Elemente der Algebra

Elemente der Algebra

Elemente der Algebra

3 Lineare Funktionen, Gleichungen und Gleichungssysteme

1 Programm & Grundlagen

2 Funktionen (Fkt.)

3 Lineare Fkt./Gleichungen

4 Quadrat. Fkt./Gleichungen

5 Exponentialfkt.

Kapitel 3: Lineare Funktionen, Gleichungen und Gleichungssysteme

3 Lineare Funktionen, Gleichungen und Gleichungssysteme

3.1 Lineare Funktionen

Handy-Tarif: Kostenfunktion

- Monatliche Grundgebühr g: 2,50 €
- Preis pro Einheit, „Minutenpreis“ m: 0,05 €
- Telefoneinheiten (Minuten) x
- Monatliche Kosten: $k(x) = mx + g$

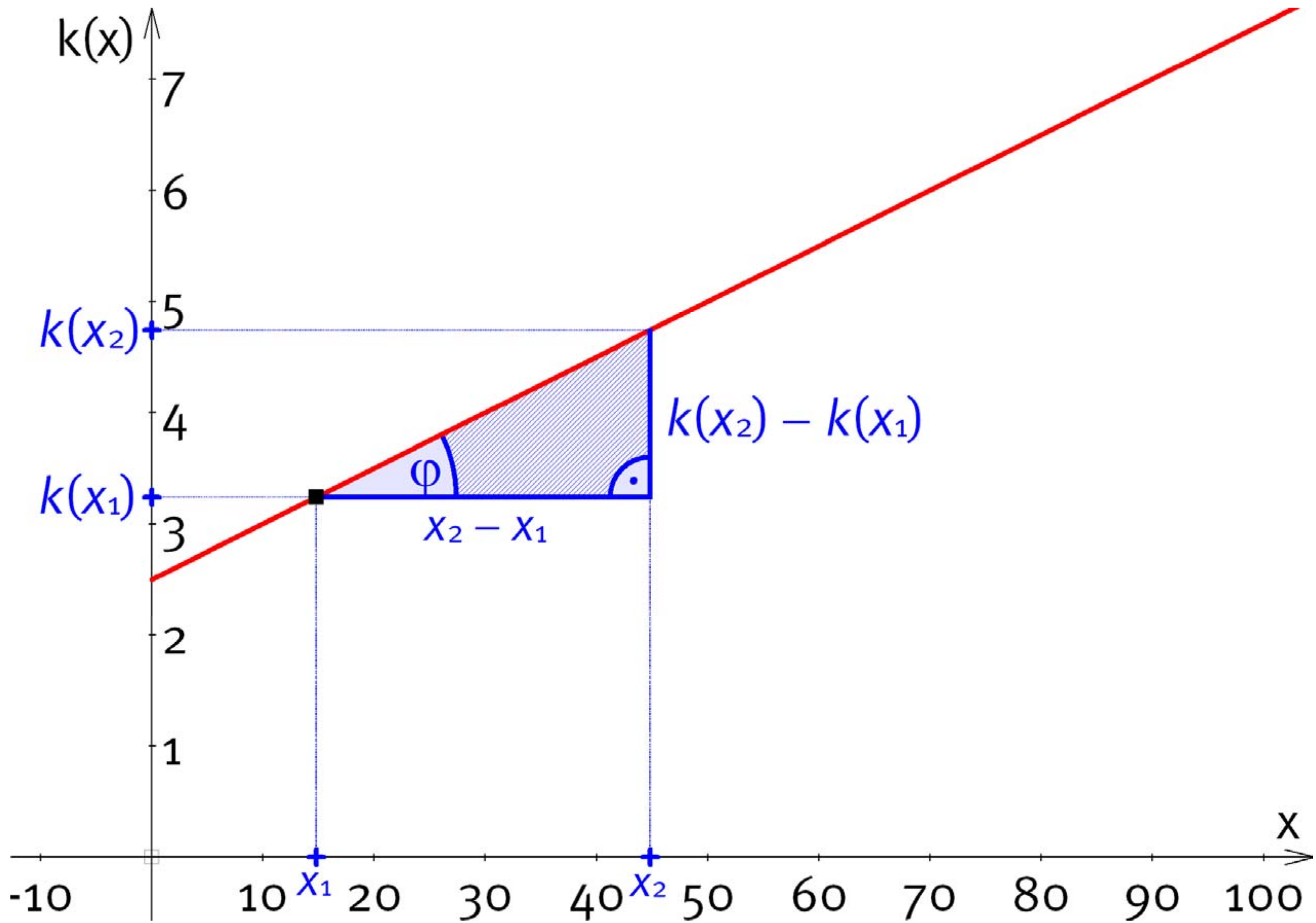
Telefonierte Einheiten/min	Monatliche Kosten/€
0	2,50
10	3,00
20	3,50
30	4,00
40	4,50

+10 +10 +10 +10

+0,5 +0,5 +0,5 +0,5

- **Wie ändern sich die Kosten bei gleichen Zuwächsen der telefonierten Einheiten (Minuten)?**
- **Lösung:**
  - Zu gleichen Zuwächsen im Argument gehört immer der gleiche Wachstumssummand.

Handy-Tarif: Kostenfunktion



Lineare Funktionen

Definition:

- Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißt **lineare Funktion**.

Sonderfälle (genaueres später):

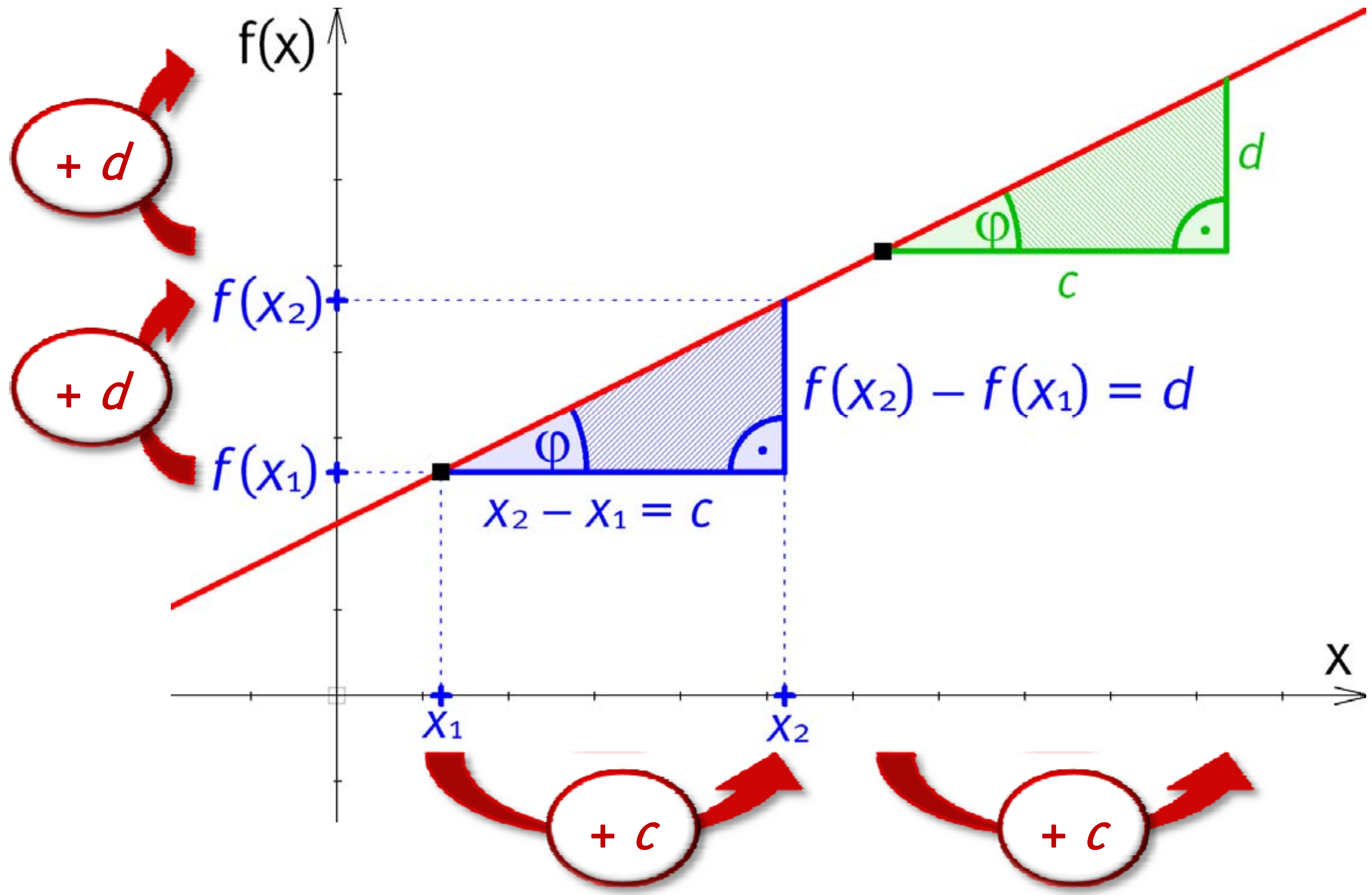
- Eine lineare Funktion mit $b = 0$, also eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ heißt **proportionale Funktion**.
- Eine lineare Funktion mit $a = 0$, also eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto b$ mit $b \in \mathbb{R}$ heißt **konstante Funktion**.

Charakteristische Eigenschaft linearer Funktionen:

- Zu gleichen Zuwächsen im Argument gehört immer der gleiche Wachstumssummand.

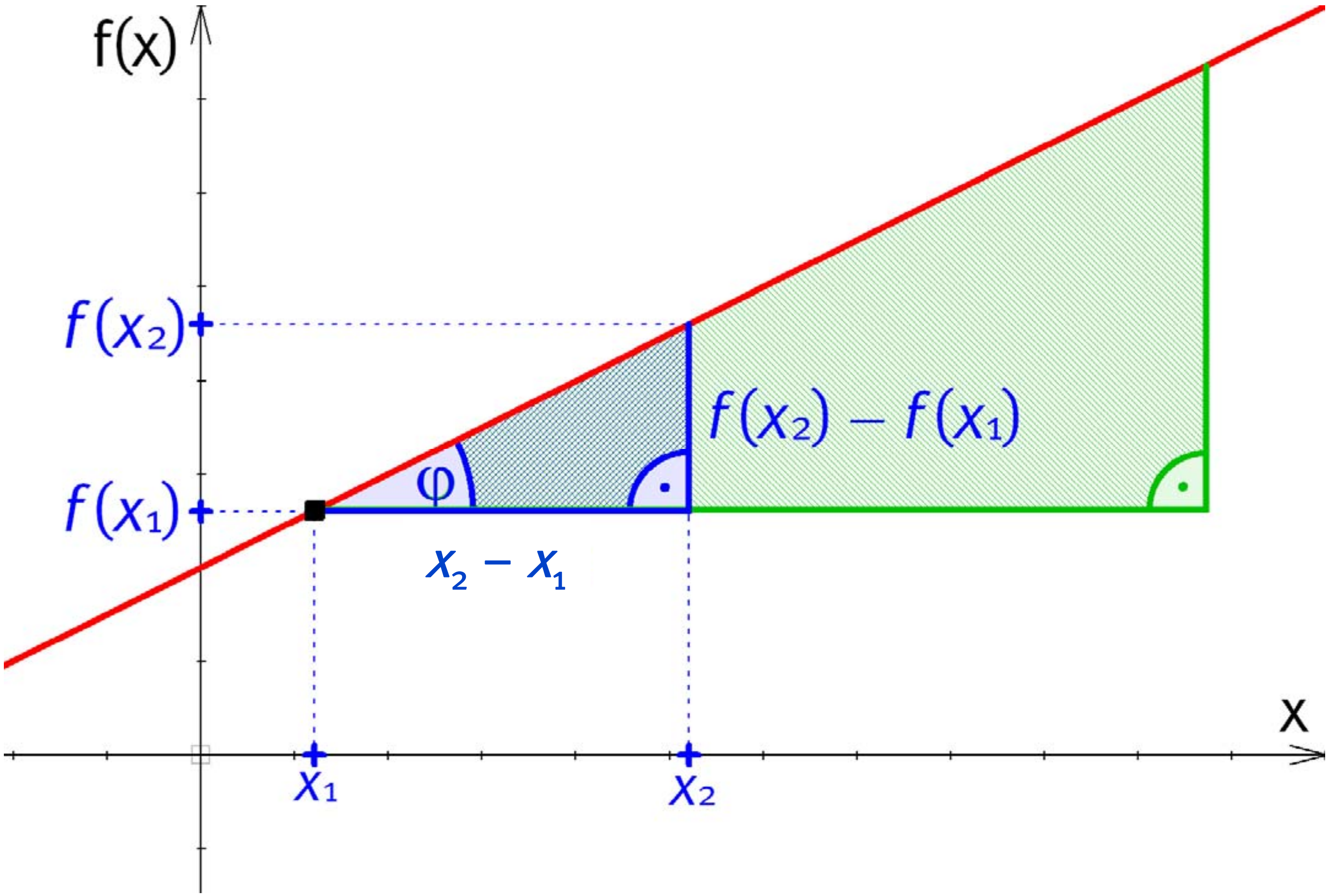
$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\ f(x+c) = a\cdot(x+c)+b = \underbrace{a\cdot x+b}_{=f(x)} + \underbrace{a\cdot c}_{:=d} = f(x)+d$$

Lineare Funktionen

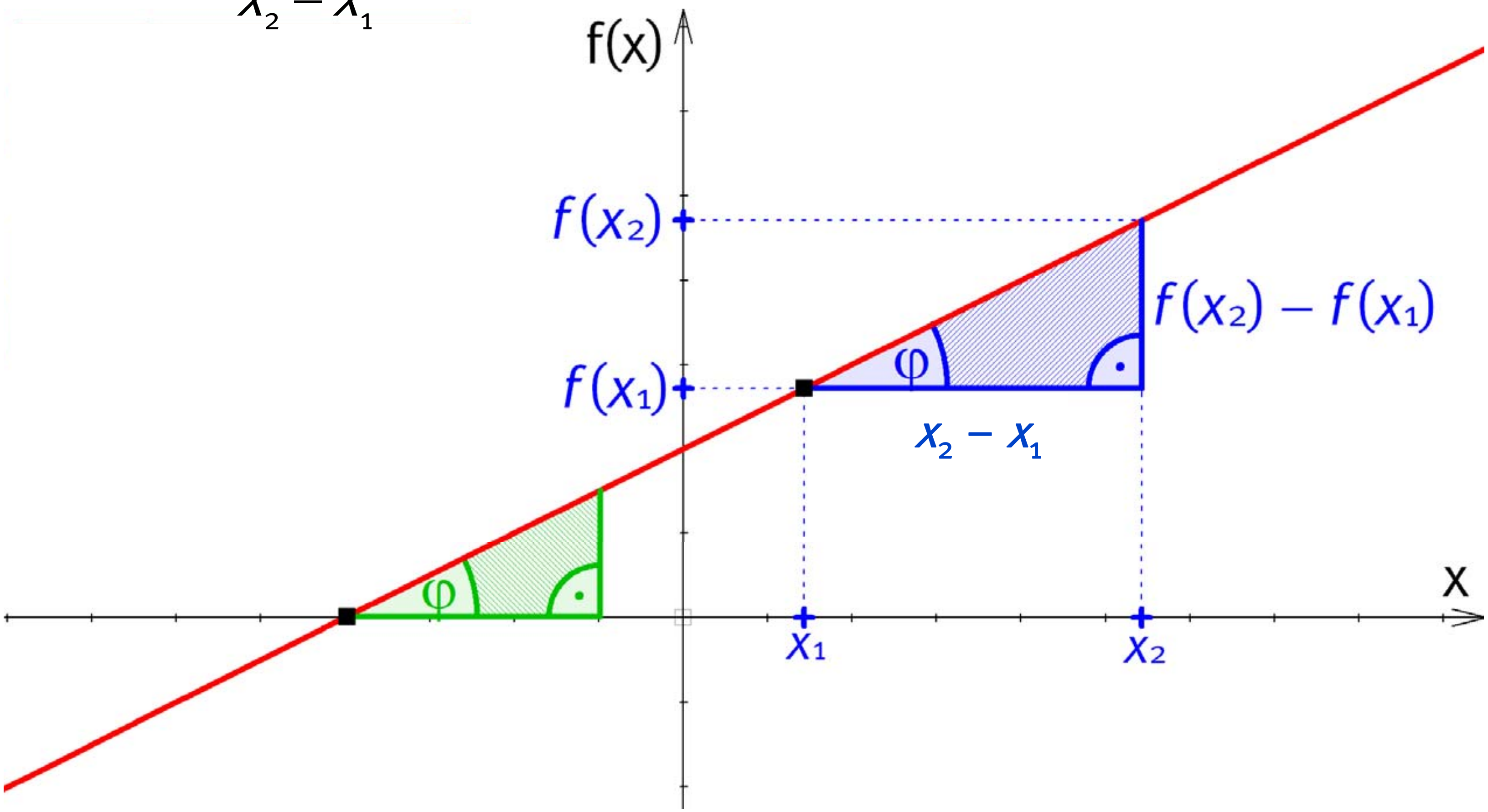


$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\, f(x+c)=a\cdot(x+c)+b=\underbrace{a\cdot x+b}_{=f(x)}+\underbrace{a\cdot c}_{:=d}=f(x)+d$$

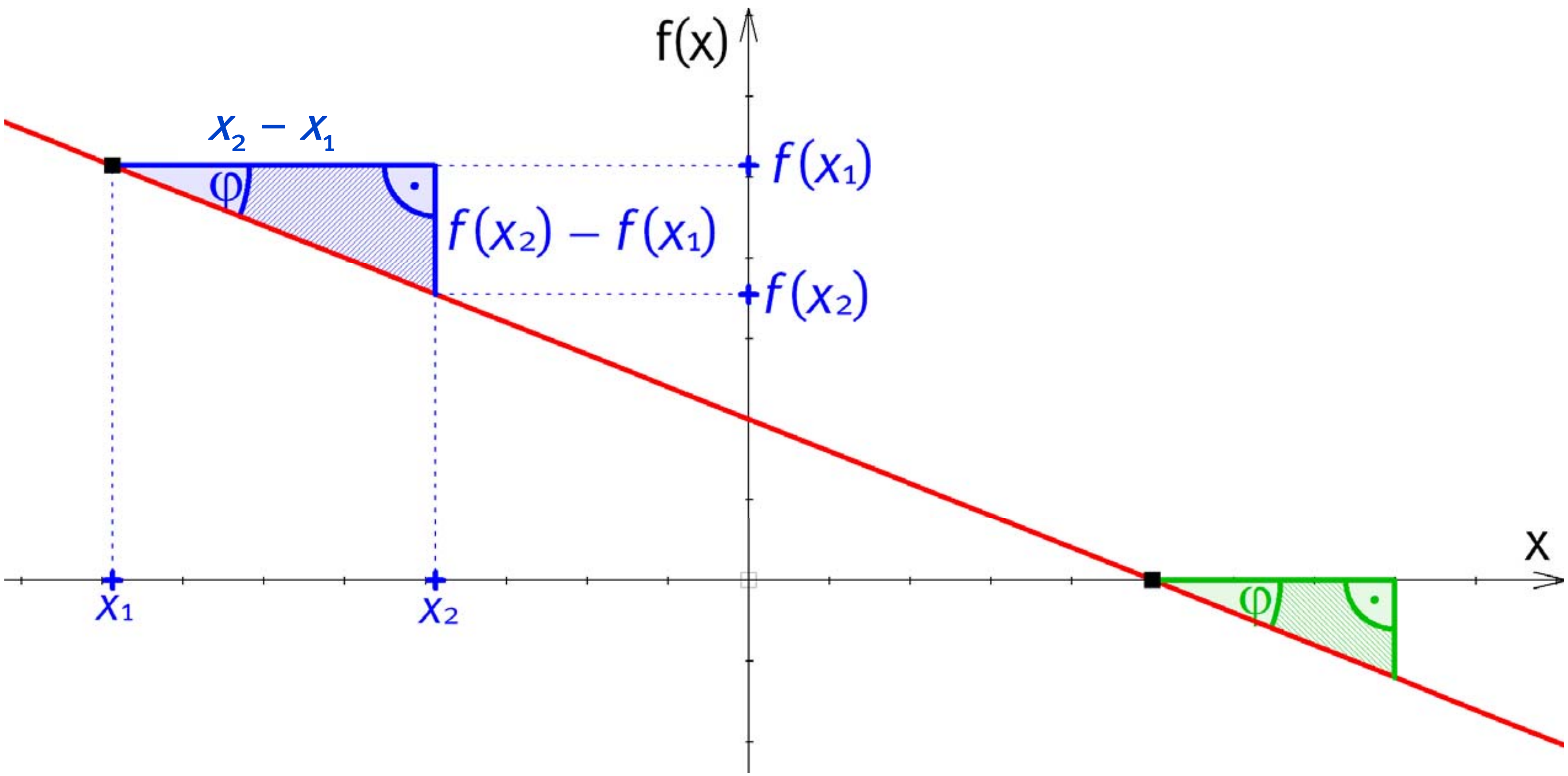
Lineare Funktionen



$$\tan\varphi = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Lineare Funktion



