Geometrie

Homepage zur Veranstaltung: http://www.juergen-roth.de ► Lehre ► Geometrie

Inhaltsverzeichnis

Geometrie

Geometrie

Kapitel 0:
Geometrie?!

Kapitel 0:

Geometrie?!

Kapitel 0: Geometrie?!

0.1 Was ist Geometrie?

Geometrie?!

- **Geometrie ist die Wissenschaft vom uns umgebenden Raum.**
- **Geometrie ist das älteste mathematische Teilgebiet.**
  - Über viele Jahrhunderte hinweg bestand die Mathematik im wesentlichen aus Geometrie.
- **Ägypter & Babylonier (ab 3000 v. Chr.):**
  - Geometrie ist eine Naturwissenschaft.
  - Man fragte nicht nach logischer Ableitbarkeit, sondern nach Übereinstimmung mit der Realität.
  - Man „wusste“ zum Beispiel, wie man rechte Winkel konstruieren konnte, und das reichte.

Geometrie als erste (deduktive) Wissenschaft

http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/ausstell/hilbert/euklid.html

- **Die alten Griechen entdeckten die Macht des Denkens, die Logik und damit auch die Möglichkeit der Mathematik.**
  - Man kann durch reines Denken Erkenntnisse erzielen!
  - Das Denken folgt gewissen Regeln, den Gesetzen der Logik.
  - Wenn die Voraussetzungen eines logischen Schlusses gegeben sind, dann gilt automatisch auch die Folgerung.
- **Die Elemente des Euklid sind streng deduktiv aufgebaut.**
  - Es wird zwischen Grund-begriffen und definierten Begriffen unterschieden.
  - Ausgehend von wenigen Grundsätzen (Axiomen) werden durch logisches Schließen Folgesätze bewiesen.
- **„more geometrico“**
  - Im Mittelalter in allen universitären Disziplinen Ausdruck für streng logisch („wissenschaftlich“) aufgebaute Argumentationsketten.

Geometrie und Wirklichkeit

http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/ausstell/hilbert

- **Platon (427 - 347 v. Chr.)**
  - Es gibt zwei Welten:
    - die Welt der Ideen (die eigentliche Welt) und
    - die Welt der Erscheinungen (die nur ein Abbild / Schatten der Idealen Welt ist).
- **Immanuel Kant (1724 - 1804)**
  - Geometrie ist ein Produkt unseres Verstandes: „synthetische Urteile a priori“.
- **David Hilbert (1862 - 1943):**
  - Es werden nicht die Objekte definiert (Es wird z. B. nicht erklärt was ein Punkt ist!), sondern nur die Spielregeln festgelegt, also wie mit den Objekten umzugehen ist.
  - „Man muss jederzeit an Stelle von ‚Punkte, Geraden, Ebenen‘ ‚Tische, Stühle, Bierseidel‘ sagen können.“

Anschauung, Begriffe und Ideen

So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauung an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen.

Kant: Kritik der reinen Vernunft,
Elementarlehre T. 2. Abt. 2.

Die Geometrie bedarf (…) zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger einfach Grundsätze.
Diese Grundsätze heißen Axiome der Geometrie.
Die Aufstellung der Axiome der Geometrie (…) läuft auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung hinaus.

Hilbert: Grundlagen der Geometrie.
Einleitung

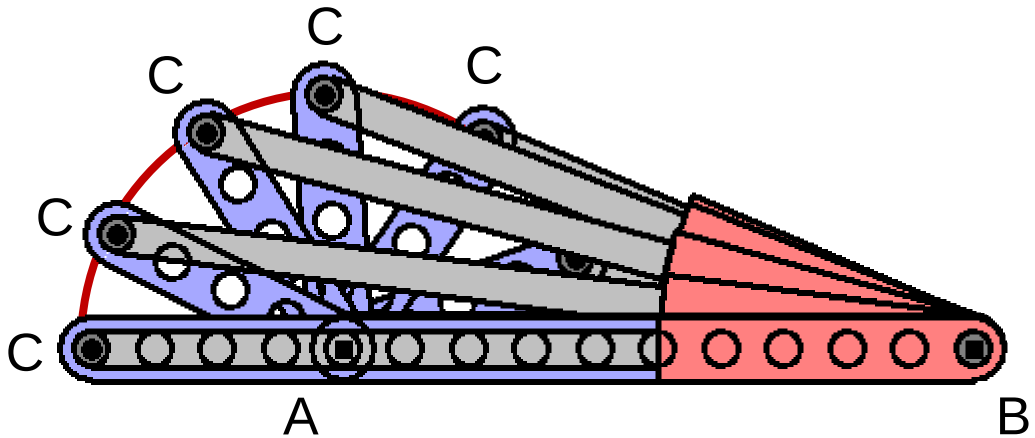
Kapitel 0: Geometrie?!

