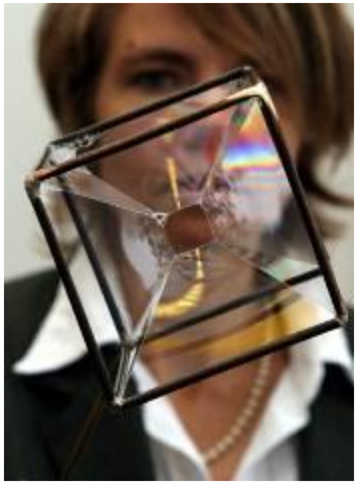
Differentialgeometrie

http://www.juergen-roth.de ► Lehre ► Differentialgeometrie

Differentialgeometrie?!



- **Elementare Differentialgeometrie**
  - Untersuchung lokaler Eigenschaften von Kurven und zweidimensional gekrümmten Flächen im dreidimensionalen reellen Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$
- **Ziel:**
  - Quantitatives Erfassen der Krümmung von zweidimensional gekrümmten Flächen (z. B. Oberfläche einer Kugel)
- **Beispiel**
  - Seifenhäute lassen sich als Minimalflächen beschreiben. Ihre geometrischen Eigenschaften (Krümmung, Abstände zwischen Punkten auf der Minimalfläche, …) können mit Methoden der Differentialgeometrie berechnet werden.

Differentialgeometrie?!

- **Moderne Differentialgeometrie**
  - Ziel: Intrinsische Beschreibung geometrischer Objekte, d.h. Beschreibung ohne Rückgriff auf den umgebenden Raum
  - Zentraler Begriff: Mannigfaltigkeiten
- **Anwendungen**
  - Kartografie
  - Navigation (Satellitennavigation)
  - Geodäsie
    - Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche
  - Allgemeine Relativitätstheorie
  - …

Inhaltsverzeichnis

Differentialgeometrie

Differentialgeometrie

Kapitel 1:
Euklidische Geometrie

Kapitel 1:

Euklidische Geometrie

Kapitel 1: Euklidische Geometrie

1.1 Geometrie?!

Geometrie?!

- **Geometrie ist die Wissenschaft vom uns umgebenden Raum.**
- **Geometrie ist das älteste mathematische Teilgebiet.**
  - Über viele Jahrhunderte hinweg bestand die Mathematik im wesentlichen aus Geometrie.
- **Ägypter & Babylonier (ab 3000 v. Chr.):**
  - Geometrie ist eine Naturwissenschaft.
  - Man fragte nicht nach logischer Ableitbarkeit, sondern nach Übereinstimmung mit der Realität.
  - Man „wusste“ zum Beispiel, wie man rechte Winkel konstruieren konnte, und das reichte.

Geometrie als erste (deduktive) Wissenschaft

http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/ausstell/hilbert/euklid.html

- **Die alten Griechen entdeckten die Macht des Denkens, die Logik und damit auch die Möglichkeit der Mathematik.**
  - Man kann durch reines Denken Erkenntnisse erzielen!
  - Das Denken folgt gewissen Regeln, den Gesetzen der Logik.
  - Wenn die Voraussetzungen eines logischen Schlusses gegeben sind, dann gilt automatisch auch die Folgerung.
- **Die Elemente des Euklid sind streng deduktiv aufgebaut.**
  - Es wird zwischen Grund-begriffen und definierten Begriffen unterschieden.
  - Ausgehend von wenigen Grundsätzen (Axiomen) werden durch logisches Schließen Folgesätze bewiesen.
- **„more geometrico“**
  - Im Mittelalter in allen universitären Disziplinen Ausdruck für streng logisch („wissenschaftlich“) aufgebaute Argumentationsketten.

Geometrie und Wirklichkeit

http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/ausstell/hilbert

- **Platon (427 - 347 v. Chr.)**
  - Es gibt zwei Welten:
    - die Welt der Ideen (die eigentliche Welt) und
    - die Welt der Erscheinungen (die nur ein Abbild/Schatten der Idealen Welt ist).
- **Immanuel Kant (1724 - 1804)**
  - Geometrie ist ein Produkt unseres Verstandes: „synthetische Urteile a priori“.
- **David Hilbert (1862 - 1943):**
  - Es werden nicht die Objekte definiert (Es wird z. B. nicht erklärt was ein Punkt ist!), sondern nur die Spielregeln festgelegt, also wie mit den Objekten umzugehen ist.
  - „Man muss jederzeit an Stelle von ‚Punkte, Geraden, Ebenen‘ ‚Tische, Stühle, Bierseidel‘ sagen können.“

Anschauung, Begriffe und Ideen

Hilbert: Grundlagen der Geometrie. Leipzig, 1899

So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauung an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen.