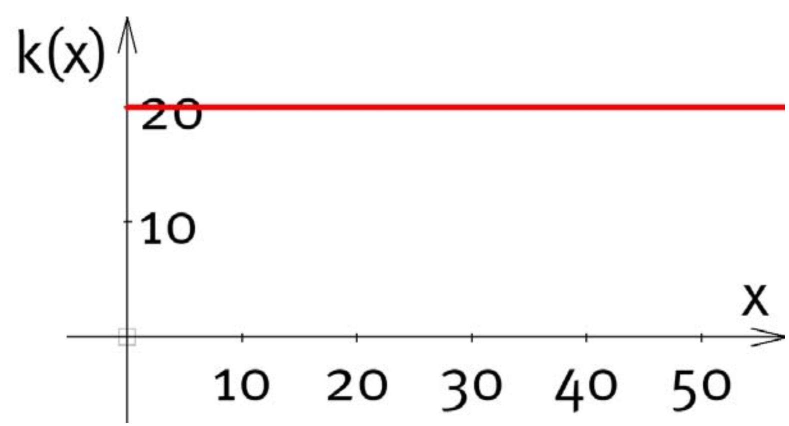
Sonderfall: Konstante Funktionen

- **Handy-Tarif: Flatrate**

  - Monatlicher Pauschalbetrag: 20 €
  - Preis pro Einheit: 0,00 €
  - Telefoneinheiten x
  - Monatl. Kosten: $k(x) = 20$

Telefonierte Einheiten/min	Monatliche Kosten/€
0	20
+10	+0
10	20
+10	+0
20	20
+10	+0
30	20

- **Definition:**
  - Eine lineare Funktion mit $a = 0$, also eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto b$ mit $b \in \mathbb{R}$ heißt **konstante Funktion**.



Sonderfall: Proportionale Funktionen

Wurstaufschnitt einkaufen

- 100 g Wurstaufschnitt kosten 1,20 €
- Was muss man für 300 g, 150 g, 600 g bzw. 120 g Aufschnitt bezahlen?

Aufschnitt/g	Preis/€
100	1,20
300	3,60
150	1,80
600	7,20
200	2,40

Lösung

- Zur doppelten (dreifachen, vierfachen, ...) Menge gehört der doppelte (dreifache, vierfache, ...) Preis.
- Kauft man nur die Hälfte (ein Drittel, ein Viertel, ...) dann bezahlt man nur die Hälfte (ein Drittel, ein Viertel, ...).

Sonderfall: Proportionale Funktionen

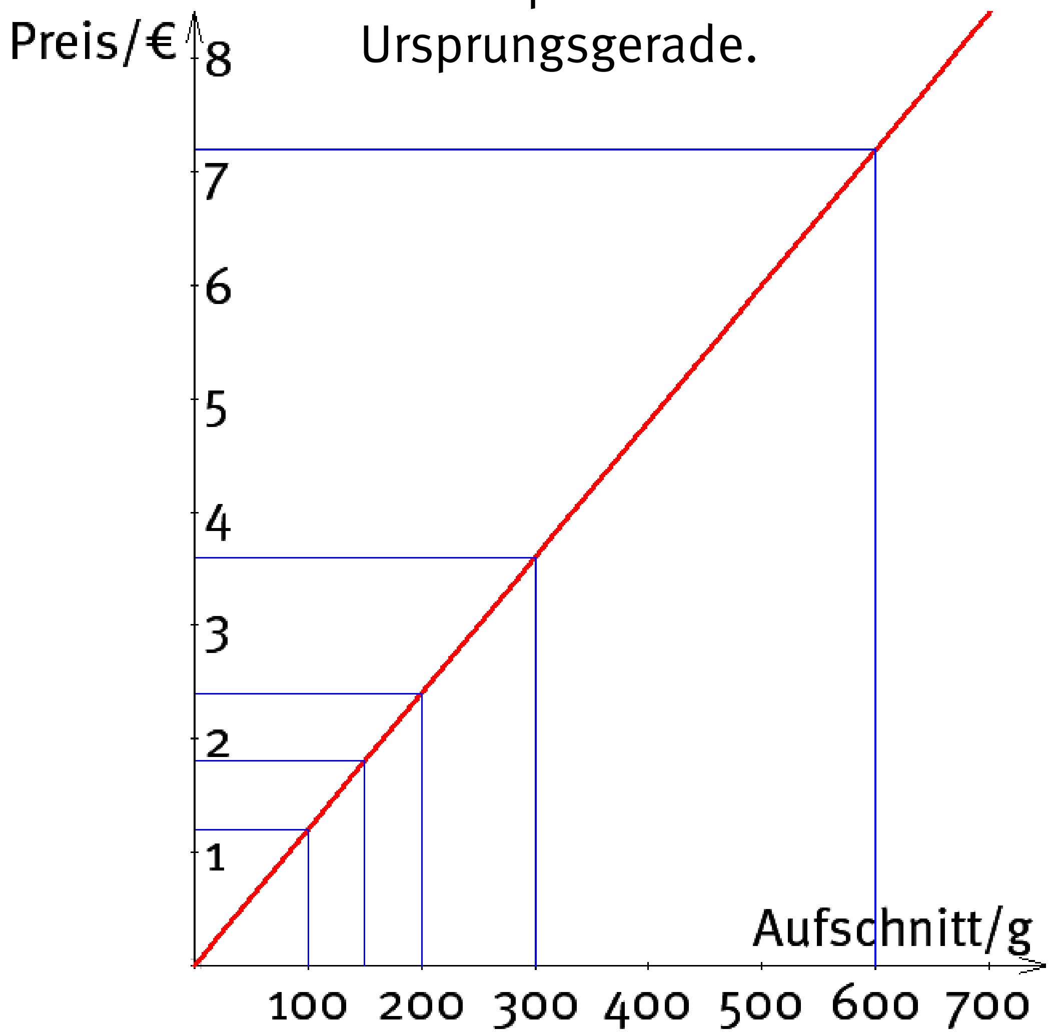
$x = \text{Aufschnitt}/g$	$f(x) = \text{Preis}/€$	$\frac{f(x)}{x} = \frac{\text{Preis}/€}{\text{Aufschnitt}/g}$
100	1,20	$\frac{1{,}2}{100} = \frac{3}{250}$
300	3,60	$\frac{3{,}6}{300} = \frac{3}{250}$
150	1,80	$\frac{1{,}8}{150} = \frac{3}{250}$
600	7,20	$\frac{7{,}2}{600} = \frac{3}{250}$
200	2,40	$\frac{2{,}4}{200} = \frac{3}{250}$

$$\frac{f(x)}{x} = a = const.$$

$$\exists_{a\in\mathbb{R}} \forall_{x\in\mathbb{R}} \quad f(x) = a \cdot x$$

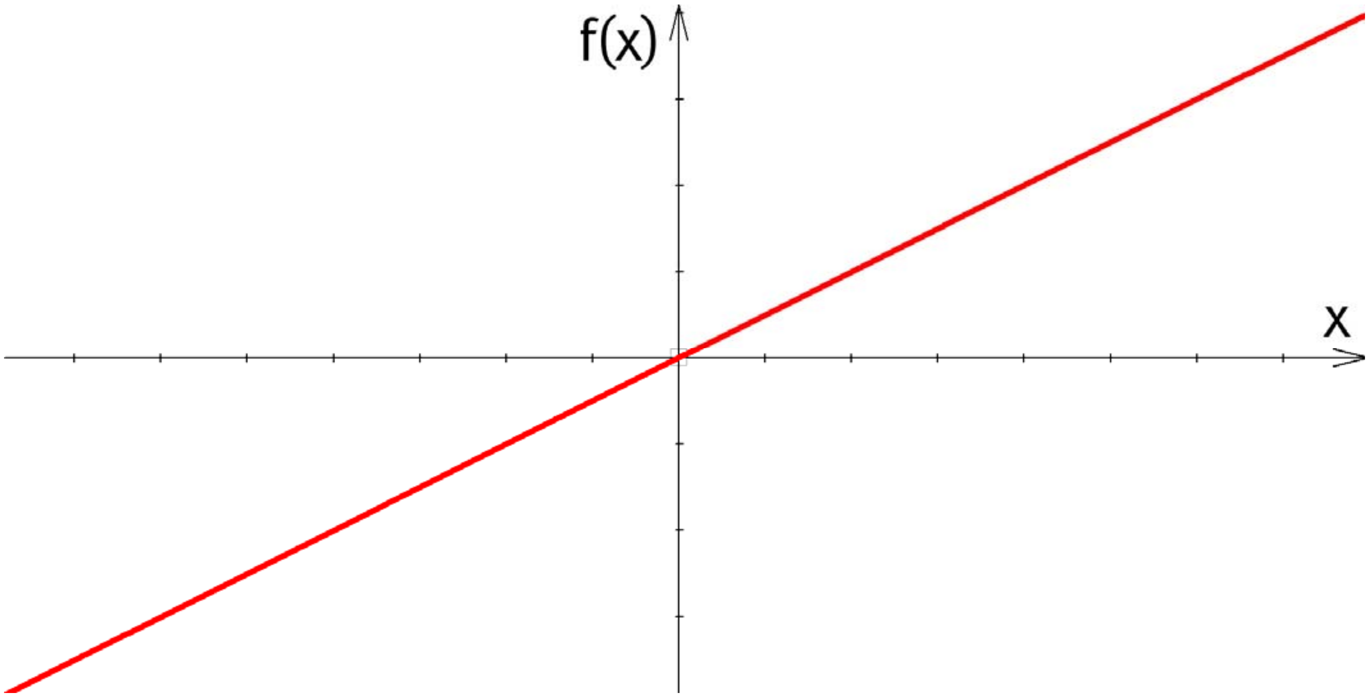
Sonderfall: Proportionale Funktionen

Der Graph ist eine Ursprungsgerade.



Sonderfall: Proportionale Funktionen

- **Definition:**
  - Eine lineare Funktion mit $b = 0$, also eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ heißt **proportionale Funktion**.
  - Der Koeffizient a wird *Proportionalitätsfaktor* oder *Proportionalitätskonstante* genannt.



Sonderfall: Proportionale Funktionen

- **Charakteristische Eigenschaften:**
  - Der Graph einer proportionalen Funktion ist eine **Ursprungsgerade** durch den Punkt $(1|a)$.
  - Eine **Addition** (Subtraktion) **von Argumenten** bewirkt eine **Addition** (Subtraktion) **von Funktionswerten**.

$$\forall_{x_1,x_2 \in \mathbb{R}}\ f(x_1 \pm x_2) = a \cdot (x_1 \pm x_2) = a \cdot x_1 \pm a \cdot x_2 = f(x_1) \pm f(x_2)$$

- Wird das **Argument ver-r-facht** (verdoppelt, verdreifacht, halbiert, ...), dann wird auch der **Funktionswert ver-r-facht** (verdoppelt, verdreifacht, halbiert, ...).

$$\forall_{r \in \mathbb{R}}\ f(r \cdot x) = a \cdot (r \cdot x) = r \cdot ax = r \cdot f(x)$$

- **Quotientengleichheit:** Der Quotient aus Funktionswert $f(x)$ und zugehörigem Argument x ist für alle $x \in \mathbb{R}$ konstant gleich der Proportionalitätskonstanten a.

$$\forall_{x \in \mathbb{R}}\ \frac{f(x)}{x} = \frac{ax}{x} = a$$

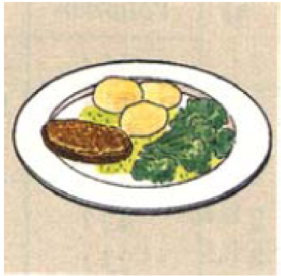
- **Handelt es sich bei folgenden Beispielen um eine „je mehr – desto mehr"-Zuordnung? Ist sie auch proportional?**
  - Wasservolumen → Wassergeld
    (monatlich 1,5 € Grundgebühr; 1 m³ kostet 1,55 €)
  - Anzahl der Flaschen → Weinvolumen
    (Abfüllen von Wein in gleich große Flaschen)
  - Gewicht → Porto
    (Paket)
  - Gefahrene Kilometer → Erstattungsbetrag
    (0,30 € für jeden gefahrenen Kilometer)
  - Seitenlänge → Flächeninhalt
    (Quadrat)
  - Kantenlänge → Volumen
    (Würfel)

Anwendung: „Dreisatz“

Beispiel:

- Dorit hat ihre Freundinnen zum Mittagessen eingeladen und will ihr Lieblingsessen kochen. Wie viel Sechskorn muss sie für 7 Personen abwiegen?
- Dorit überlegt: Das Rezept legt für jede Person die gleiche Menge einer Zutat zugrunde.
- Also gehört z.B. zur doppelten Personenzahl die doppelte Menge der Zutaten.

Sechskornfrikadellen mit Kartoffeln und Broccoli



Zutaten (4 Personen):

140 g Sechskorn
4 Eier
4 Zwiebeln
600 ml Gemüsebrühe
Kräutersalz, 400 g Broccoli
8 Kartoffeln, Pfeffer, Koriander, gehackter Schnittlauch,
20 g Mandelblättchen

- Folglich ist die Zuordnung
  Anzahl der Personen → Sechskorngewicht
  proportional.

Anwendung: „Dreisatz“

Beispiel:

- Dorit rechnet in drei Schritten:
- 4 Personen benötigen 140 g
- 1 Person benötigt
  $140\text{ g} : 4 = 35\text{ g}$
- 7 Personen benötigen
  $35\text{ g} \cdot 7 = 245\text{ g}$
- Ergebnis: Für 7 Personen werden 245 g Sechskorn benötigt.

	Personenzahl	*Sechskorngewicht (in g)*	
	4	140	
$:4$	1	35	$:4$
$\cdot 7$	7	245	$\cdot 7$

Bemerkung:

Das funktioniert auch für umgekehrt proportionalen Zusammenhängen, bei denen y proportional zu $1/x$ ist.

Exkurs: Lineare Abbildung

- **Achtung (!)**
  - Proportionale Funktionen (!) werden in der linearen Algebra als **lineare Abbildungen** bezeichnet!

- **Definition** (lineare Algebra)**:**
  - Seien V und W Vektorräume über einem gemeinsamen Grundkörper K. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heißt lineare Abbildung, wenn für alle $x, y \in V$ und $a \in K$ gilt:
    - f ist *homogen*, d. h. $a \cdot f(x) = f(a \cdot x)$
    - f ist *additiv*, d. h. $f(x + y) = f(x) + f(y)$

- **Bemerkung:**
  - Nur *proportionale Funktionen* sind „*lineare Abbildungen*". Unsere *linearen Funktionen* würde man in der linearen Algebra als „*affine Abbildungen*" bezeichnen.

3 Lineare Funktionen, Gleichungen und Gleichungssysteme

3.2 Lineare Gleichungen

Nullstellen einer linearen Funktion

- **Satz:**
  Eine lineare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ hat
  - für $a = 0$ und $b = 0$ unendlich viele Nullstellen,
  - für $a = 0$ und $b \neq 0$ keine Nullstelle,
  - für $a \neq 0$ genau eine Nullstelle.
- **Beweis:**
  - Mit $a = 0$ und $b = 0$ gilt $f(x) = 0 \cdot x + 0 = 0$. Damit ist jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von f.
  - Mit $a = 0$ und $b \neq 0$ gilt $f(x) = 0 \cdot x + b = b$. Damit ergibt sich für jedes $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = b \neq 0$.
  - Mit $a \neq 0$ führt der Ansatz $f(x) = 0$ zur Gleichung $ax + b = 0$, die durch Äquivalenzumformungen gelöst werden kann:
    $$x = -\frac{b}{a}$$
    Folglich besitzt f genau eine Nullstelle, die direkt aus den Koeffizienten des Funktionsterms abgelesen werden kann.

#

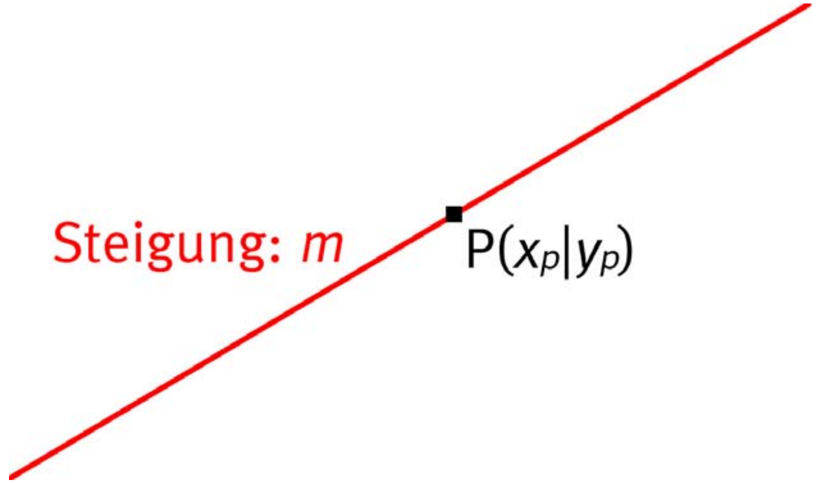
„Geradengleichung"

Punkt-Steigungs-Form

- Von einer Gerade ist nur die Steigung m bekannt und die Tatsache, dass der Punkt $P(x_p|y_p)$ auf der Geraden liegt.
- Gesucht: Gleichung der zugehörigen linearen Funktion.
- Ansatz: $y = mx + b$ (*)
- Einsetzen der Koordinaten von P liefert:

$$y_p = mx_p + b$$

$$b = y_p - mx_p$$



- Einsetzen in (*) liefert:

$$y = mx + (y_p - mx_p)$$

$$y = mx - mx_p + y_p$$

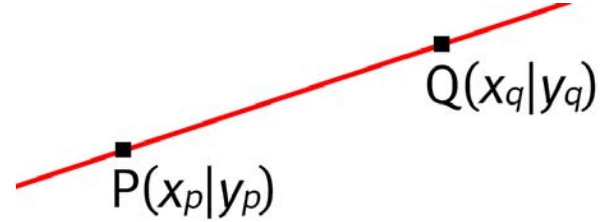
$$\boxed{y = m \cdot (x - x_p) + y_p}$$

Dies ist die sogenannte Punkt-Steigungs-Form der Funktionsgleichung.