0.2 Beispiel: Bagger

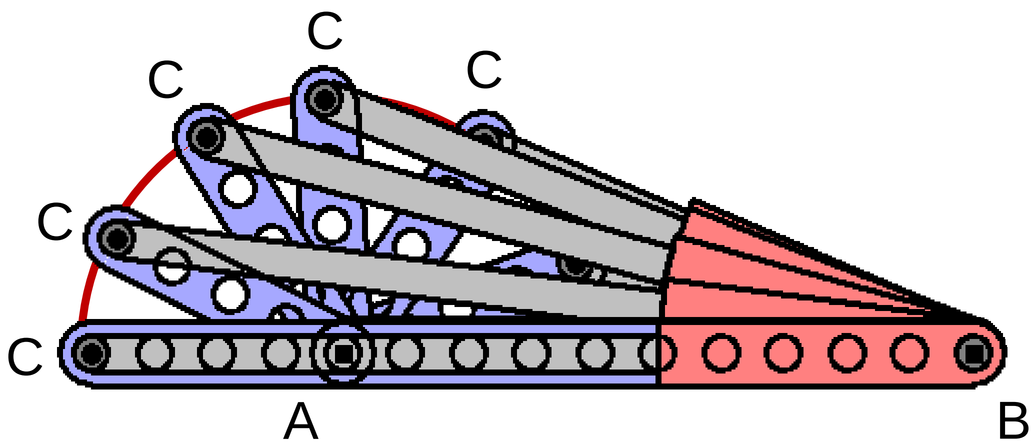
Bewegungen einer Baggerschaufel

Krandreieck

http://www.juergen-roth.de/dynageo/lochstangen/krandreieck.html