Kant: Kritik der reinen Vernunft, Elementarlehre T. 2. Abt. 2.

David Hilbert (1862 – 1943)

Die Geometrie bedarf (…) zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger einfach Grundsätze. Diese Grundsätze heißen Axiome der Geometrie. Die Aufstellung der Axiome der Geometrie (…) läuft auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung hinaus.

Hilbert: Grundlagen der Geometrie. Einleitung

Kapitel 1: Euklidische Geometrie

1.2 Axiome der ebenen euklidischen Geometrie

Axiome der ebenen euklidischen Geometrie

- **Daten für den axiomatischen Aufbau**
  - Menge $\mathcal{P}$, deren Elemente Punkte heißen.
  - Menge $\mathcal{G}$, deren Elemente Geraden heißen.
  - Relation $\in$ zwischen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{G}$
  - Dreistellige Relation „zwischen“ auf $\mathcal{P}$
  - Relation $\equiv_1$ auf der Menge der Strecken (Streckenkongruenz)
  - Relation $\equiv_2$ auf der Menge der Winkel (Winkelkongruenz)

- **Gruppen der Axiome**
  - Inzidenzaxiome
  - Anordnungsaxiome
  - Kongruenzaxiome
  - Parallelenaxiom
  - Vollständigkeitsaxiome

Inzidenzaxiome

- **Axiom I_1**
  - Durch je zwei Punkte verläuft eine Gerade.

$$\forall_{p,q\in\mathcal{P}}\,\exists_{L\in\mathcal{G}}\; p\in L \wedge q\in L$$

- **Axiom I_2**
  - Durch je zwei verschiedene Punkte verläuft höchstens eine Gerade.

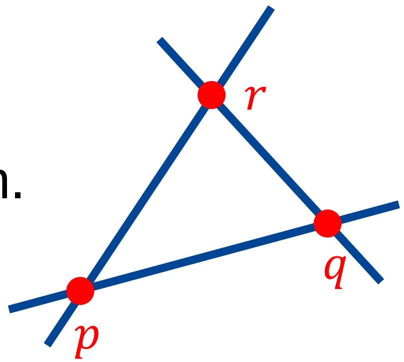
$$\forall_{p,q\in\mathcal{P},\,p\neq q}\,\exists_{L,M\in\mathcal{G}}\; p,q\in L \wedge p,q\in M \implies L=M$$

- **Axiom I_3**
  - Jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte.

$$\forall_{L\in\mathcal{G}}\,\exists_{p,q\in\mathcal{P},\,p\neq q}\; p\in L \wedge q\in L$$

- **Axiom I_4**
  - Es gib drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

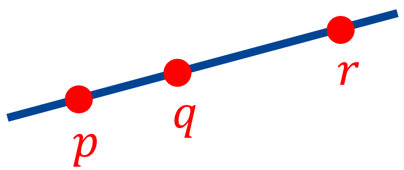
$$\exists_{p,q,r\in\mathcal{P}}\;\neg\exists_{L\in\mathcal{G}}\; p\in L \wedge q\in L \wedge r\in L$$



Anordnungsaxiome

Axiom A_1

- Wenn q zwischen p und r liegt, dann sind p, q und r drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden.



Axiom A_2

- Wenn q zwischen p und r liegt, dann liegt q auch zwischen r und p.

Axiom A_3

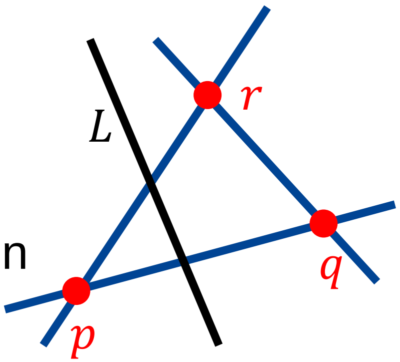
- Zu je zwei verschiedenen Punkten p und q gibt es einen Punkt r, so dass q zwischen p und r liegt.