„Geradengleichung“

Zwei-Punkte-Form

- Von einer Geraden ist nur bekannt, dass die Punkte $P(x_p|y_p)$ und $Q(x_q|y_q)$ auf der Geraden liegt. ($x_p \neq x_q$)
- Gesucht: Gleichung der zugehörigen linearen Funktion.
- Ansatz: $y = ax + b$ (°)
- Einsetzen der Koordinaten von P liefert: $y_p = ax_p + b$ (*)
- Einsetzen der Koordinaten von P liefert: $y_q = ax_q + b$ (**)
- Auflösen von (*) nach b liefert: $b = y_p - ax_p$ (°°)



- Einsetzen in (**) liefert:

$$y_q = ax_q + (y_p - ax_p)$$

$$y_q - y_p = a \cdot (x_q - x_p)$$

$$a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} \quad (\Delta)$$

- Einsetzen von (°°) in (°) liefert: $y = ax + y_p - ax_p$

$$y = a \cdot (x - x_p) + y_p$$

- Einsetzen von (Δ) liefert die Zwei-Punkte-Form:

$$\boxed{y = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} \cdot (x - x_p) + y_p}$$

- **Bestimmen Sie die Nullstellen folgender linearer Funktionen:**
  - $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 3$
  - $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 5x$
  - $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 4$
- **„Geradengleichungen“**
  - Von einer linearen Funktion f ist nur bekannt, das der Graph die Steigung -2 besitzt und der Punkt $P(2|3)$ auf dem Graph der Funktion liegt. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
  - Von einer linearen Funktion g ist nur bekannt, das die Punkte $A(-3|4)$ und $B(3|6)$ auf dem Graph der Funktion liegen. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Lineare Gleichung mit zwei Unbekannten

- **Bemerkung:**
  - Für eine lineare Gleichung $ax + by = c$ mit a, b, $c \in \mathbb{R}$ sowie zwei Unbekannten x und y besteht die Lösungsmenge aus geordneten Paaren $(x|y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- **Beispiel:**
  - $2x + 3y = 5$
  - Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{ (x|y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\middle|\; y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \right\}$
  - Betrachtet man die Paare als Punkt-Koordinaten in einem kartesischen Koordinatensystem der Ebene, dann bilden die Punkte dieser Menge eine Gerade.

Lineare Gleichung mit zwei Unbekannten

- **Bemerkung:** Für lineare Gleichung $ax + by = c$ mit $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$ lassen sich bzgl. der Lösungsmenge im Wesentlichen drei Fälle unterscheiden:
  - **1. Fall:** a ≠ 0 und b ≠ 0 $\quad \mathbb{L} = \left\{ (x|y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\middle|\; y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \right\}$

    Die Lösungsmenge ist der Graph der linearen Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.
  - **2. Fall:** a = 0 und b ≠ 0 $\quad \mathbb{L} = \left\{ (x|y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\middle|\; y = \frac{c}{b} \right\}$

    Die Lösungsmenge ist der Graph der Konstanten Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{c}{b}$.
  - **2. Fall:** a ≠ 0 und b = 0 $\quad \mathbb{L} = \left\{ (x|y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\middle|\; x = \frac{c}{a} \right\}$

    Die Lösungsmenge ist eine Parallele zur y-Achse mit der Gleichung $x = \frac{c}{a}$, aber keine Funktionsgraph!

Lineare Funktion $\leftrightarrow$ lineare Gleichung

- **Satz:**
  - Der Graph einer linearen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto mx + t$ mit $m, t \in \mathbb{R}$ ist gleichzeitig die Lösungsmenge einer linearen Gleichung zweier Variablen $ax + by = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.
  - Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung $ax + by = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist nur dann der Graph einer linearen Funktion, wenn $b \neq 0$ ist.
- **Präsenzübung:**
  - Machen Sie sich die Aussagen der vorhergehenden Folie klar, indem Sie für die Variablen a, b und c jeweils Elemente der Menge $\{0, 2, 3, 4\}$ einsetzen.
  - Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit der beiden Aussagen des obigen Satzes.

3 Lineare Funktionen, Gleichungen und Gleichungssysteme

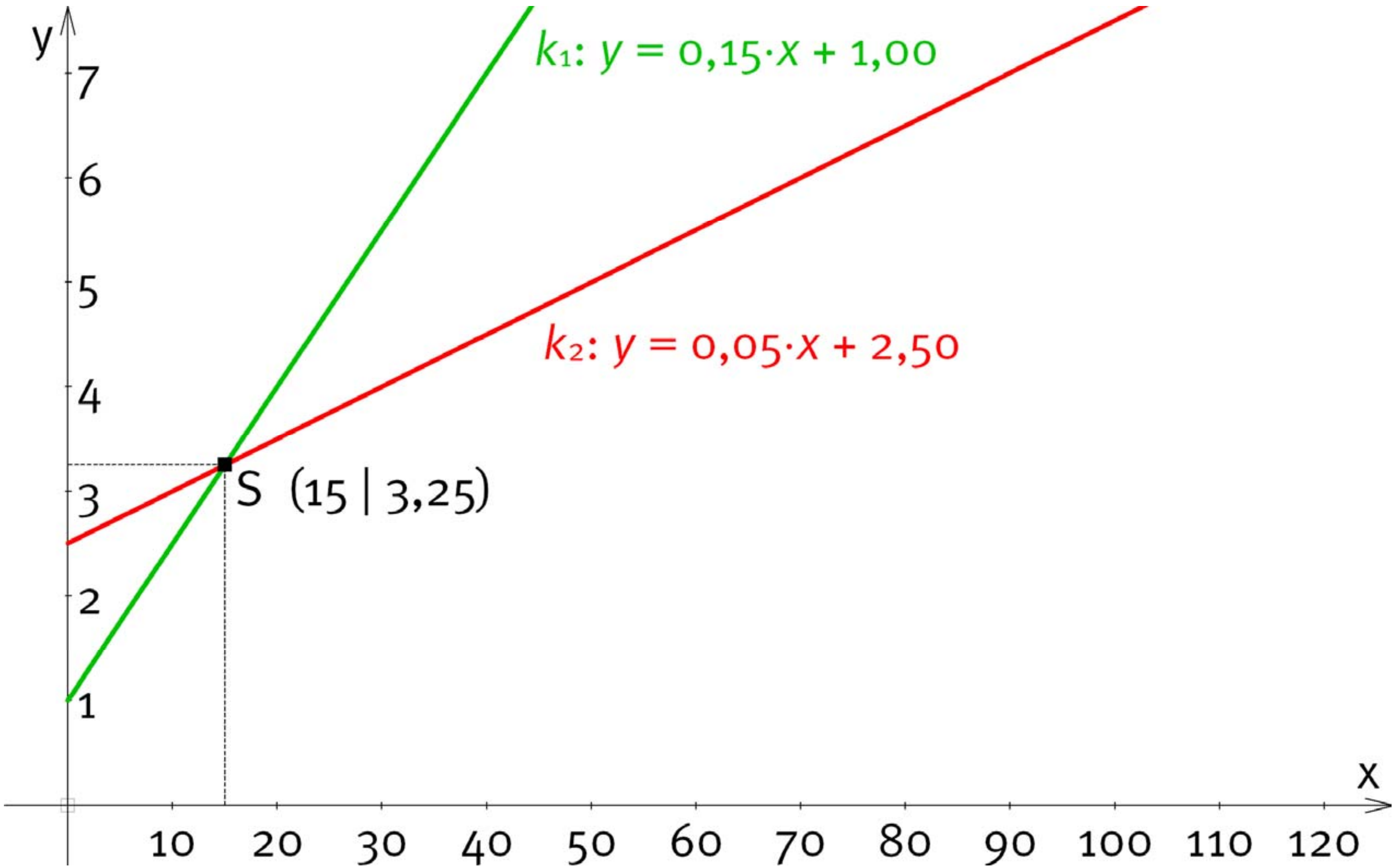
3.3 Lineare Gleichungssysteme

Günstigster Handy-Tarif

- Tarif 1: Geringe Grundgebühr
  - Monatliche Grundgebühr g_1: 1,00 €
  - Preis pro Einheit, „Minutenpreis“ m_1: 0,15 €
  - Telefoneinheiten (Minuten) x
  - Monatliche Kosten: $k_1(x) = m_1 x + g_1$

- Tarif 2: Geringer Minutenpreis
  - Monatliche Grundgebühr g_2: 2,50 €
  - Preis pro Einheit, „Minutenpreis“ m_2: 0,05 €
  - Telefoneinheiten (Minuten) x
  - Monatliche Kosten: $k_2(x) = m_2 x + g_2$
- Ab wie vielen Telefoneinheiten ist Tarif 2 günstiger?

Günstigster Handy-Tarif



Günstigster Handy-Tarif

- **Gesucht**
  ist zunächst ein Paar (x|y), das die beiden Gleichungen

  k_1: $y = 0{,}15x + 1$ (I)

  k_2: $y = 0{,}05x + 2{,}5$ (II)

  gleichzeitig erfüllt, also eine Lösung für dieses **lineare Gleichungssystem** darstellt.

- **Lösungsverfahren:**
  Aus der Schule kennen Sie drei Lösungsverfahren für solche linearen Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Variablen (Unbekannten):
  - Gleichsetzungsverfahren
  - Additionsverfahren
  - Einsetzungsverfahren

- **Ziel:**
  Dabei soll jeweils eine Variable eliminiert werden, um zu einer Gleichung mit einer Unbekannten zu kommen, die einfach gelöst werden kann (vgl. 3.2).

Günstigster Handy-Tarif

(I) $y = 0{,}15x + 1$

(II) $y = 0{,}05x + 2{,}5$

- **Gleichsetzungsverfahren**
  - Gleichsetzen von (I) und (II) liefert:

$$\begin{aligned} 0{,}15x + 1 &= 0{,}05x + 2{,}5 && \big| -(0{,}05x + 1) \\ 0{,}1x &= 1{,}5 && \big| \cdot 10 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

  - Einsetzen in (II) liefert:

$$\begin{aligned} y &= 0{,}05 \cdot 15 + 2{,}5 \\ &= 0{,}75 + 2{,}5 \\ &= 3{,}25 \end{aligned}$$

  - Die Lösung ist das geordnete Paar $(15|3{,}25)$

- **Additionsverfahren**
  - Subtraktion der Gleichung (II) von der Gleichung (I), also (I) – (II), liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= 0{,}1x - 1{,}5 && \big| +1{,}5 \\ 0{,}1x &= 1{,}5 && \big| \cdot 10 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

  - Einsetzen in (II) liefert:

$$\begin{aligned} y &= 0{,}05 \cdot 15 + 2{,}5 \\ &= 0{,}75 + 2{,}5 \\ &= 3{,}25 \end{aligned}$$

  - Die Lösung ist das geordnete Paar $(15|3{,}25)$

Günstigster Handy-Tarif

(I) $y = 0{,}15x + 1$

(II) $y = 0{,}05x + 2{,}5$

Einsetzungsverfahren

- Auflösen der Gleichung (II) nach x liefert:

$$y = 0{,}05x + 2{,}5 \quad \big| -2{,}5$$
$$y - 2{,}5 = 0{,}05x \quad \big| : 0{,}05$$
$$\frac{1}{0{,}05} \cdot (y - 2{,}5) = x$$

- Einsetzen in (I) liefert:

$$y = \frac{0{,}15}{0{,}05} \cdot (y - 2{,}5) + 1$$
$$y = 3y - 7{,}5 + 1$$
$$y = 3y - 6{,}5 \quad \big| -y + 6{,}5$$
$$6{,}5 = 2y \quad \big| : 2$$
$$3{,}25 = y$$

- Einsetzen in (II) liefert:

$$3{,}25 = 0{,}05x + 2{,}5 \quad \big| -2{,}5$$
$$0{,}75 = 0{,}05x \quad \big| : 0{,}05$$
$$15 = x$$

- Die Lösung ist das geordnete Paar $(15|3{,}25)$

Präsenzübung

Textaufgabe:

- Eine sehr alte Textaufgabe aus Mesopotamien (ca. 2000 v. Chr.) lautet:

  „Ein Viertel der Breite zur Länge addiert ergibt 7 Handbreiten, Länge und Breite addiert macht 10 Handbreiten."

  Bestimmen Sie die Länge und Breite (des Tisches) in Handbreiten.

- Man wird dazu zunächst zwei Gleichungen aufstellen:
  - Ein Viertel der Breite zur Länge addiert ergibt 7 Handbreiten: (I) $x+\frac{1}{4}y=7$
  - Länge und Breite addiert macht 10 Handbreiten: (II) $x+y=10$

- Lösen Sie dieses Gleichungssystem mit einem der drei aus der Schule bekannten Verfahren.

Lösungen linearer Gleichungssysteme

- **Satz:**
  - Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem:

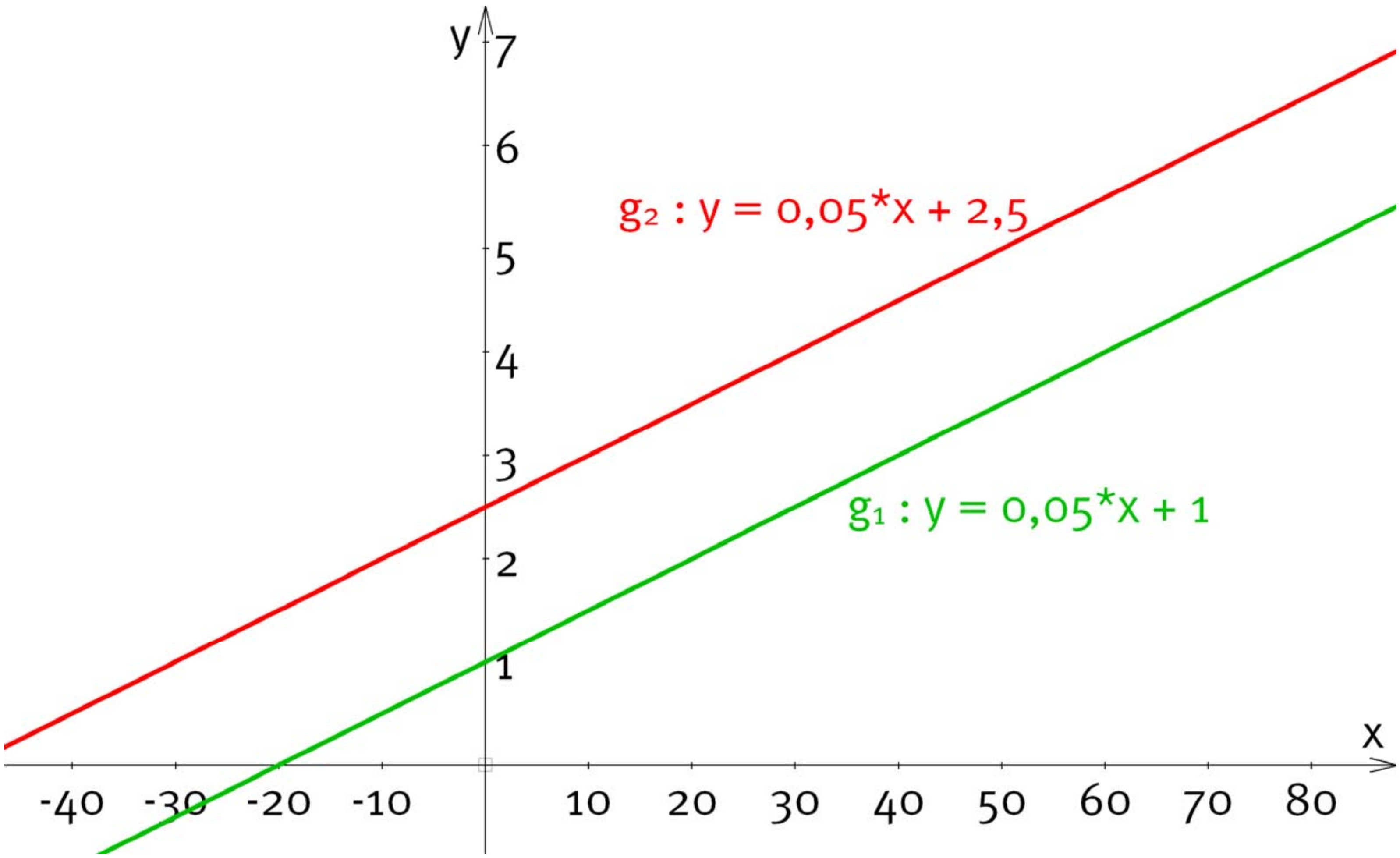
$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

    Seine Lösungsmenge ist entweder
    - leer,
    - ein geordnetes Zahlenpaar (x|y) oder
    - eine unendliche Menge von Zahlenpaaren.

- **Bemerkung:**
  - Graphisch interpretiert entsprechen diese drei Fälle genau den möglichen Lagebeziehungen der beiden durch $a_1x + b_1y = c_1$ und $a_2x + b_2y = c_2$ gegebenen Geraden.

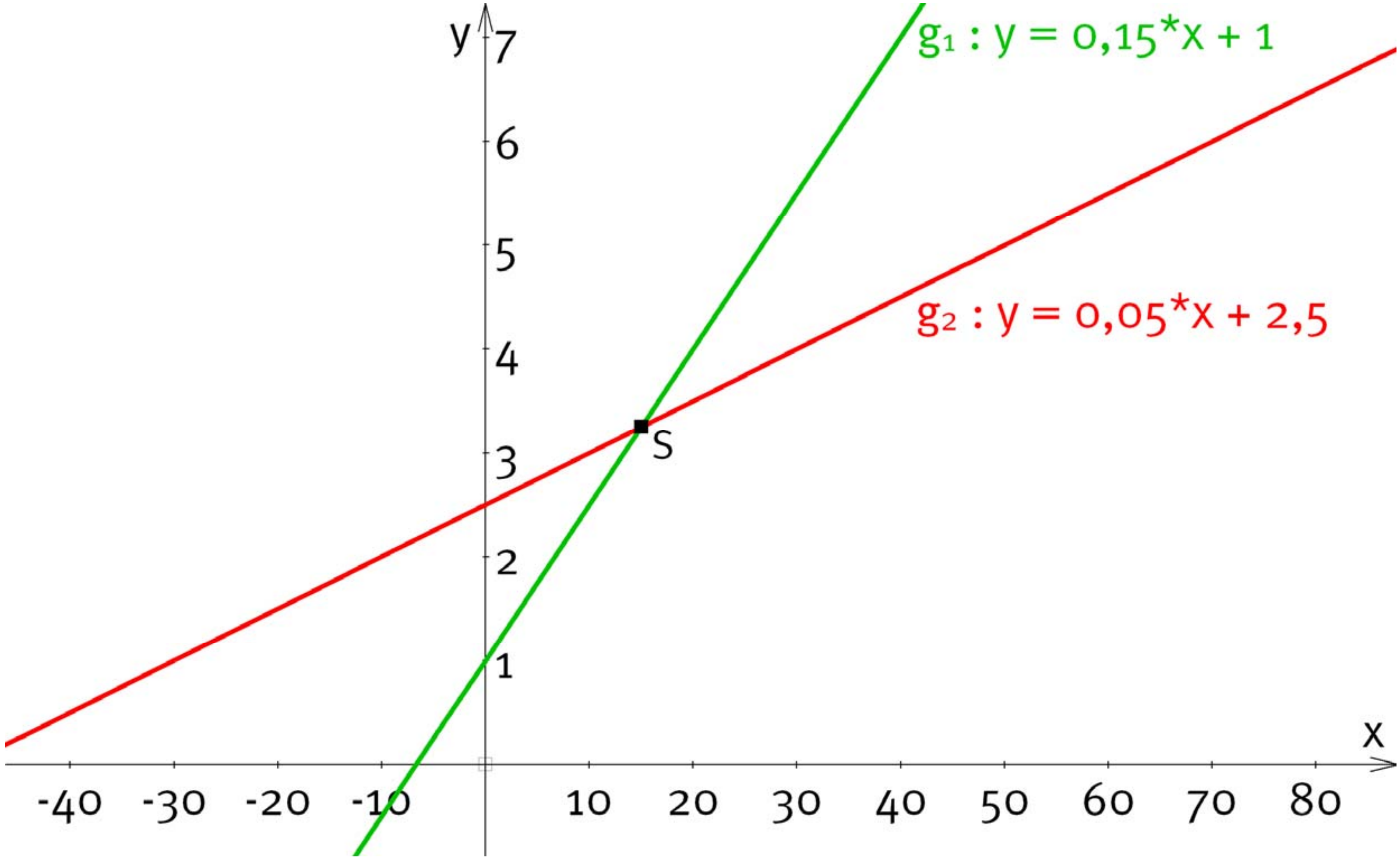
Lösungen linearer Gleichungssysteme

- Die Lösungsmenge ist leer, wenn die Geraden parallel sind.