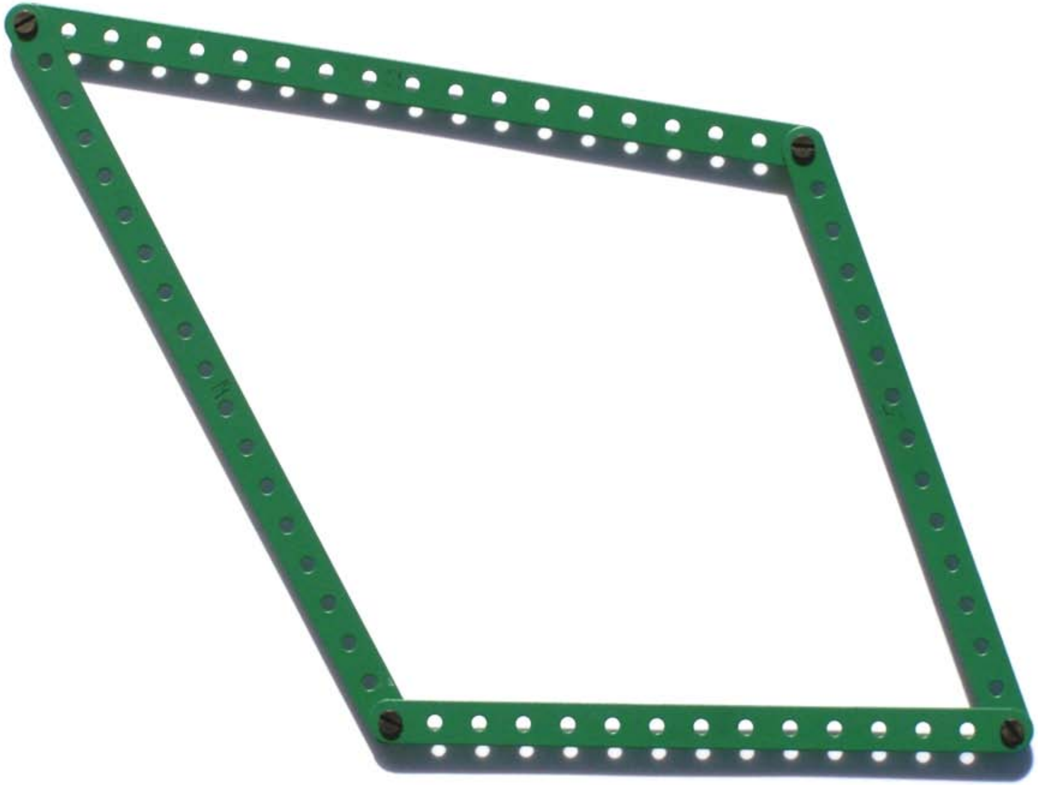
Krandreieck



Bewegungen einer Baggerschaufel

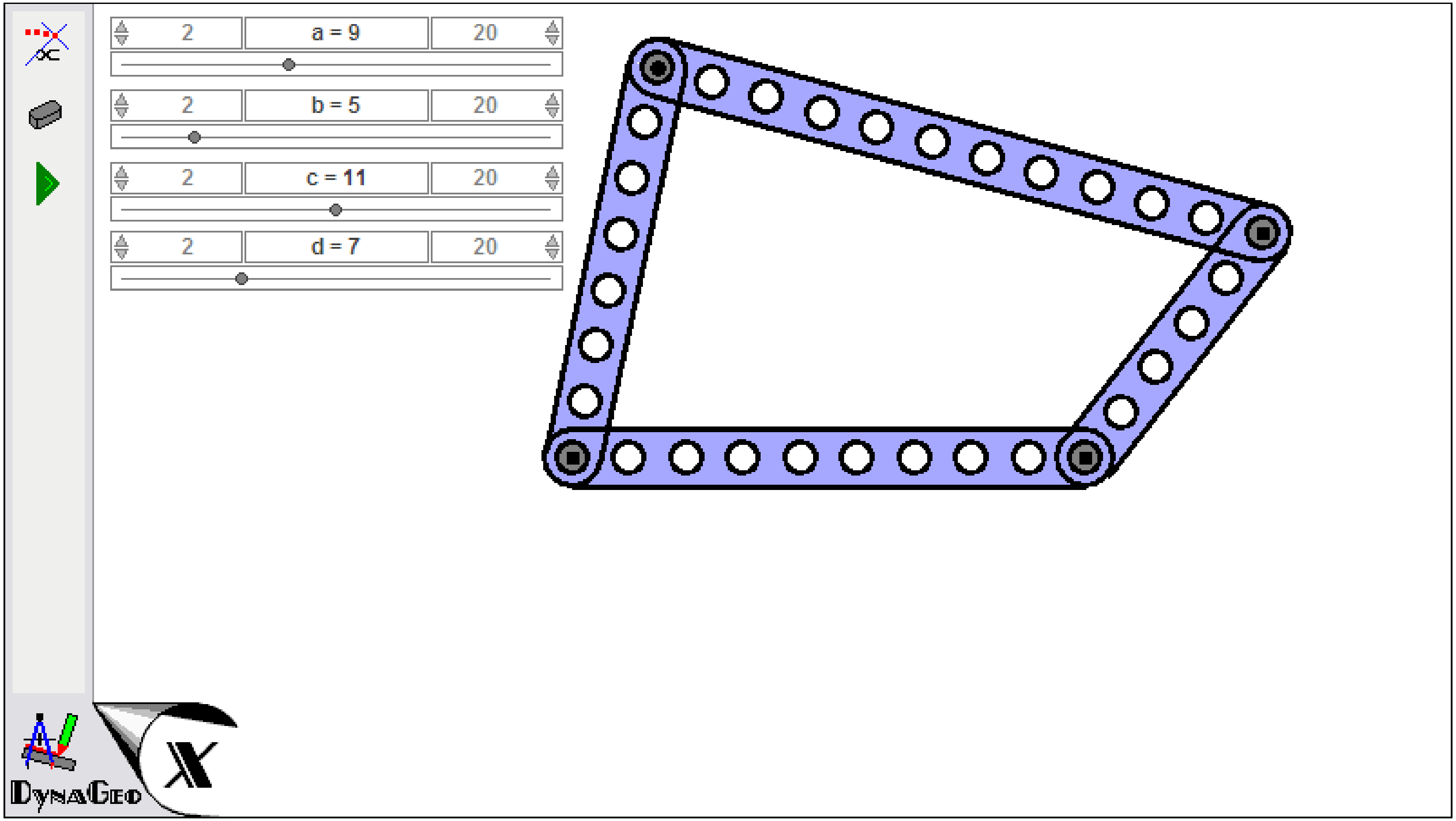
Bewegungen einer Baggerschaufel

Gelenkviereck(modell)