Axiom A_4

- Unter je drei Punkten liegt höchstens einer zwischen den beiden anderen.

Axiom A_5 (Axiom von Pasch)

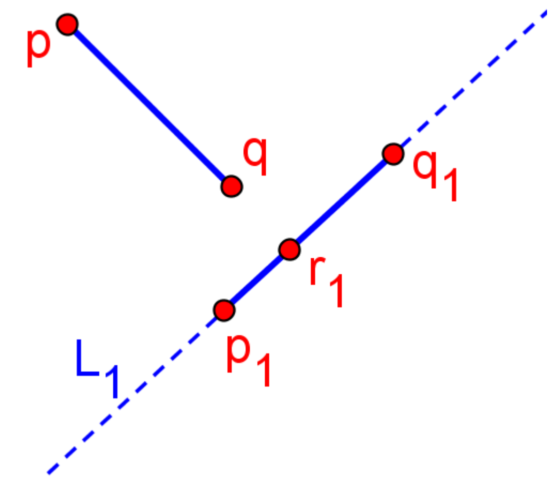
- Seien p, q und r drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen und L eine Gerade, die keinen dieser drei Punkte enthält.
- Wenn L die Strecke $\overline{pq}$ schneidet, dann schneidet sie auch genau eine der beiden anderen Strecken $\overline{pr}$ oder $\overline{qr}$.



Strecke, Schneiden und Lage

- **Bezeichnungen**
  - Zu je zwei Punkten p und q heißt die Menge aller Punkte, die zwischen p und q liegt die **Strecke** $\overline{pq}$.
  - Haben zwei Geraden L und M einen Punkt p gemeinsam, gilt also $p \in L \wedge p \in M$, dann spricht man davon, dass L und M sich **schneiden** ($L \cap M \neq \emptyset$).
  - Eine Strecke $\overline{pr}$ und eine Gerade L **schneiden** sich, wenn es einen Punkt q zwischen p und r gibt, mit $q \in L$.
  - Zwei Geraden L und M, die identisch sind ($L = M$) oder sich nicht schneiden ($L \cap M = \emptyset$), heißen **parallel**.
  - p ist ein Punkt auf der Geraden L. q und r sind zwei weitere Punkte auf L und beide ungleich p. q und r **liegen** genau dann **auf derselben Seite des Punktes** p, wenn p nicht zwischen q und r liegt.
  - L ist eine Gerade. p und q sind zwei Punkte, die nicht auf L liegen. p und r **liegen** genau dann **auf derselben Seite der Geraden** L, wenn $\overline{pq}$ die Gerade L nicht schneidet.

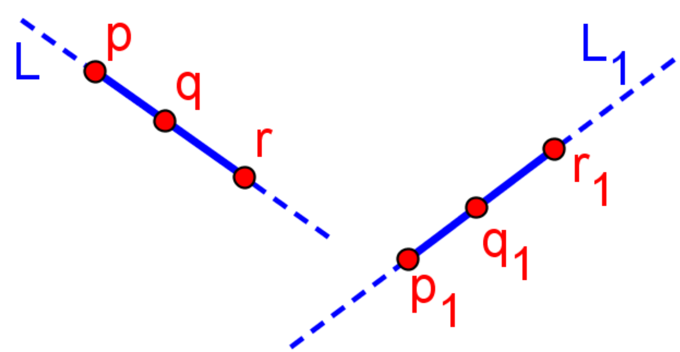
Kongruenzaxiome



- **Axiom $\boldsymbol{K_1}$** (Streckenabtragung)
  - Zu einer Strecke $\overline{pq}$ und einer Geraden L_1 mit $p_1, r_1 \in L_1,\ p_1 \neq r_1$ gibt es einen Punkt $q_1 \in L_1$ auf derselben Seite von p_1 wie r_1, so dass $\overline{pq}$ kongruent zu $\overline{p_1 q_1}$ ist.
- **Axiom $\boldsymbol{K_2}$** (Transitivität der Streckenkongruenz)
  - Sind die Strecken $\overline{p_1 q_1}$ und $\overline{p_2 q_2}$ jeweils kongruent zur Strecke $\overline{pq}$, dann ist auch $\overline{p_1 q_1}$ kongruent zu $\overline{p_2 q_2}$.