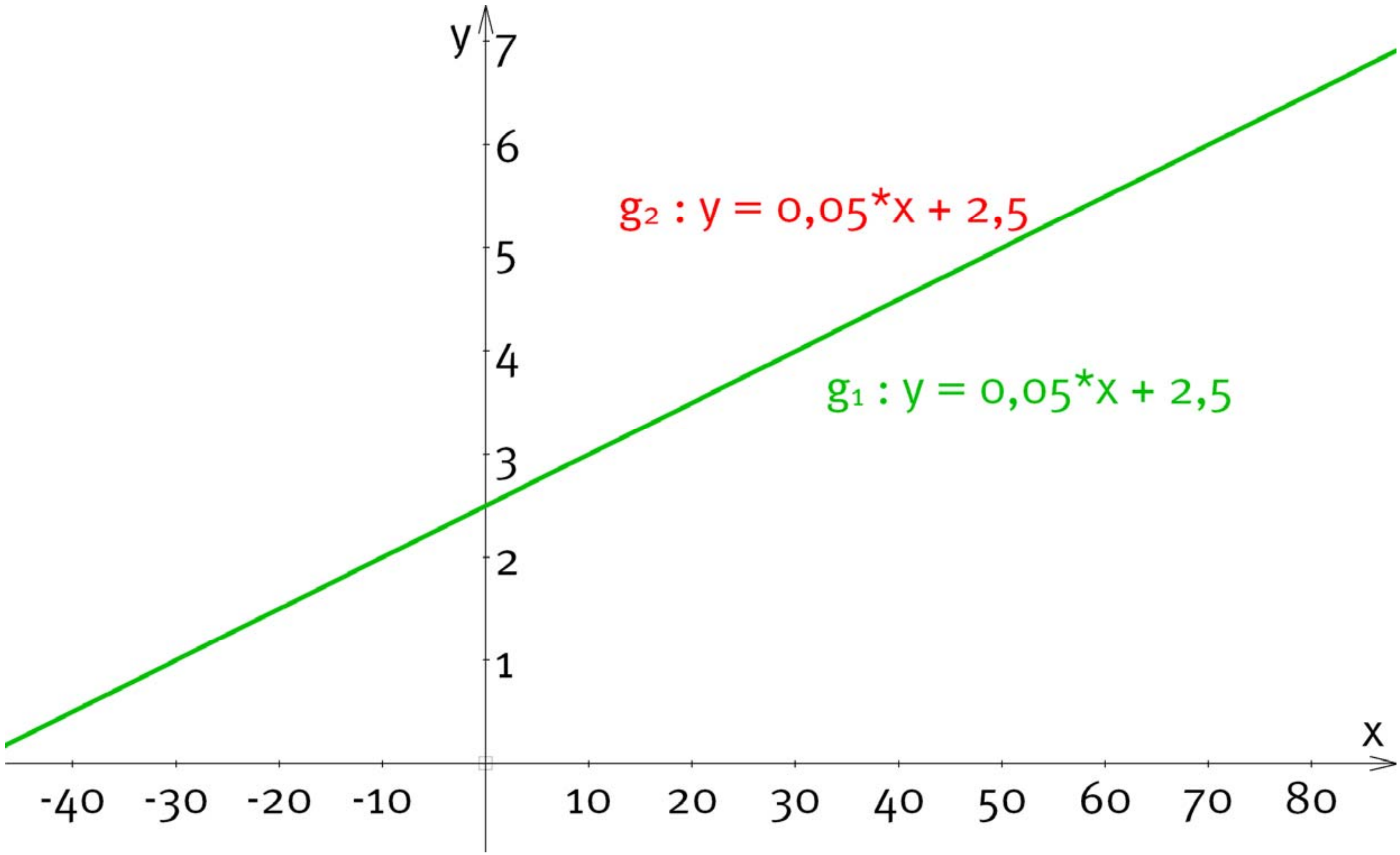
Lösungen linearer Gleichungssysteme

- Die Lösungsmenge ist ein geordnetes Paar (ein Punkt), wenn die Geraden sich schneiden.



Lösungen linearer Gleichungssysteme

- Die Lösungsmenge ist unendliche Menge von geordneten Zahlenpaaren (alle Punkte der Geraden), wenn die Geraden identisch sind.

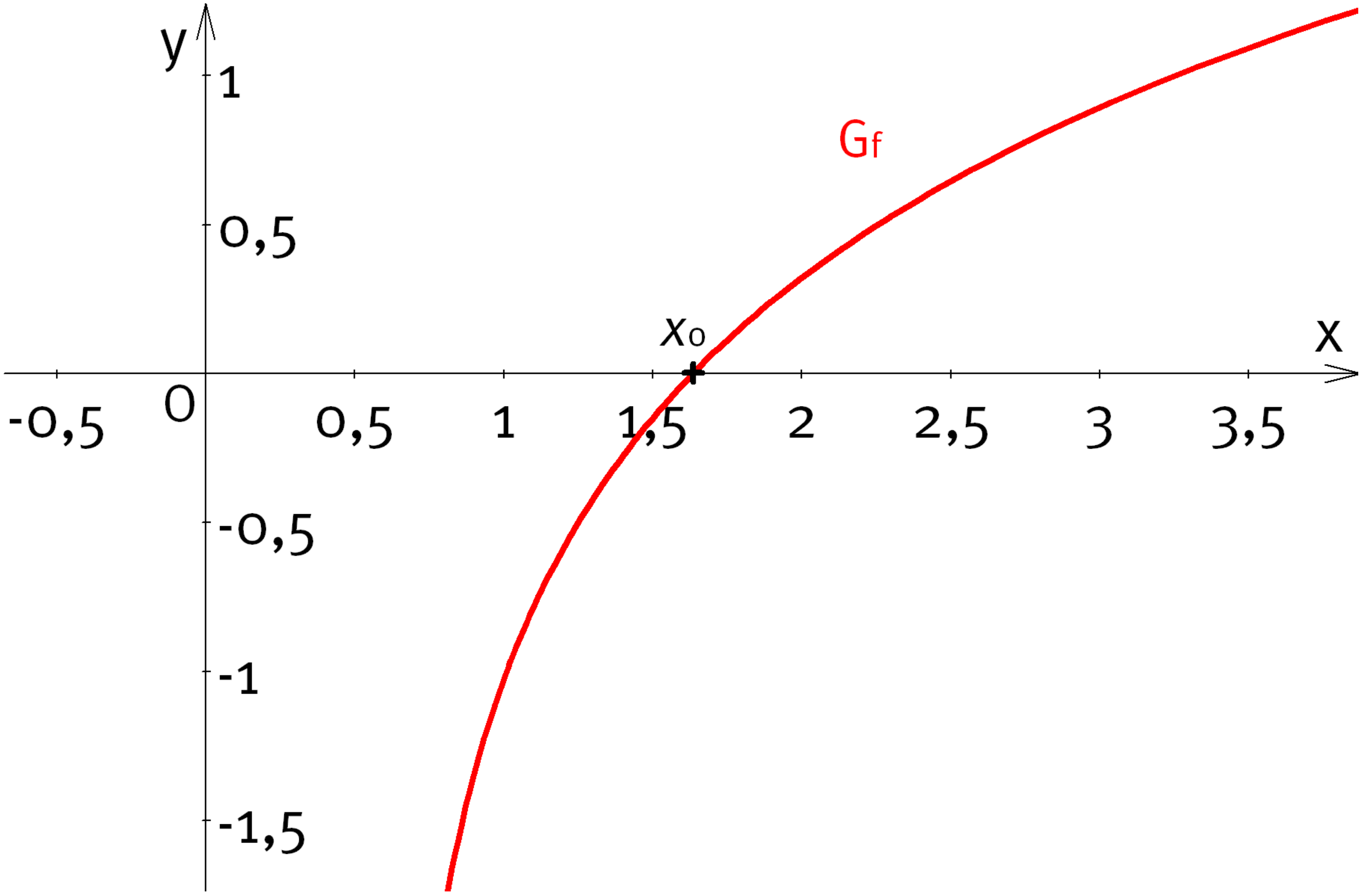


- **Lösbarkeit und ggf. Lösung von linearen Gleichungssystemen mit mehr als zwei Unbekannten**
  - In der Vorlesung zur linearen Algebra, lernt man mit Hilfe des Matrizen-Kalküls Verfahren kennen, die es erlauben die Frage der Lösbarkeit von Gleichungssystemen in mehreren Unbekannten zu klären und ggf. deren Lösungen zu bestimmen.

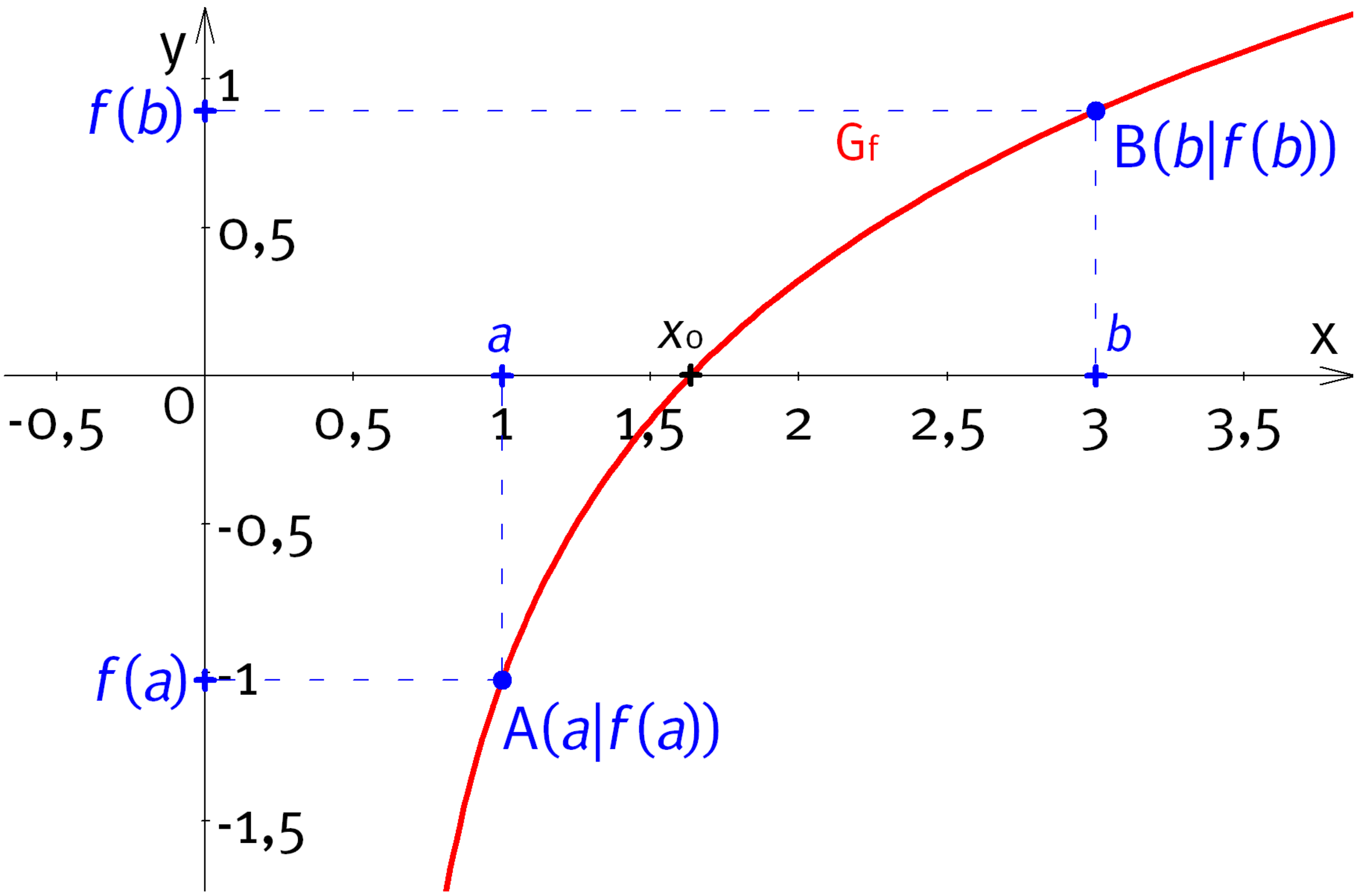
Anwendung: Regula falsi

- **Nullstelle(n) einer Funktion f bestimmen**
  - Gleichung $f(x) = 0$ lösen.
  - Für viele Gleichungen nicht durch algebraische Umformungen möglich.
  - Gangbarer Weg: **Näherungsverfahren**, z. B. „regula falsi“
- **Idee der „regula falsi“:**
  - Ungefähre Lage der Nullstelle x_0 bestimmen (z. B. über den Funktionsgraph)
  - Gerade durch zwei Punkte A($a\,|\,f(a)$) und B($b\,|\,f(b)$) des Funktionsgraphen zeichnen, die links und rechts von der gesuchten Nullstelle liegen. ($a < x_0 < b$)
  - Die x-Koordinate x_S des Schnittpunkts S dieser Geraden mit der x-Achse ist ein Näherungswert für die Nullstelle x_0.