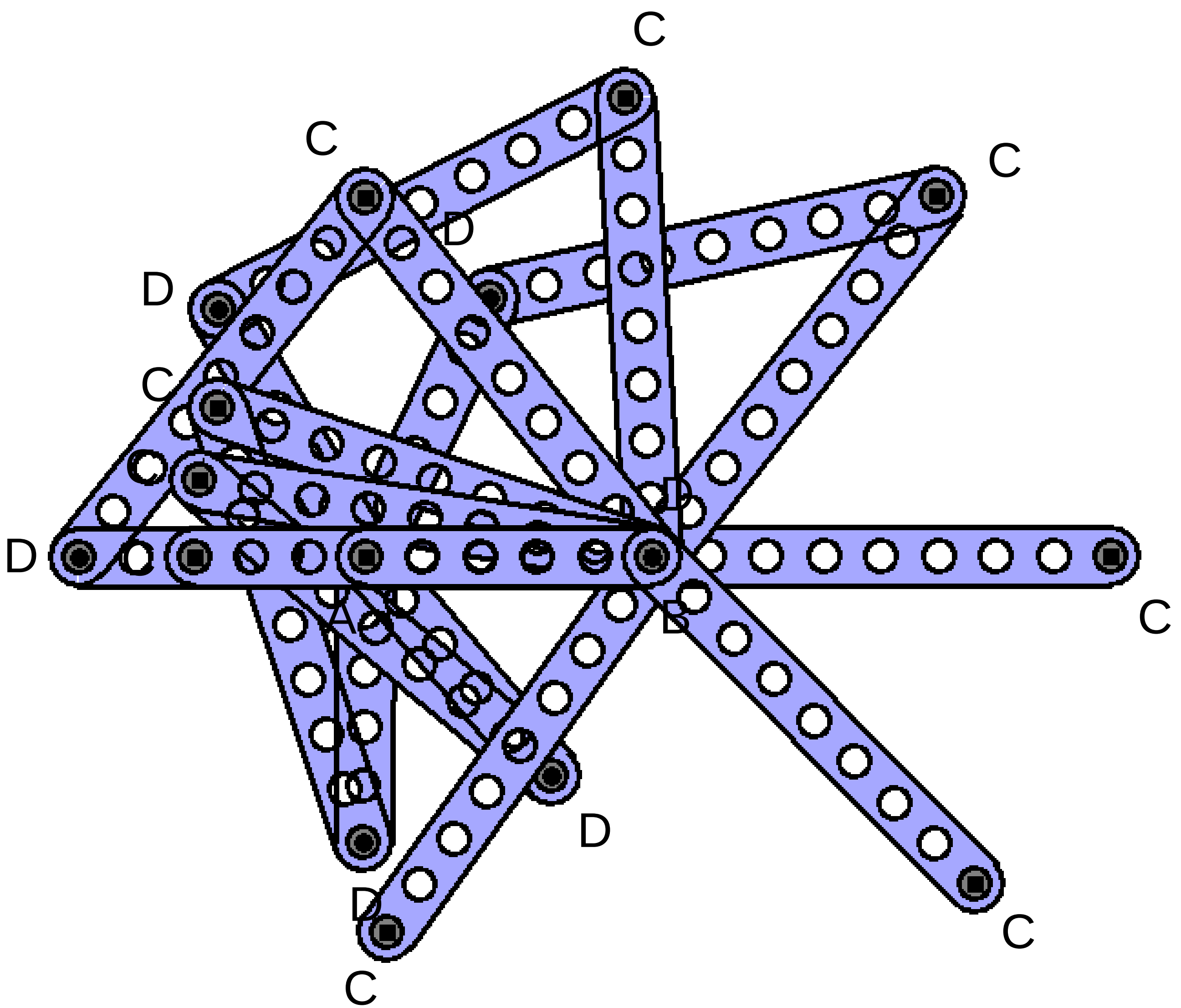
Gelenkviereck – DGS-Modell

http://www.juergen-roth.de/dynageo/lochstangen/viereck.html



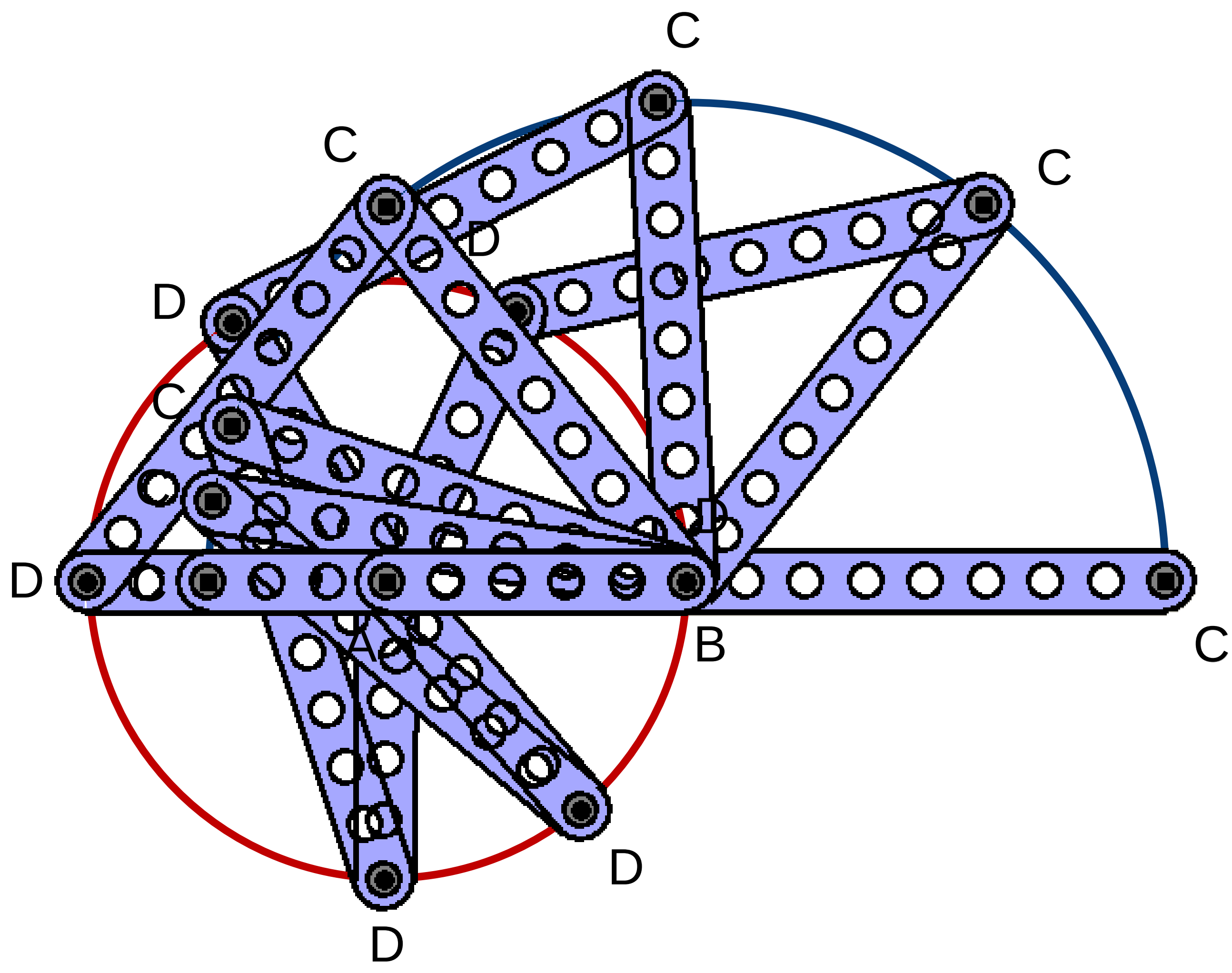
Gelenkviereck

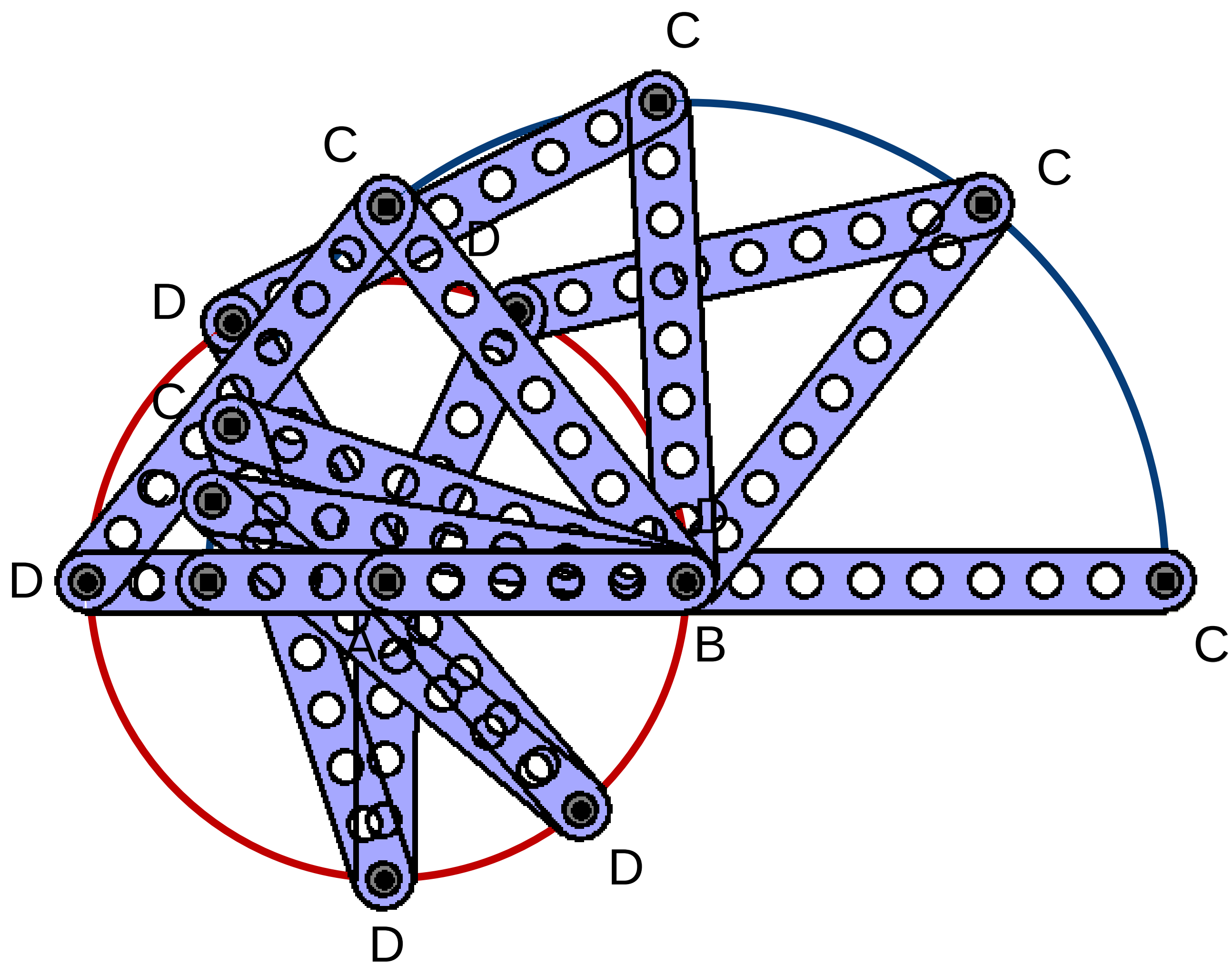