$$\overline{p_1 q_1} \equiv \overline{pq} \ \wedge\ \overline{p_2 q_2} \equiv \overline{pq} \Longrightarrow \overline{p_1 q_1} \equiv \overline{p_2 q_2}$$

- **Axiom $\boldsymbol{K_3}$** (Addierbarkeit von Strecken)
  - Wenn $p, q, r \in L$ und $p_1, q_1, r_1 \in L_1$ jeweils drei paarweise verschiedene Punkte auf den Geraden L bzw. L_1 und $\overline{pq} \cap \overline{qr} = \emptyset$ sowie $\overline{p_1 q_1} \cap \overline{q_1 r_1} = \emptyset$ sind, dann gilt:
    $\overline{pq} \equiv \overline{p_1 q_1} \ \wedge\ \overline{qr} \equiv \overline{q_1 r_1} \ \Longrightarrow\ \overline{pr} \equiv \overline{p_1 r_1}$



Definition 1.2.1

- Ein **Winkel** ist eine Äquivalenzklasse von Tripeln von Punkten p, q und r, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
- Für die Äquivalenzklasse (p, q, r) schreibt man $\angle(p, q, r)$. Der Punkt q heißt dann **Scheitel des Winkels**.
- Zwei Winkel $\angle(p, q, r)$ und $\angle(p_1, q_1, r_1)$ sind äquivalent, wenn
  - *i.* $q = q_1$
  - *ii.* $L(p, q) = L(p_1, q_1)$ und p und p_1 liegen auf derselben Seite von q
  - *iii.* $L(r, q) = L(r_1, q_1)$ und r und r_1 liegen auf derselben Seite von q

  oder wenn
  - *i.* $q = q_1$
  - *ii.* $L(p, q) = L(r_1, q)$ und p und r_1 liegen auf derselben Seite von q
  - *iii.* $L(r, q) = L(p_1, q)$ und r und p_1 liegen auf derselben Seite von q

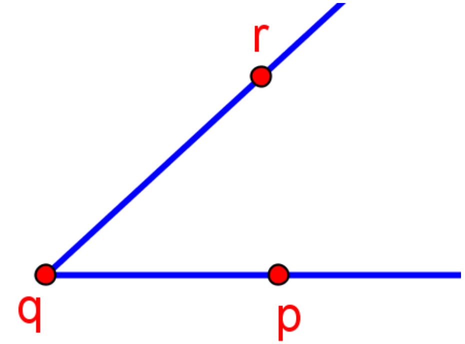
Kongruenzaxiome

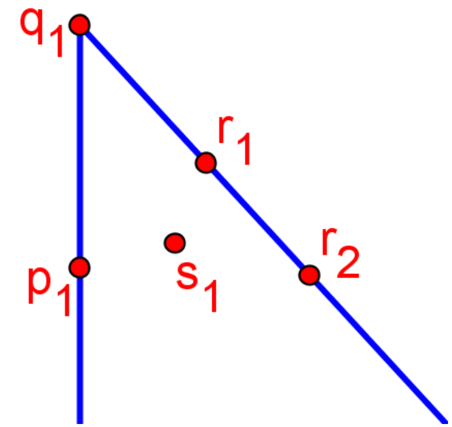
Axiom K_4

- Die Kongruenz von Winkeln ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Winkel.

Axiom K_5 (Winkelabtragung)

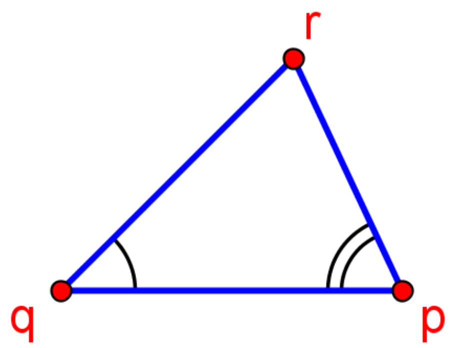
- p, q, r und p_1, q_1, s_1 sind jeweils Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegen. Dann gibt es einen Punkt r_1 auf der selben Seite von $L(p_1, q_1)$ wie s_1, so dass der Winkel $\angle(p_1, q_1, r_1)$ kongruent zum Winkel $\angle(p, q, r)$ ist.
- Ist r_2 ein weiterer Punkt mit denselben Eigenschaften wie r_1, d. h. liegt r_2 ebenfalls auf derselben Seite von $L(p_1, q_1)$ wie s_1 und gilt $\angle(p_1, q_1, r_2) \equiv \angle(p, q, r)$, dann ist $\angle(p_1, q_1, r_1) = \angle(p_1, q_1, r_2)$.