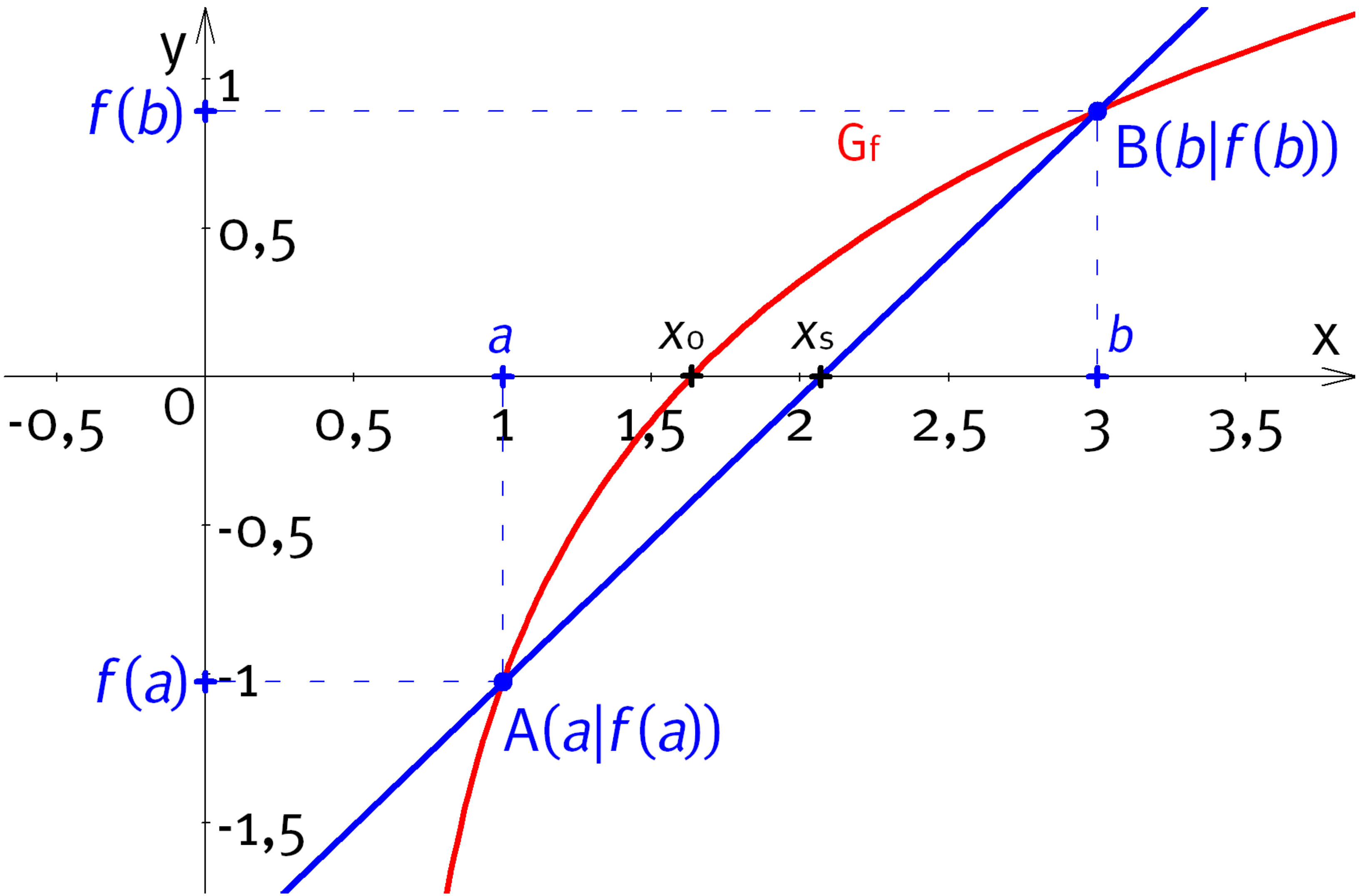
Regula falsi



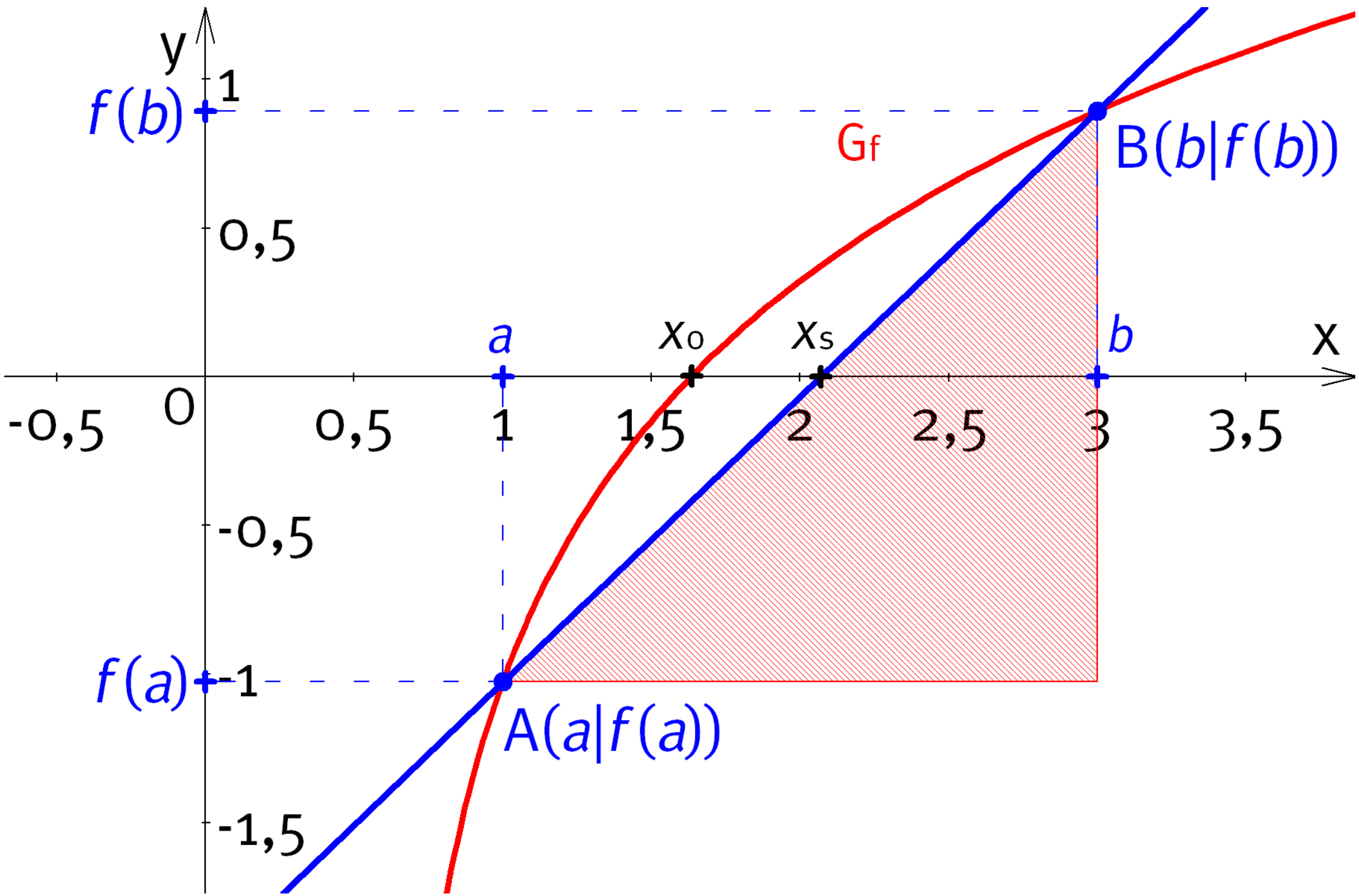
Regula falsi



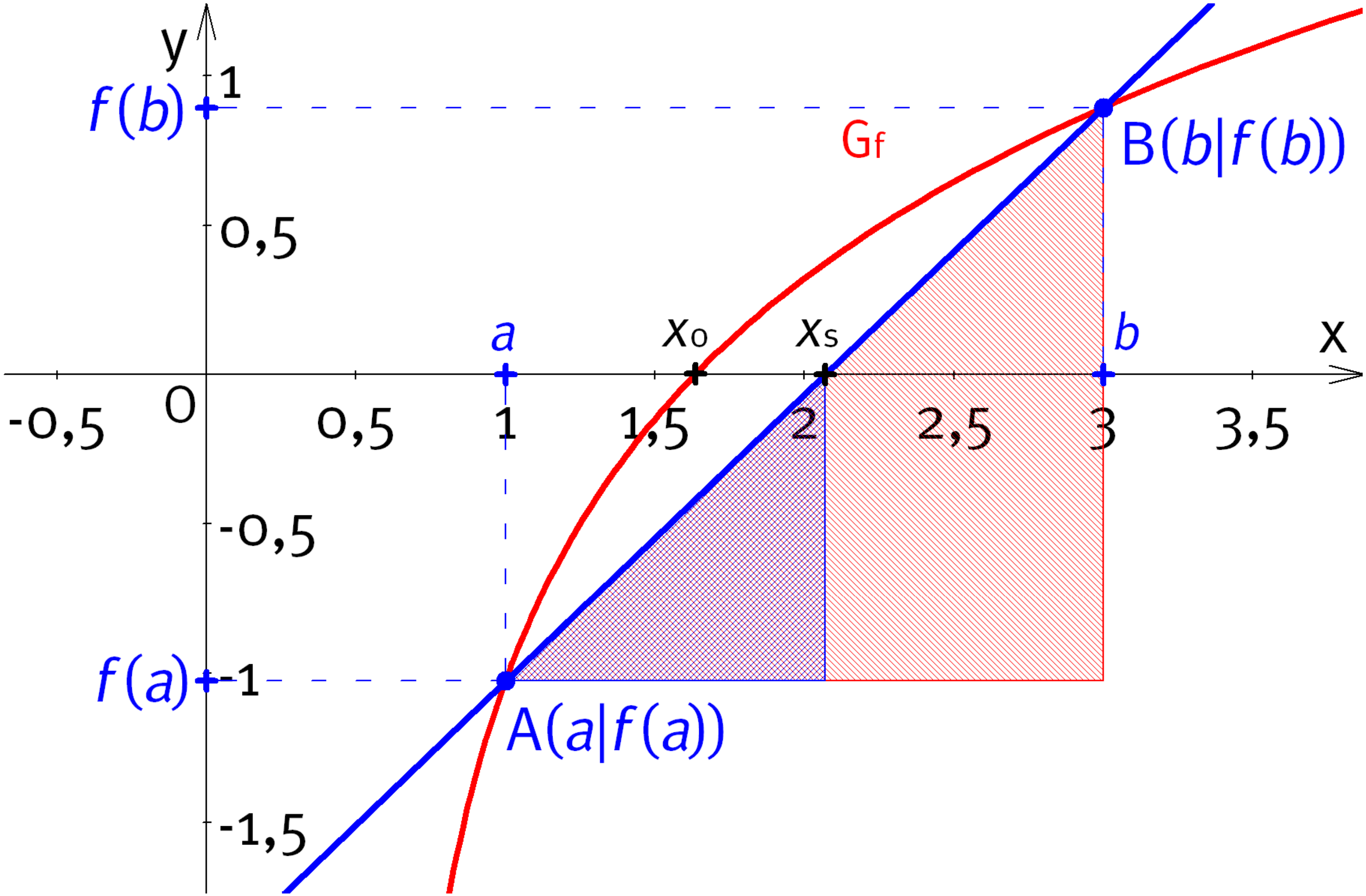
Regula falsi



Regula falsi



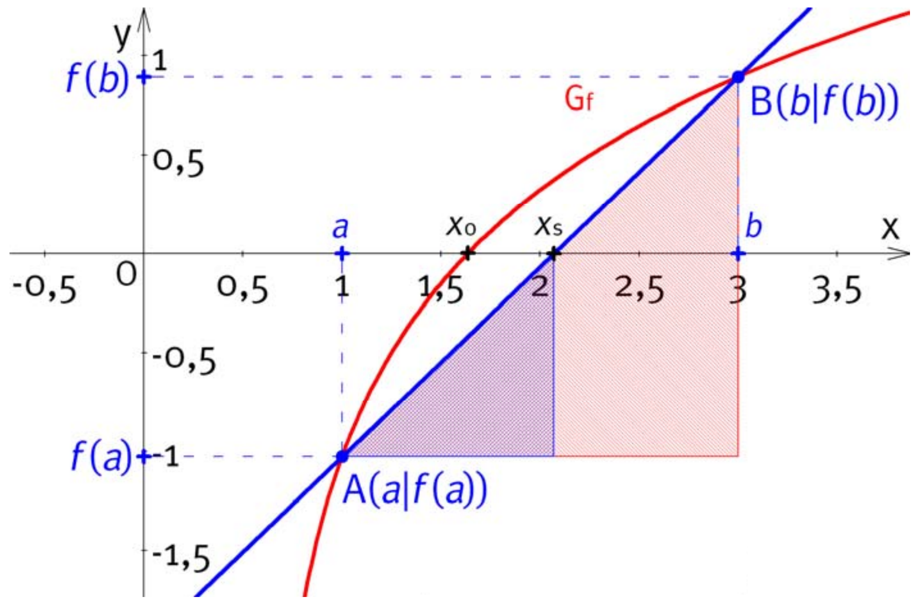
Regula falsi



Regula falsi

- **Bestimmung von x_s:**
  - Anhand der Steigungsdreiecke ergibt sich:

$$\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{rotes Steigungsdreieck}} = \underbrace{\frac{0-f(a)}{x_s-a}}_{\text{blaues Steigungsdreieck}}$$



  - Auflösen nach x_s ergibt eine erste Näherung für x_0:

$$x_0 \approx x_s = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot f(a)$$

Regula falsi

Voraussetzungen

- f ist eine Funktion die im Intervall $[a, b]$ genau eine Nullstelle x_0 (und keine Sprungstellen) besitzt.
  - Z. B. am Funktionsgraph feststellbar.
- $f(a)$ und $f(b)$ haben verschiedene Vorzeichen.
  - Gilt genau dann wenn $f(a) \cdot f(b) < 0$.

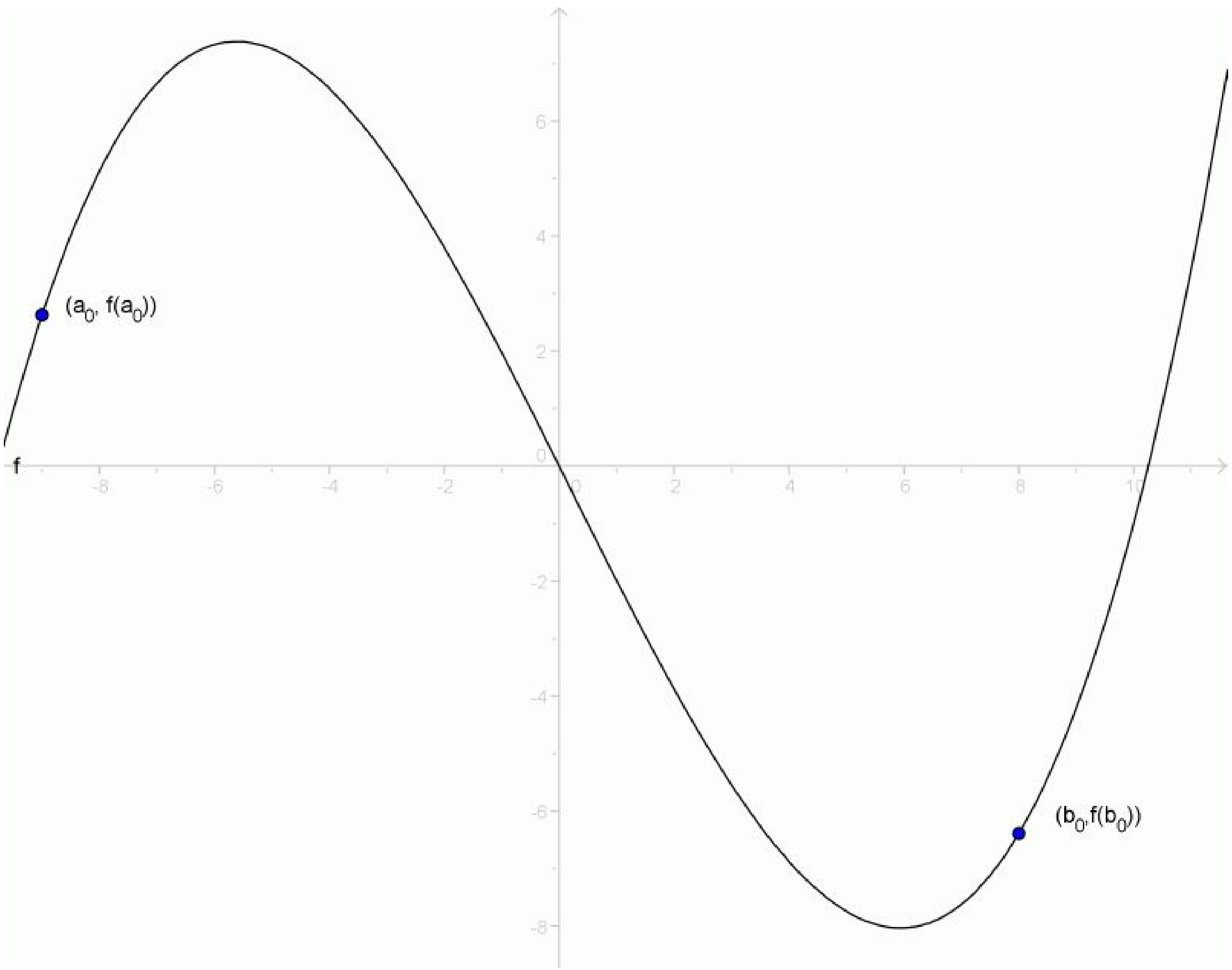
Folgerungen

- Die Gerade durch die Punkte $A(a\,|\,f(a))$ und $B(b\,|\,f(b))$ schneidet die x-Achse im Punkt $S(x_S|0)$.
- x_S ist ein Näherungswert für die Nullstelle x_0.

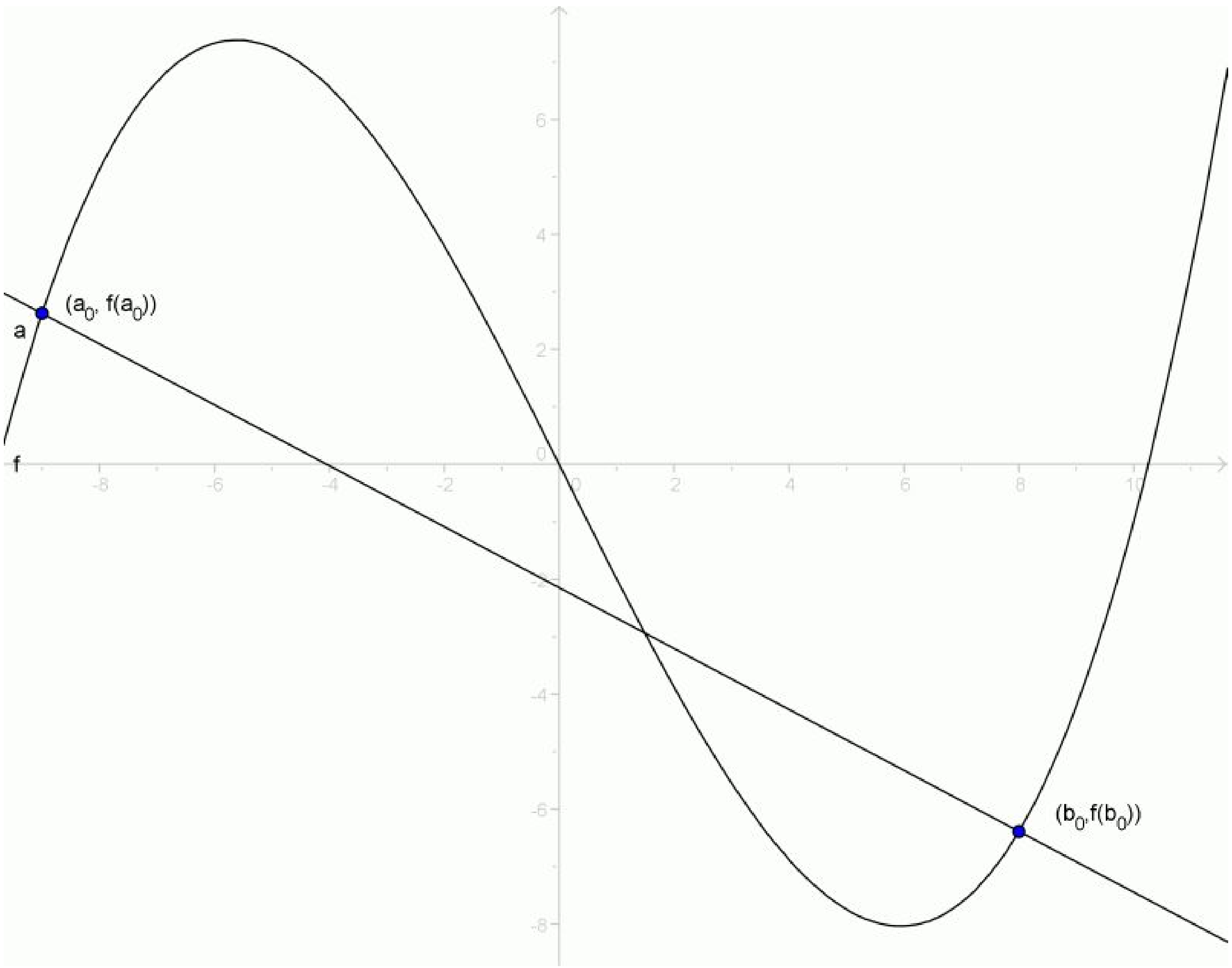
$$x_0 \approx x_s = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot f(a)$$

- Ist die Näherung nicht gut genug, wird das Verfahren für das Intervall unter den Teilintervalle $[a, x_S]$ und $[x_S, b]$ wiederholt, in dem die Nullstelle x_0 liegt.
- Die Nullstelle x_0 liegt in dem Teilintervall, für das die Funktionswerte an den Intervallgrenzen verschiedene Vorzeichen haben.
  - Überprüfen: $f(a) \cdot f(x_S) < 0$ oder $f(x_S) \cdot f(b) < 0$