http://www.juergen-roth.de/dynageo/lochstangen/viereck.html



Gelenkviereck

http://www.juergen-roth.de/dynageo/lochstangen/viereck.html



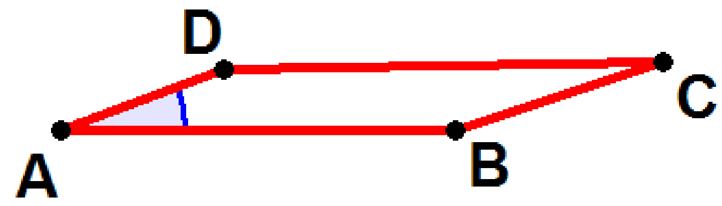

C
C
C
D
D
C
D
D
B
C
A
D
D

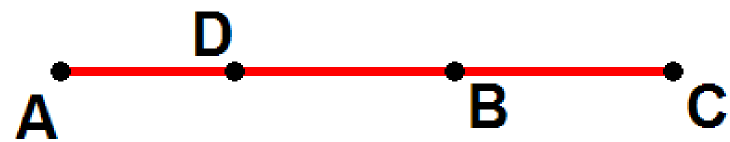
Gelenkviereck mit $0° \leq \alpha \leq 360°$

Bedingung für $\alpha = 0°$

- Alle Punkte des Vierecks *ABCD* liegen auf *AB*.
- Daraus ergibt sich für die Streckenlängen:

