{S\}$

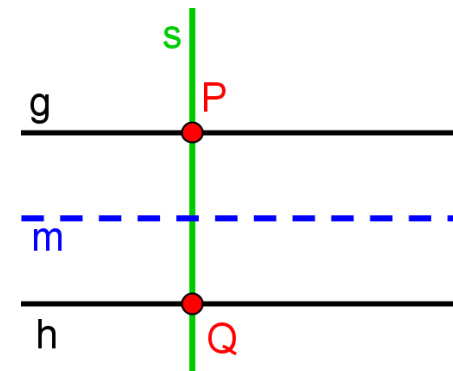
so, dass h das Spiegelbild von g ist.

► Beweis

(1) Für $g = h$ sind g und alle Senkrechten zu g Symmetrieachsen.

(2) Existenz: In einem Punkt $P \in g$ das Lot s auf h fällen. Q sei der **Lotfußpunkt**, d. h. es gilt $s \cap h = \{Q\}$. Für die Mittelsenkrechte m von $[PQ]$ gilt: $S_m(g) = h$.

$$[S_m(P) = Q \wedge g \parallel m \Rightarrow S_m(g) \parallel m \wedge Q \in S_m(g)]$$



► Beweis (Fortsetzung)

Eindeutigkeit:

Annahme: Es gibt eine weitere Symmetrieachse a von g und h .

$$\Rightarrow a \parallel g$$

[Andernfalls gäbe es einen Schnittpunkt von a mit g , der Fixpunkt wäre und wegen $g \cap h = \emptyset$ kein Bild auf $h = S_a(g)$ haben könnte.]

$$\Rightarrow \forall P \in g (P' = S_a(P) \Rightarrow PP' \perp g) \Rightarrow a = m$$

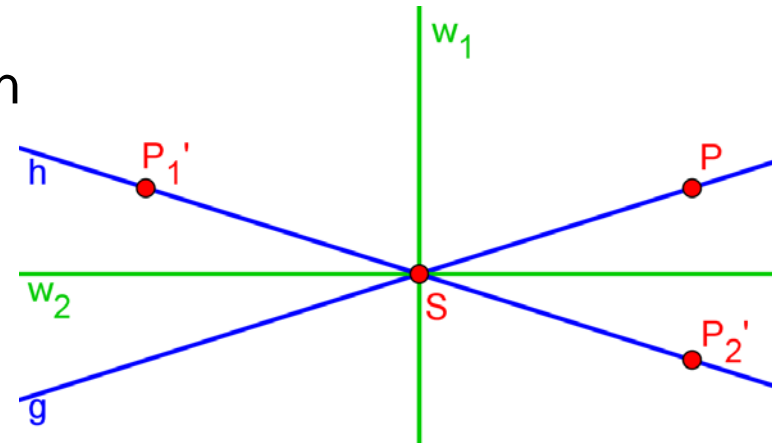
- (3) Eine Gerade und ihr Bild bzgl. einer Achsenspiegelung sind entweder parallel oder sie schneiden sich auf der Achse. Wenn es also eine Geradenspiegelung gibt, die g auf h abbildet, dann muss ihre Achse durch S gehen. S ist dann Fixpunkt.

Sei $P \in g \setminus \{S\}$. Die gesuchten Achsenspiegelungen müssen die Strecke $[SP]$ auf eine kongruente Strecke $[SP'] \subset h$ abbilden. Nach **(SK₁)** gibt es auf den beiden durch S auf h gebildeten Halbgeraden jeweils genau einen solchen Punkt P_1' bzw. P_2' .



► Beweis (Fortsetzung)

Die nach **(GS₂)** eindeutig bestimmten Symmetrieachsen w_1 von P und P_1' bzw. w_2 von P und P_2' verlaufen wegen Satz 1.13 beide durch S und sind die einzigen möglichen Symmetrieachsen.



Noch zu zeigen: $w_1 \perp w_2$

Bei Spiegelung an w_2 muss wegen **Satz 1.18** w_1 auf die Symmetrieachse der Bilder von P und P_1' abgebildet werden, die zugleich Symmetrieachse von g und h sein muss.

Da w_1 und w_2 verschieden und außerdem die einzigen Symmetrieachsen von g und h sind, bedeutet das:
 w_1 wird auf sich selbst abgebildet.

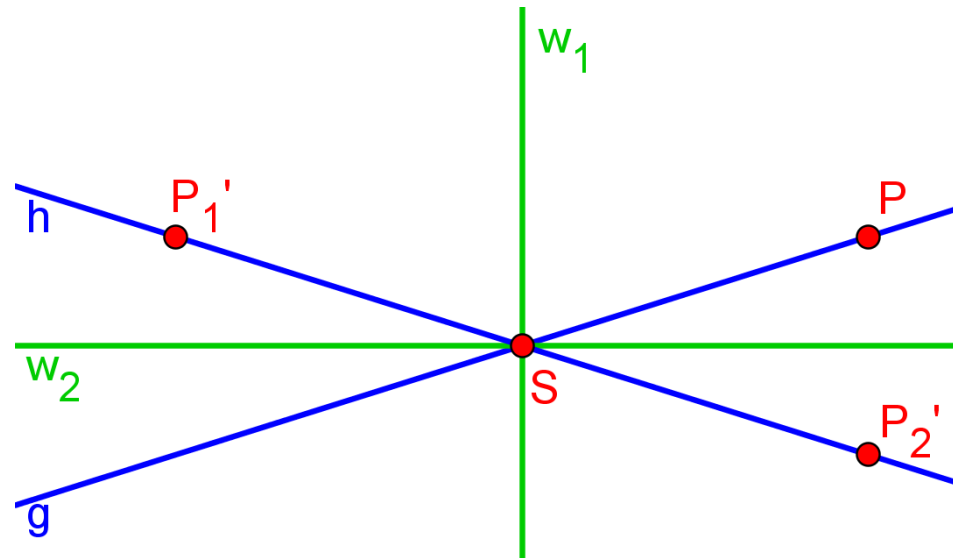
w_1 ist Fixgerade der Geradenspiegelung an w_2 , also gilt: $w_1 \perp w_2$ #

► Bemerkungen

- Die Geraden w_1 und w_2 werden auch die **Winkelhalbierenden** der durch g und h gebildeten Winkel genannt.

Aus Satz 1.28 folgt damit:

- Jeder Winkel besitzt genau eine Winkelhalbierende.
- Die Winkelhalbierende eines Winkels und die seiner Nebenwinkel stehen aufeinander senkrecht.



Definition 1.21

- ▶ Ein Viereck heißt genau dann **Rechteck**, wenn es drei rechte Innenwinkel besitzt.

▶ Bemerkungen

- ▶ Es lässt sich zeigen (Übungsaufgabe), dass die in Definition 1.21 definierten Vierecke sogar vier rechte Innenwinkel besitzen.

- ▶ Schneiden sich zwei Geraden und werden auf den vier entstehenden Halbgeraden kongruente Strecken abgetragen, so erhält man die Eckpunkte eines **Rechtecks**.

[Vgl. Beweis zu Satz 1.28 (3)]

- ▶ Ein Innenwinkel eines Polygons ist genau dann ein rechter Winkel, wenn die Trägergeraden der anliegenden Seiten senkrecht aufeinander stehen.