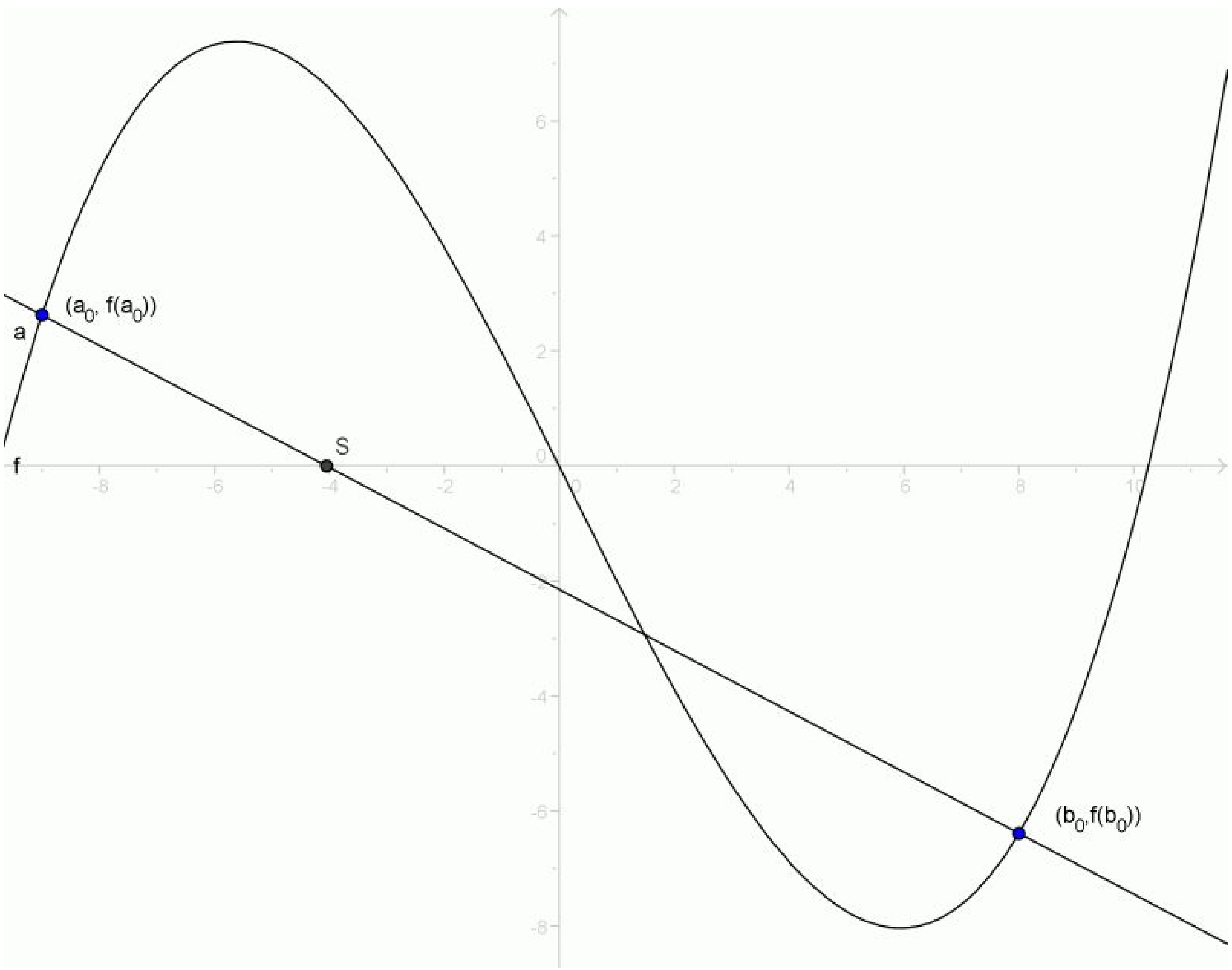
Regula falsi



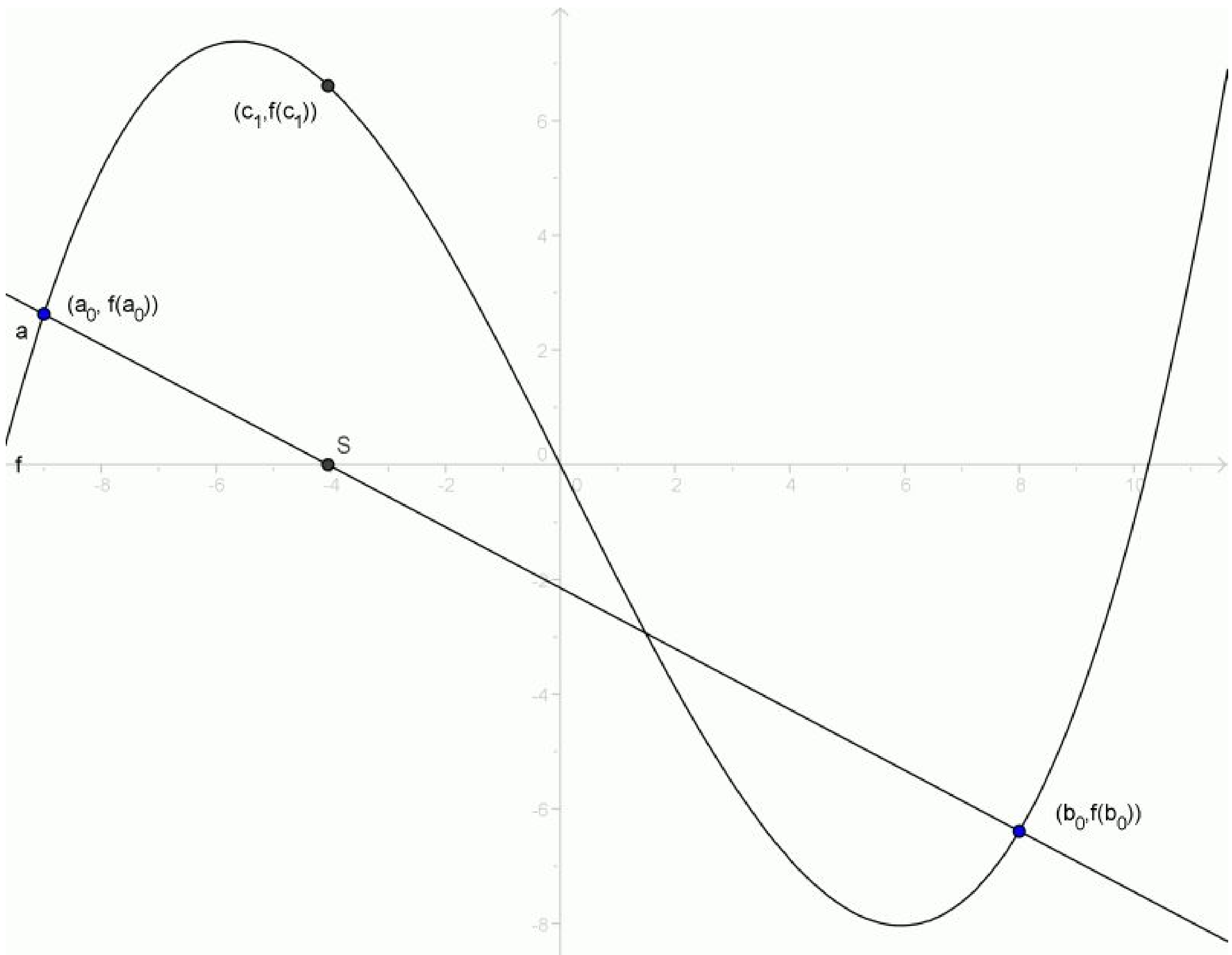
Regula falsi



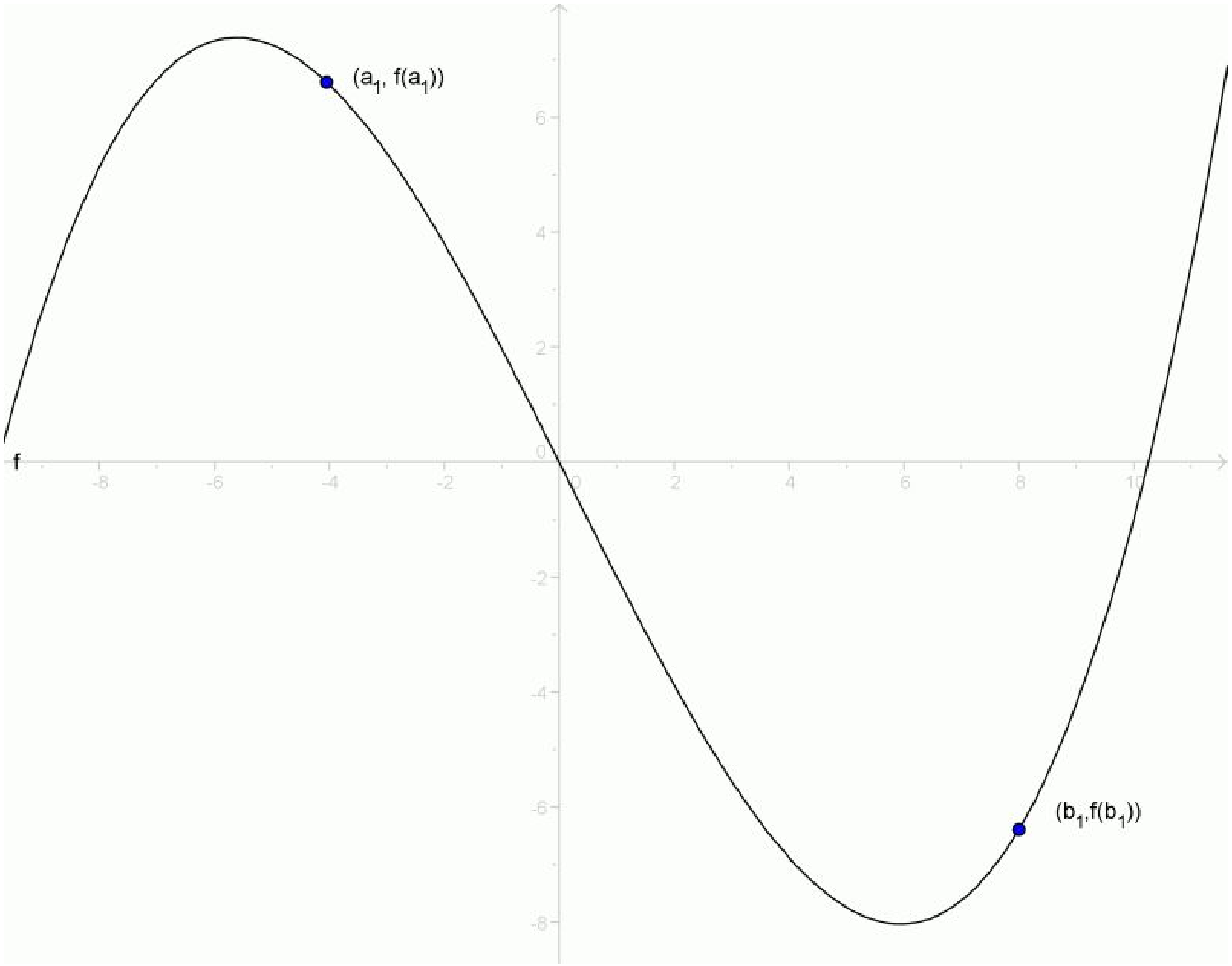
Regula falsi



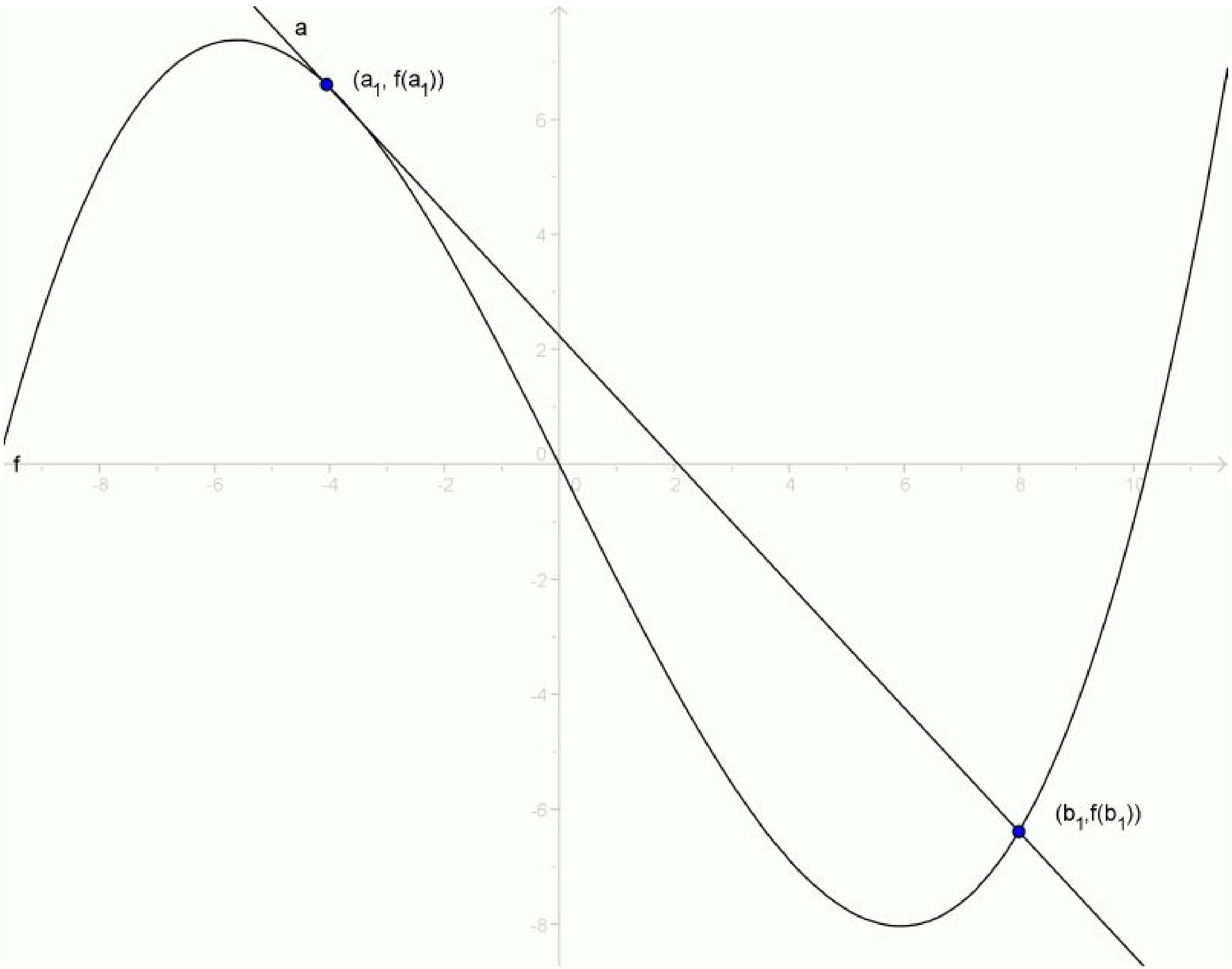
Regula falsi



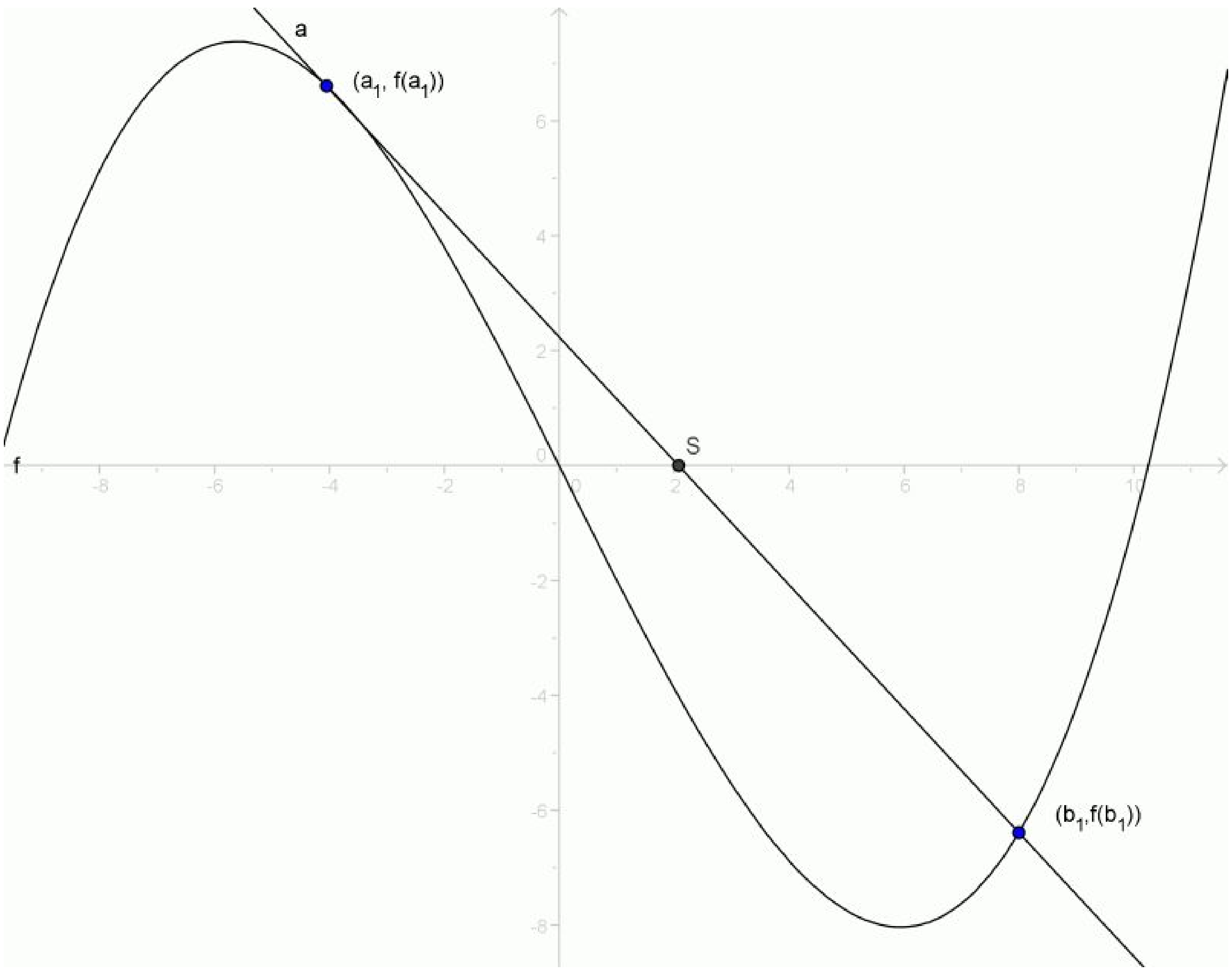
Regula falsi



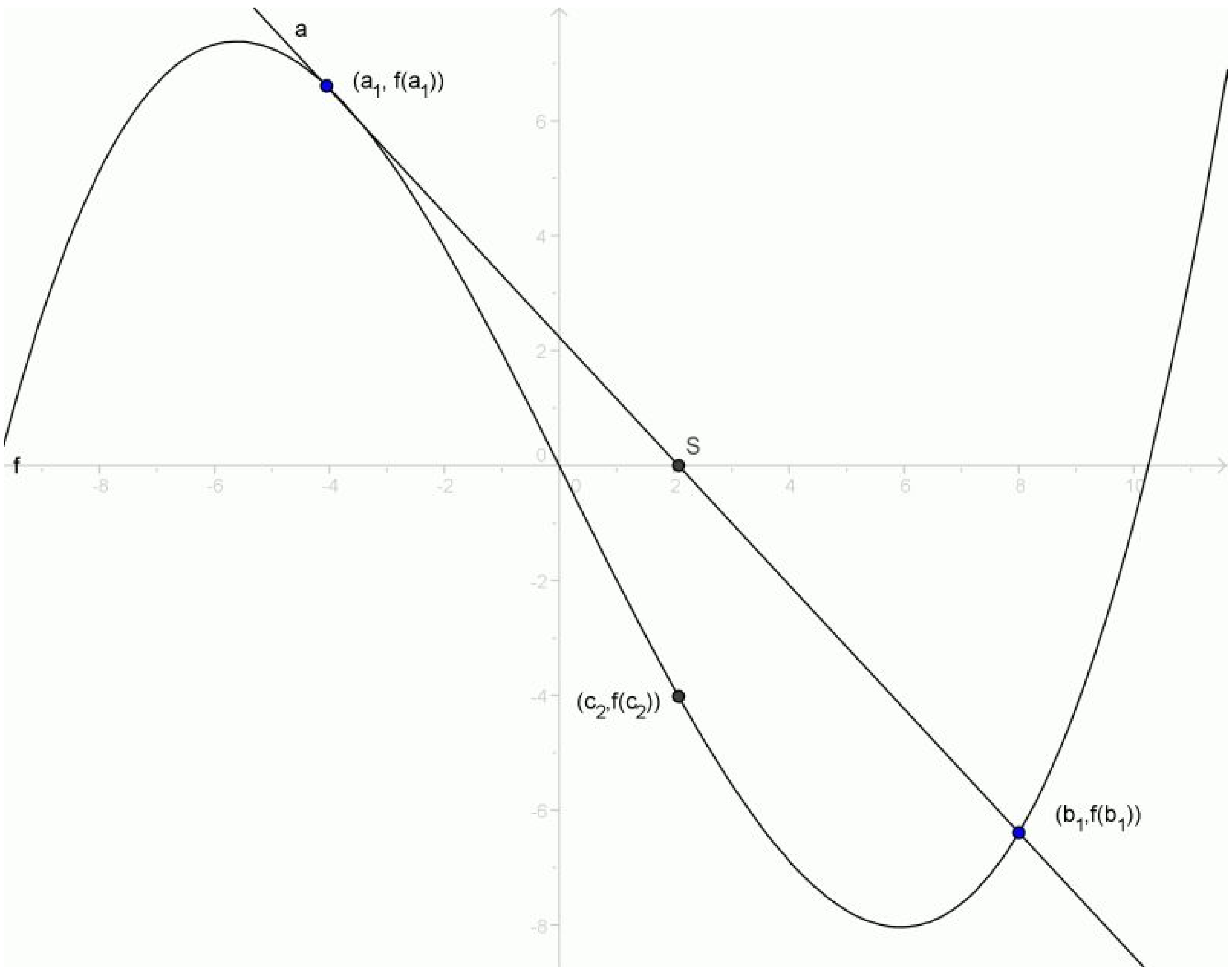
Regula falsi



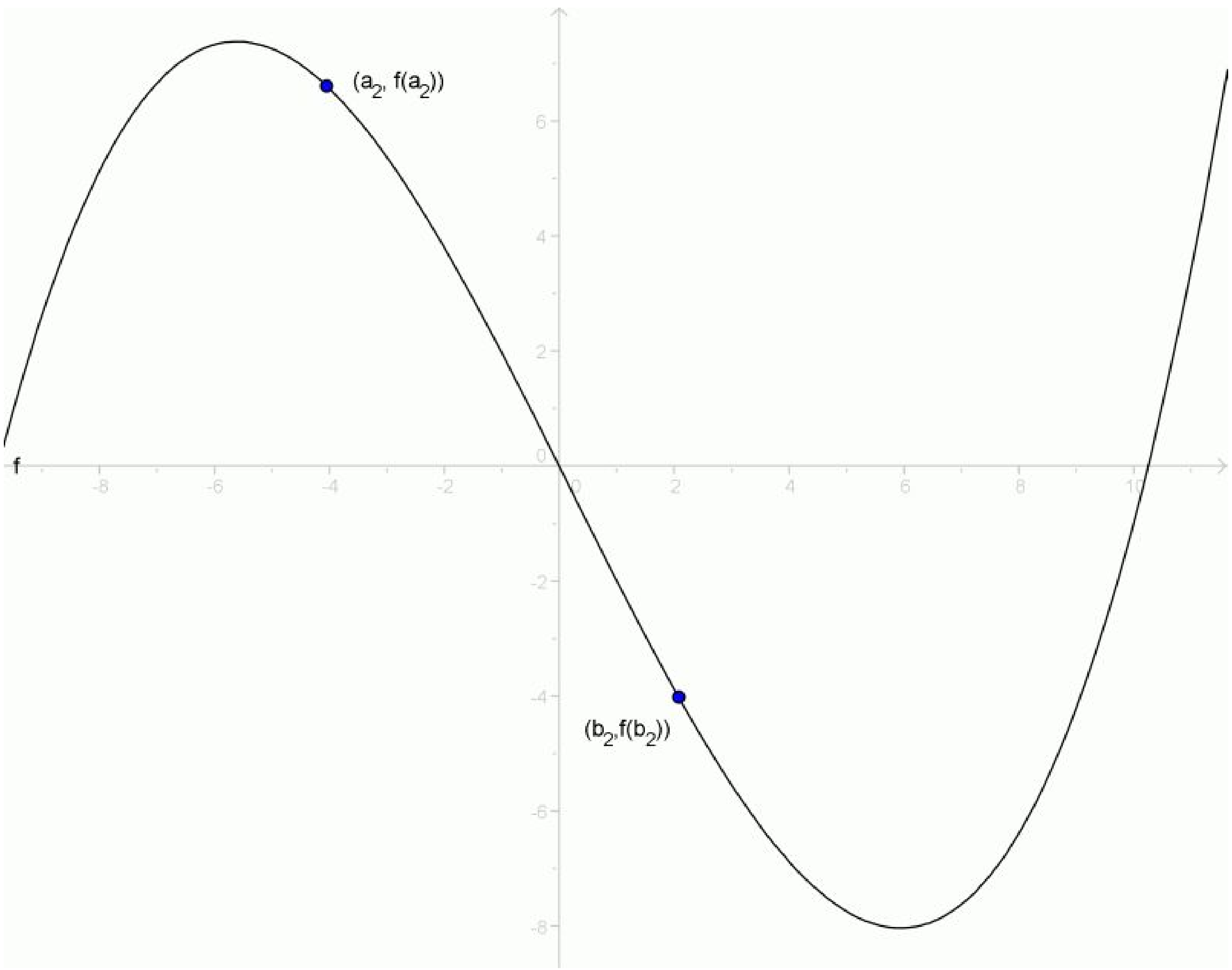
Regula falsi



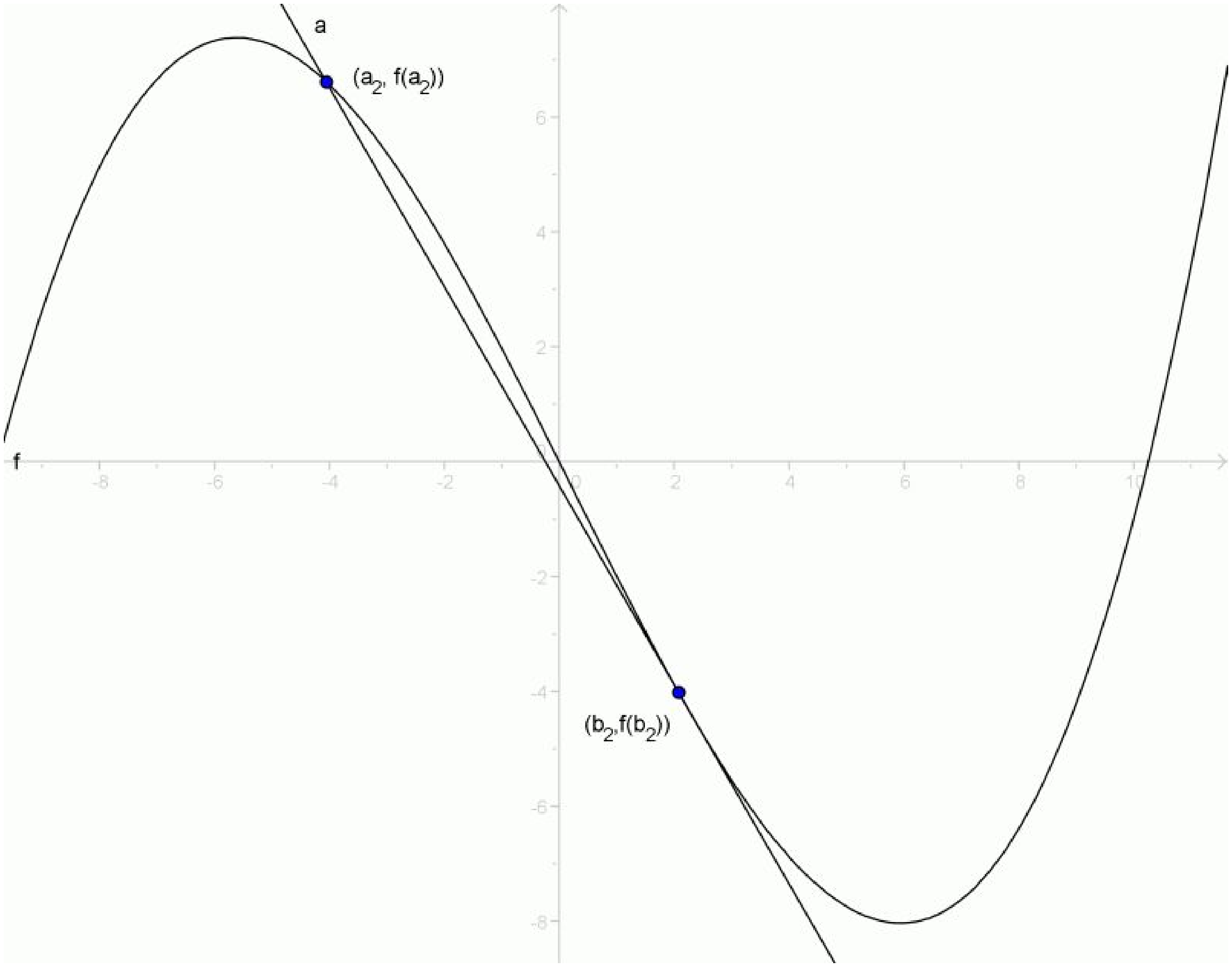
Regula falsi



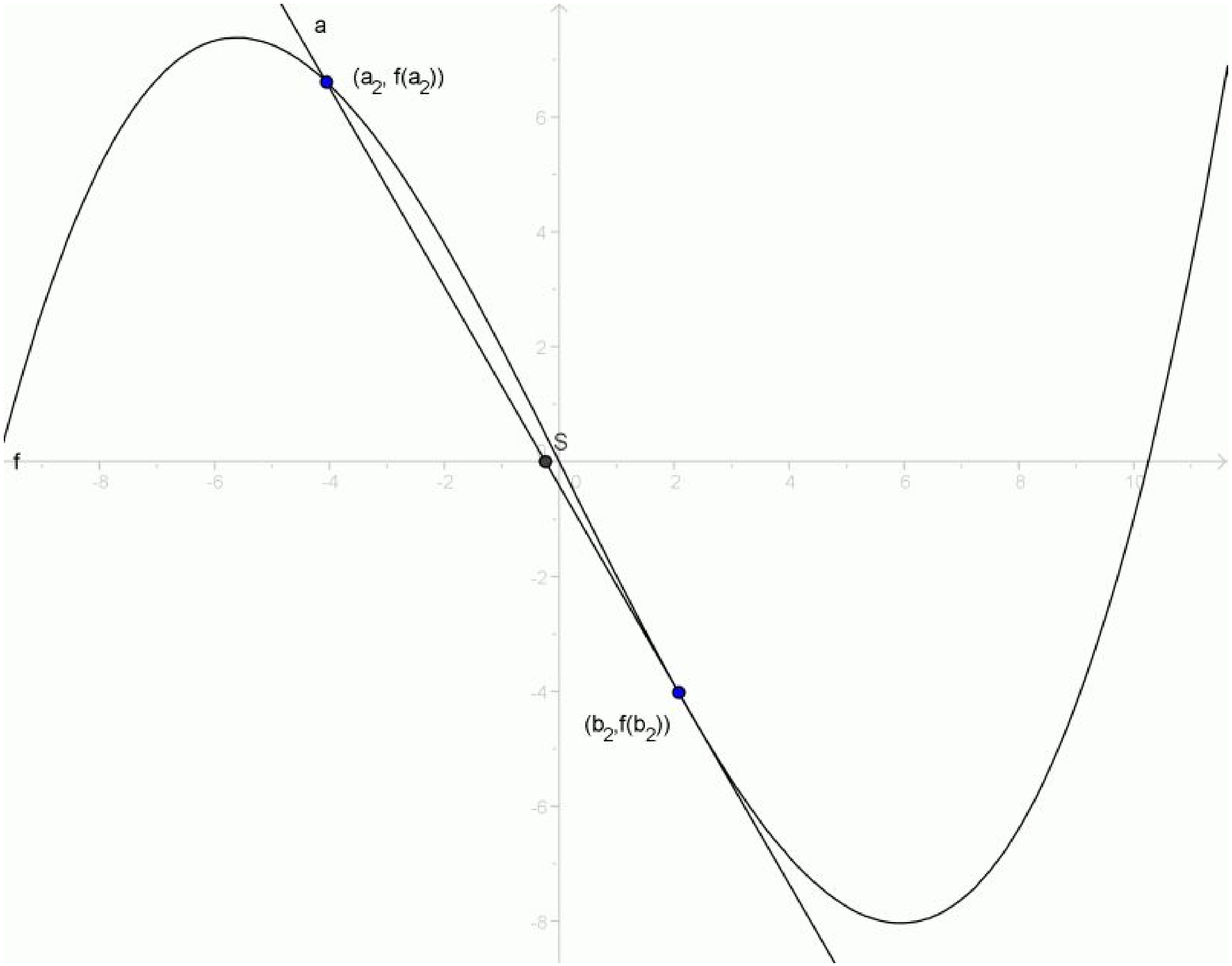
Regula falsi



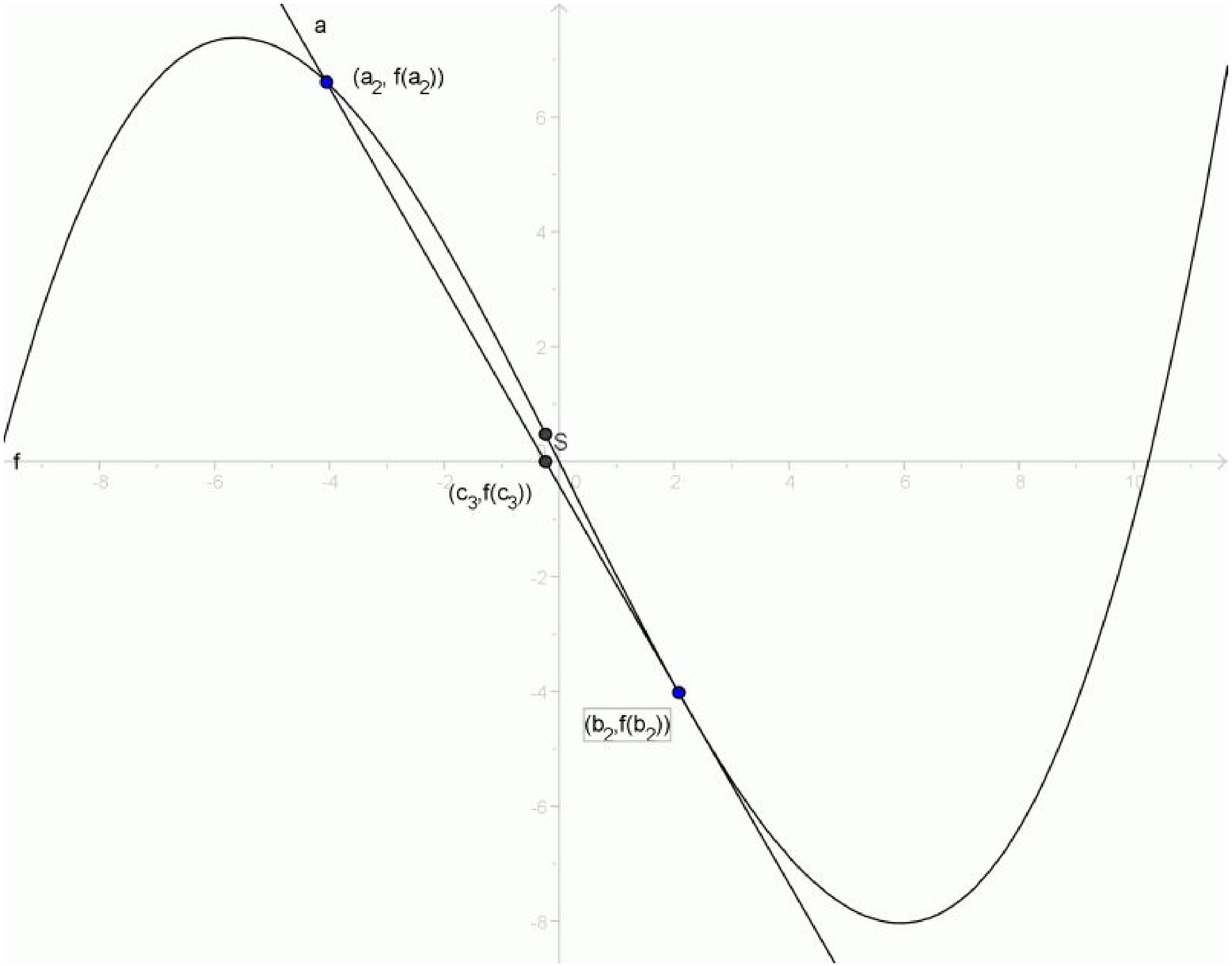
Regula falsi



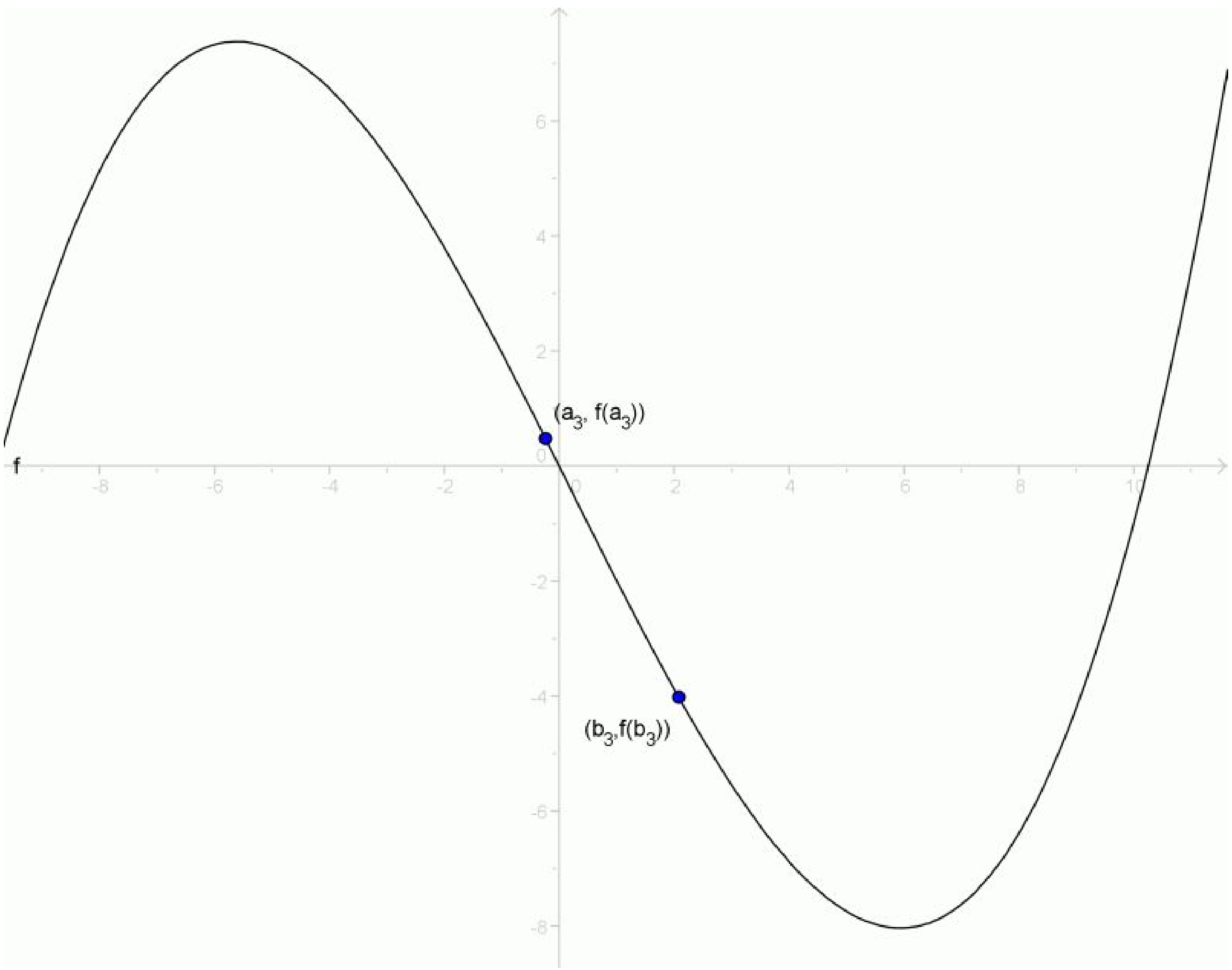
Regula falsi



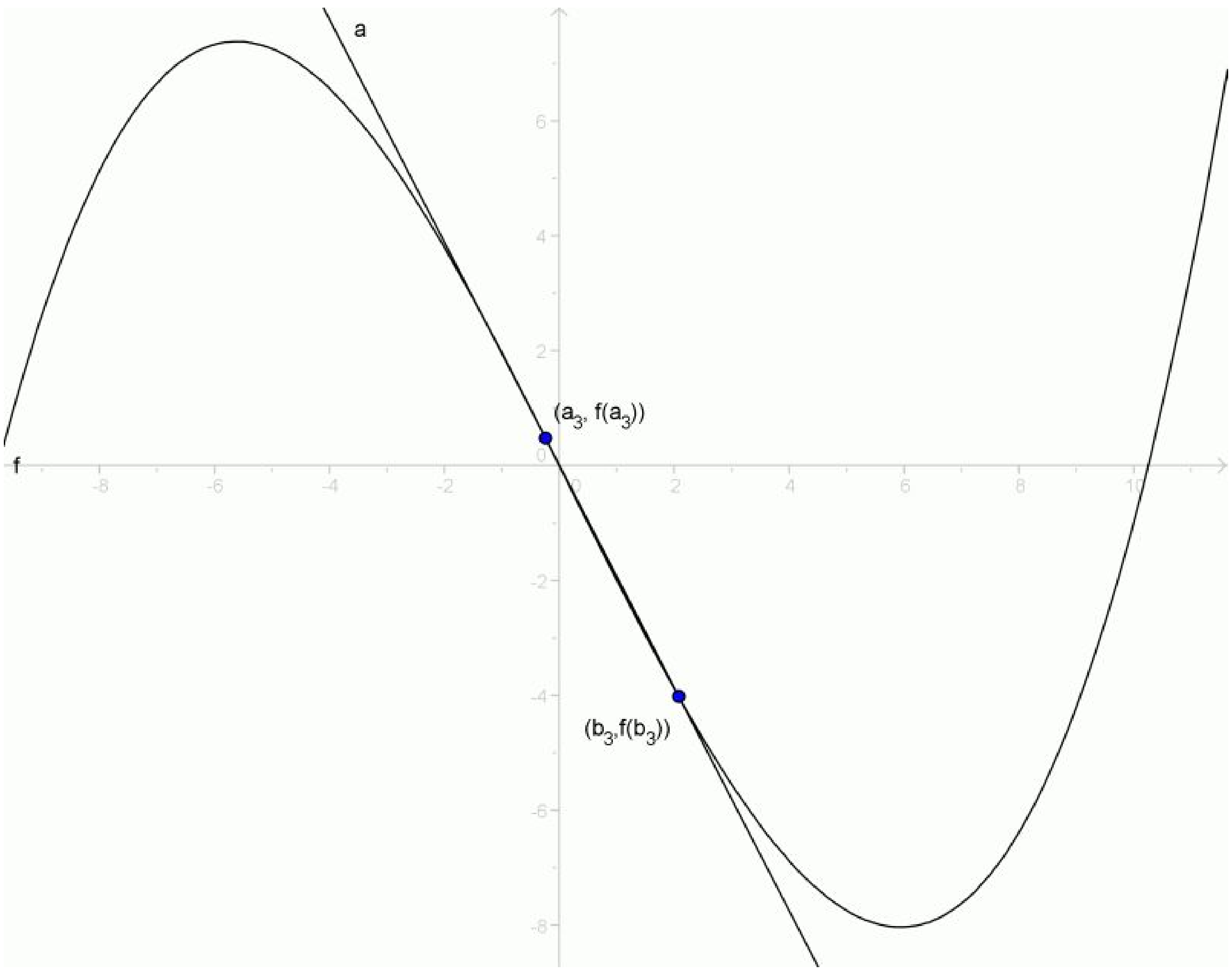
Regula falsi



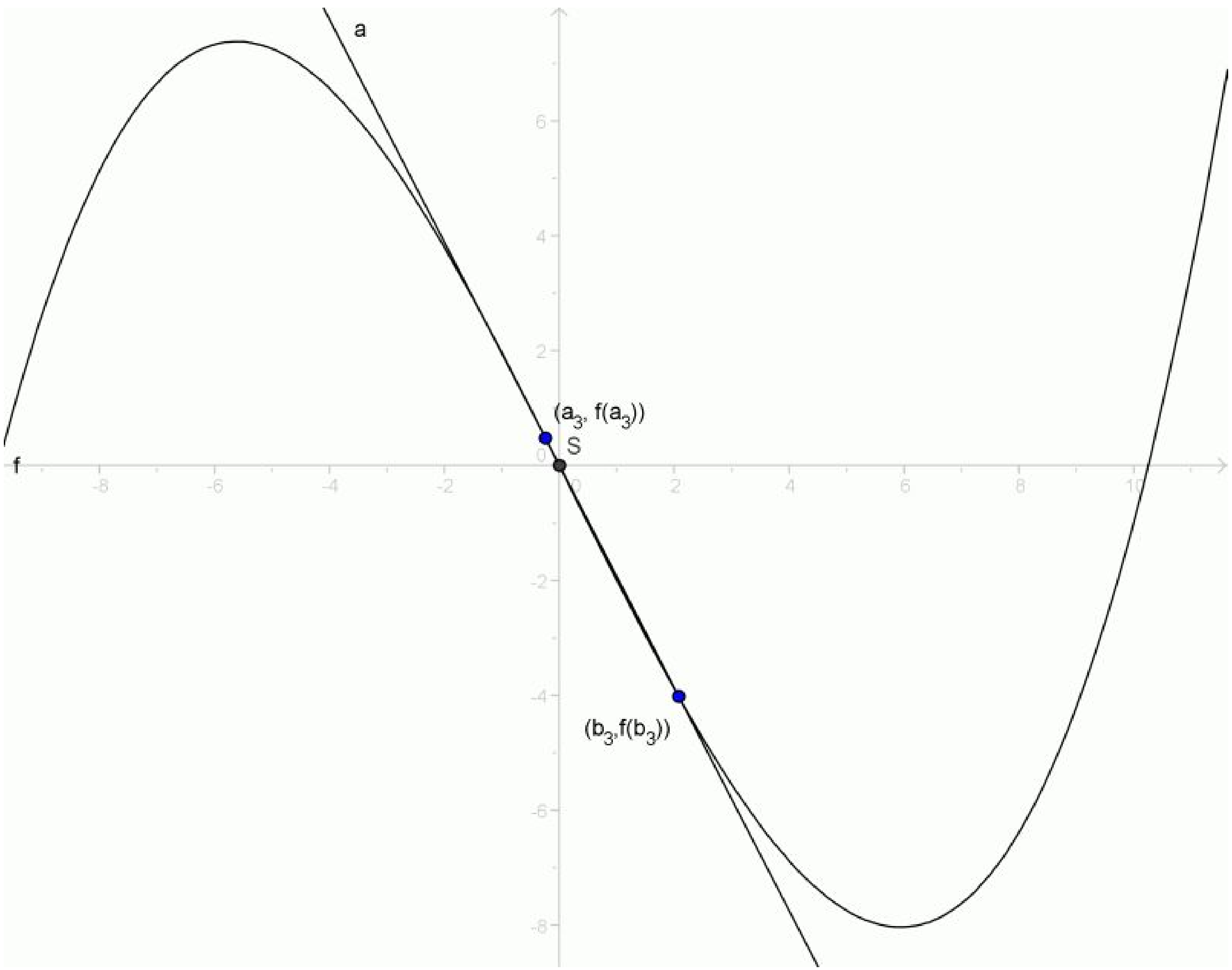
Regula falsi



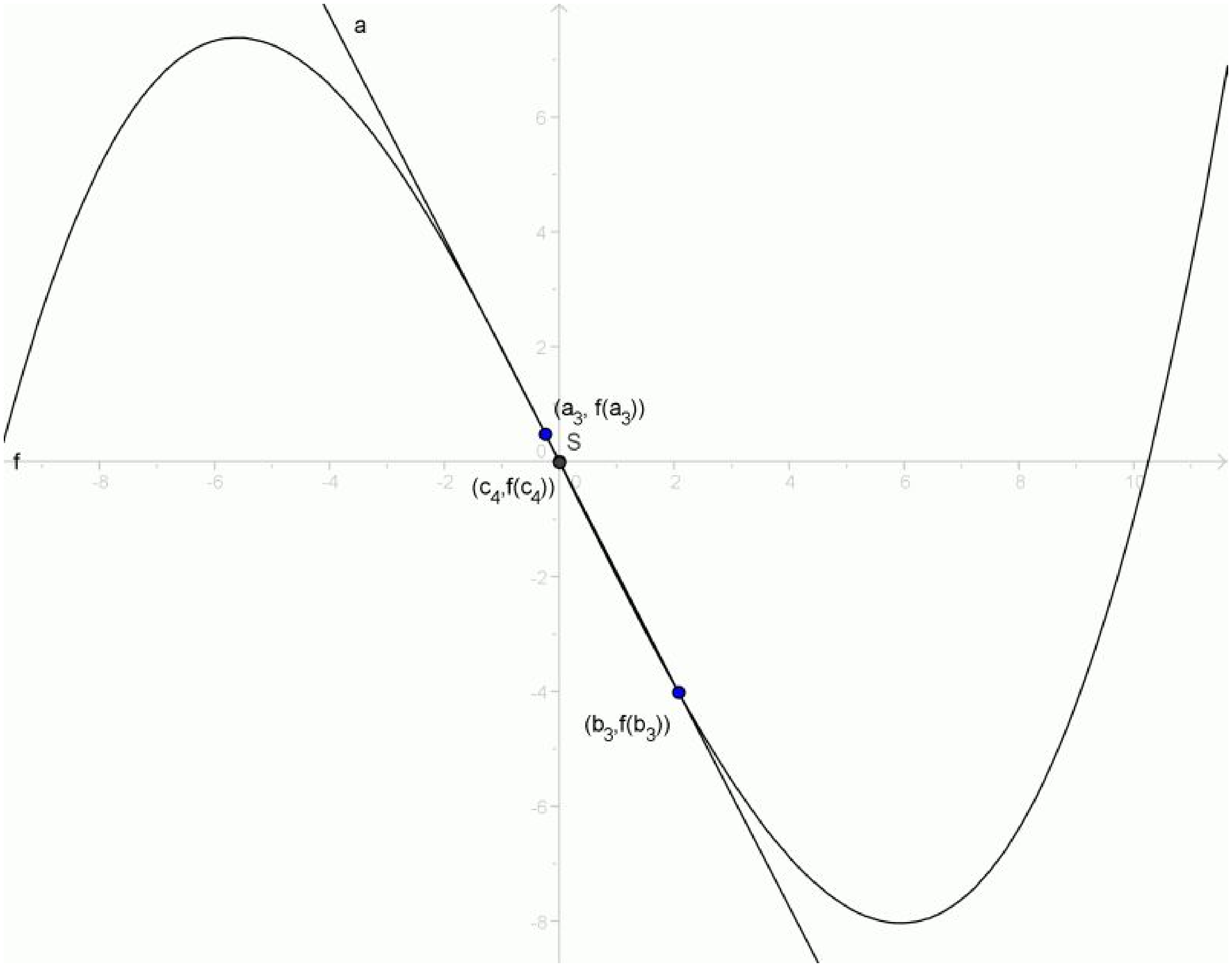
Regula falsi



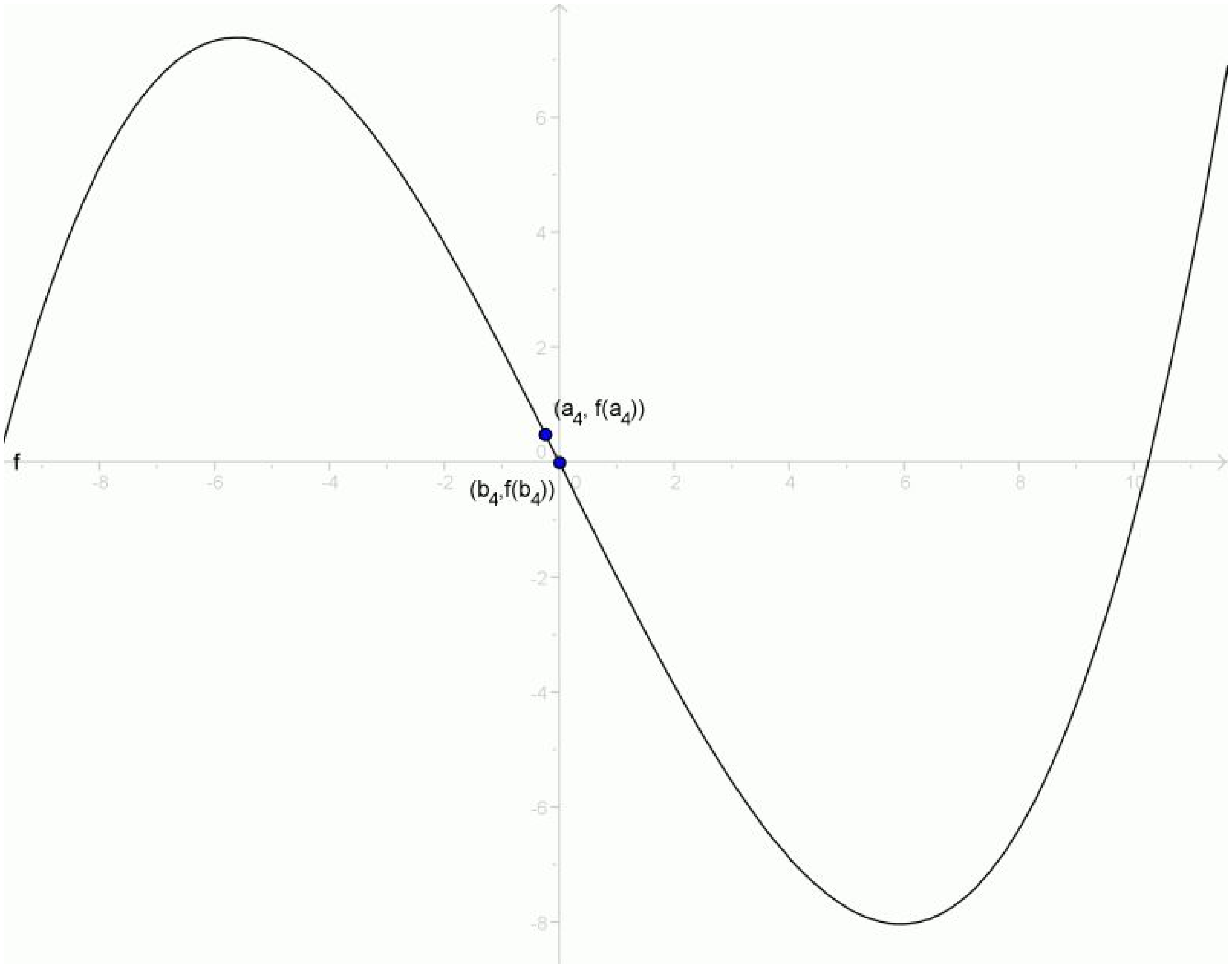