(I) $|AB| + |BC| = |CD| + |DA|$





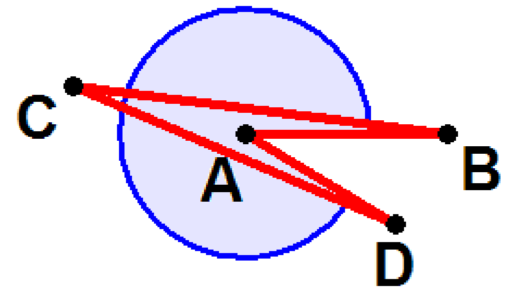
Bedingungen für $\alpha = 360°$

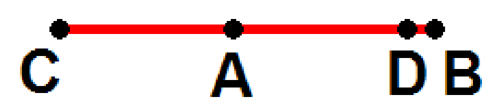
- *A* liegt zwischen *C* und *D*.

(II) $|CD| = |CA| + |AD|$

- A liegt zwischen C und B.

(III) $|CB| = |CA| + |AB|$





Gelenkviereck mit $0° \leq \alpha \leq 360°$

Bedingung für $\alpha = 0°$

- Alle Punkte des Vierecks *ABCD* liegen auf *AB*.
- Daraus ergibt sich für die Streckenlängen:

(I) $|AB| + |BC| = |CD| + |DA|$

Bedingungen für $\alpha = 360°$

- *A* liegt zwischen *C* und *D*.

(II) $|CD| = |CA| + |AD|$

- *A* liegt zwischen *C* und *B*.

(III) $|CB| = |CA| + |AB|$

(II) – (III):

$$|CD| - |CB| = |AD| - |AB|$$

(IV) $|CD| + |AB| = |AD| + |CB|$

(IV) – (I):

$$|CD| - |BC| = |CB| - |CD|$$

$$\Rightarrow 2\,|CD| = 2\,|BC|$$

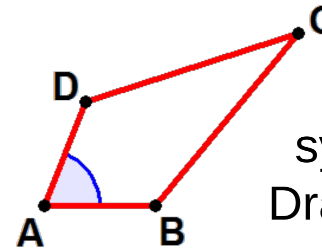
$$\Rightarrow |CD| = |BC| \quad (*)$$

(*) in (I) einsetzen:

$$|AB| + |BC| = |BC| + |DA|$$

$$\Rightarrow |AB| = |DA| \quad (**)$$

Aus (*) und (**) folgt:



ABCD ist ein symmetrisches Drachenviereck.

Pasch: Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882 Hilbert: Grundlagen der Geometrie. Leipzig, 1899

Moritz Pasch
(1843 – 1930)

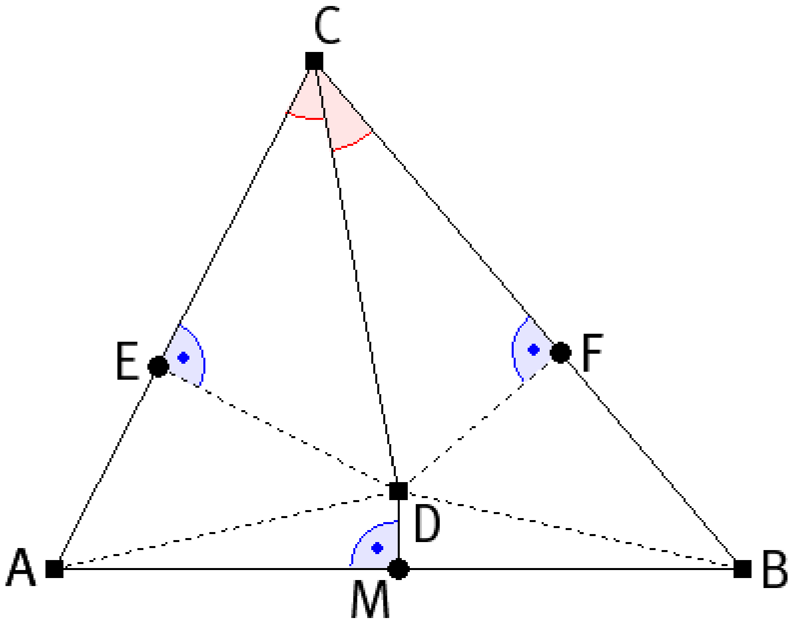
David Hilbert
(1862 – 1943)

Kapitel 0: Geometrie?!

0.3 Paradoxon: Jedes Dreieck ist gleichschenklig.

Anordnung, wozu?