Regula falsi



Regula falsi

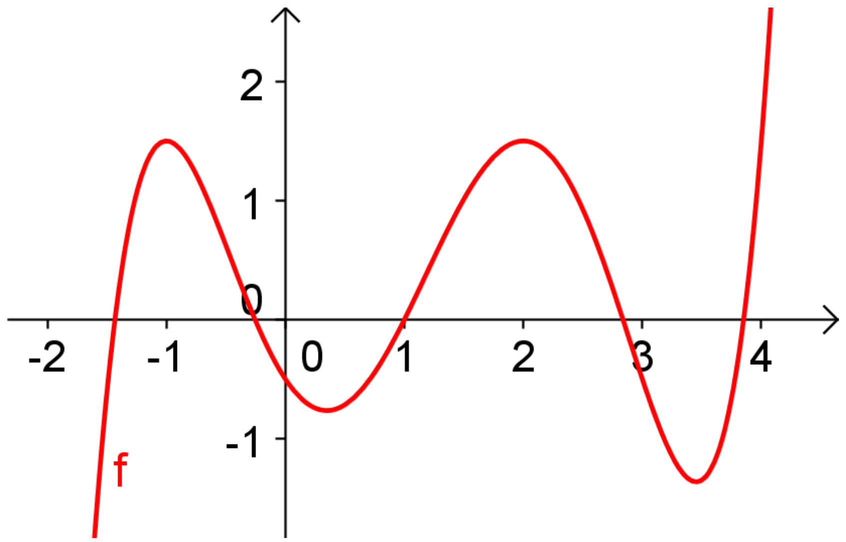


Regula falsi



Regula falsi

- **Beispiel:** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto \frac{1}{8}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{5}{8}x^3+2x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$
  - Eine Nullstelle liegt im Intervall $[2;3]$, weil f dort keine Sprungstellen hat und $f(2)\cdot f(3)<0$ ist.
  - Berechnung von x_s:

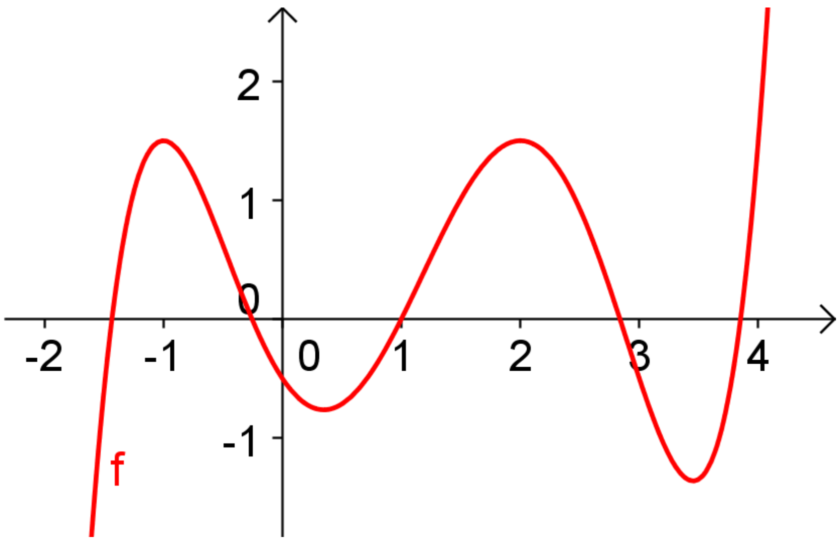


$$x_0\approx x_s$$
$$=a-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f(a)$$
$$=2-\frac{3-2}{f(3)-f(2)}\cdot f(2)=2-\frac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}\cdot\frac{3}{2}=2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=2\tfrac{3}{4}$$
$$f\left(2\tfrac{3}{4}\right)\approx 0{,}26>0\Rightarrow f\left(2\tfrac{3}{4}\right)\cdot f(3)>0$$

  - Diese Nullstelle liegt also im Intervall $\left[2\tfrac{3}{4};3\right]$.

Regula falsi

- **Beispiel:** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto \frac{1}{8}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{5}{8}x^3+2x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$
  - Eine Nullstelle liegt im Intervall $\left[2\tfrac{3}{4};3\right]$, weil f dort keine Sprungstellen hat und $f\left(2\tfrac{3}{4}\right)\cdot f(3)<0$ ist.
  - Berechnung von x_S:



$$x_0\approx x_s$$
$$=a-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f(a)$$
$$=2\tfrac{3}{4}-\frac{3-2\frac{3}{4}}{f(3)-f\left(2\frac{3}{4}\right)}\cdot f\left(2\tfrac{3}{4}\right)\approx 2{,}83$$
$$f(2{,}83)\approx 0{,}0024$$

  - Diese Nullstelle liegt im Intervall [2,83; 3]. Für ein genaueres Ergebnis wird das Verfahren für dieses Intervall wiederholt...