- **Paradoxon:**
  - Jedes Dreieck ist gleichschenklig.
- **Beweis:** Im Dreieck ΔABC
  - halbiere CD den Innenwinkel bei C und
  - sei MD Mittelsenkrechte auf AB.
  - Dann ist $\Delta CED \cong \Delta CFD$ nach Kongruenzsatz WSW.
  - $\Delta AMD \cong \Delta BMD$ nach Kongruenzsatz SWS.
  - Aus $|ED| = |FD|$, $|AD| = |BD|$, $\angle AED = \angle BFD = 90°$ folgt mit SsW: $\Delta ADE \cong \Delta BDF$



  - Also ist $|AE| = |BF|$.
  - Damit ist $|AC| = |BC|$.
  - $\Delta\ ABC$ ist gleichschenklig.
- **Wo steckt der Fehler?**

Kapitel 0: Geometrie?!

0.4 Exkurs: Beweistechniken

Erinnerung:
a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
b) $\neg (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg (\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

Zu zeigen: $p \Rightarrow q$

- **Direkter Beweis**
  - Man geht von der Voraussetzung p aus und argumentiert durch eine Kette logischer Schlüsse so lange, bis man bei der Behauptung q ankommt.

Wenn Herr Roth kommt, dann ist er pünktlich.

- **Indirekter Beweis**
  - Man nimmt $\neg q$ an und schließt dann auf $\neg p$, man zeigt also in Wirklichkeit die Kontraposition $\neg q \Rightarrow \neg p$.
- **Widerspruchsbeweis**
  - Hier führt man die Negation der zu beweisenden Aussage $p \Rightarrow q$, also die Aussage $p \wedge \neg q$, zum Widerspruch. Man nimmt also sowohl p als auch $\neg q$ an und schließt dann solange weiter, bis man auf einen Widerspruch stößt.

Behauptung:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist n ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

p ist die Aussage „n ist ungerade" und ***q*** ist die Aussage „n^2 ist ungerade". Zu zeigen ist $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$.

Beweis (direkt):

$$\begin{aligned} n \text{ ungerade} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists_{k \in \mathbb{N}_0}\; n = 2k + 1 \\ &\Rightarrow \quad n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2 + 2k)}_{\in\, \mathbb{N}_0} + 1 \\ &\Rightarrow \quad n^2 \text{ ungerade} \end{aligned}$$

Damit ist die Implikation $p \Rightarrow q$, also die Behauptung bewiesen. #

Behauptung:

▷ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist n^2 ungerade, dann ist auch n ungerade.

p ist die Aussage „n^2 ist ungerade" und ***q*** ist die Aussage „n ist ungerade". Zu zeigen ist $p \Rightarrow q$.

Beweis (indirekt):

Aus der Annahme $\neg q$ ist $\neg p$ zu folgern. Wir zeigen also die zur Behauptung äquivalente Behauptung $\neg q \Rightarrow \neg p$. Dies bedeutet: Ist n gerade, dann ist auch n^2 gerade.

$$
\begin{aligned}
n \text{ gerade} &\Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{N}}\ n = 2k \\
&\Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2\underbrace{(2k^2)}_{\in\,\mathbb{N}} \\
&\Rightarrow n^2 \text{ gerade}
\end{aligned}
$$

Damit ist $\neg q \Rightarrow \neg p$, also auch die Behauptung bewiesen. #

Behauptung:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist n^2 ungerade, dann ist auch n ungerade.

p ist die Aussage „n^2 ist ungerade“ und ***q*** ist die Aussage „n ist ungerade“. Zu zeigen ist $p \Rightarrow q$.

Widerspruchsbeweis:

Die Negation $\neg(p \Rightarrow q)$ der zu beweisenden Aussage, also $p \wedge \neg q$, das ist die Aussage „n^2 ist ungerade und n ist gerade.“ wird zum Widerspruch geführt.

(*) n^2 ungerade und n gerade $\Leftrightarrow \neg(\exists_{i\in\mathbb{N}}\, n^2 = 2i) \wedge (\exists_{k\in\mathbb{N}}\, n = 2k)$

$$\Rightarrow (\forall_{i\in\mathbb{N}}\, n^2 \neq 2i) \wedge (\exists_{k\in\mathbb{N}}\, n^2 = (2k)^2)$$

$$\Rightarrow (\forall_{i\in\mathbb{N}}\, n^2 \neq 2i) \wedge (\exists_{k\in\mathbb{N}}\, n^2 = 2\underbrace{(2k^2)}_{\in\mathbb{N}})$$

Widerspruch!

Damit ist (*) falsch und das Gegenteil, die Behauptung richtig. #