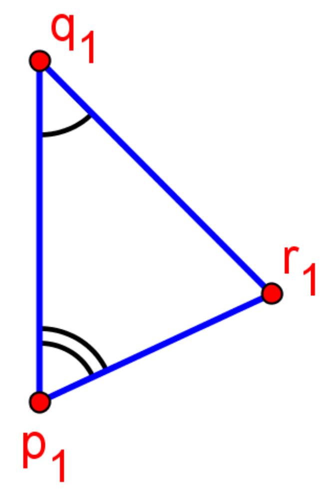




Kongruenzaxiome Parallelenaxiom

- **Axiom K_6**
  - p, q, r und p_1, q_1, r_1 sind jeweils Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegen. Gilt $\overline{pq} \equiv \overline{p_1 q_1}$, $\overline{pr} \equiv \overline{p_1 r_1}$ und $\angle(q, p, r) \equiv \angle(q_1, p_1, r_1)$, dann gilt auch $\angle(p, q, r) \equiv \angle(p_1, q_1, r_1)$.

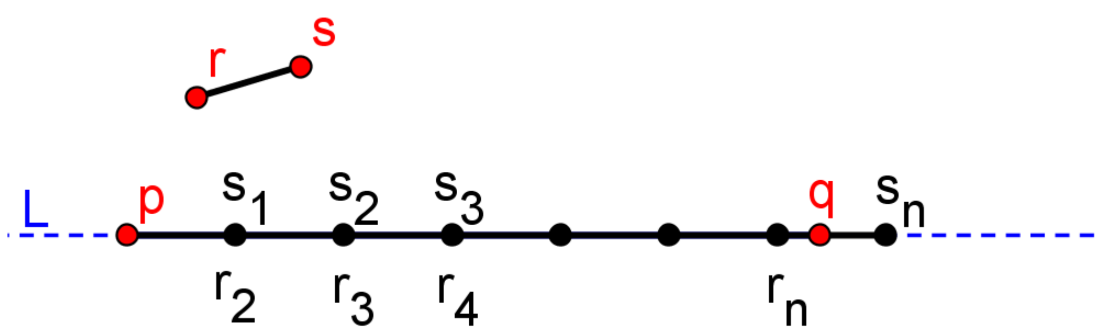




- **Axiom** P (Parallelenaxiom)
  - Ist L eine Gerade und p ein Punkt der nicht auf L liegt, dann gibt es höchstens eine Gerade, die p enthält und L nicht schneidet.

Vollständigkeitsaxiome

- **Axiom V_1** (Archimedisches Axiom)
  - Wenn zwei Strecken $\overline{pq}$ und $\overline{rs}$ gegeben sind, dann existiert immer eine natürliche Zahl n, so dass die Strecke $\overline{ps_n}$ die durch n-maliges Abtragen der Strecke $\overline{rs}$ von p aus auf $L(p,q)$ in Richtung q entsteht, die Strecke $\overline{pq}$ enthält.



- **Axiom V_2** (Maximalität)
  - Wenn $(\mathcal{P}', \mathcal{G}', \in', zwischen', \equiv_1', \equiv_2')$ eine Erweiterung der vorliegenden Geometrie ist, dann ist $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$ und $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$.

Kapitel 1: Euklidische Geometrie

1.3 Das kartesische Modell

Idee

- **Probleme der euklidischen Geometrie**
  - Selbst Beweise zu relativ einfachen Sachverhalte können kompliziert sein
  - Behandlung von geometrischen Objekten, die sich nicht aus Strecken, Kreisbögen usw. zusammensetzen ist relativ aufwändig
- **Idee von René Descartes (1596-1650)**
  - Punkte werden durch Koordinaten charakterisiert, die die Lage der Punkte in der Ebene beschreiben.
  - Vorteil: Methoden der Algebra und der Infinitesimalrechnung können eingesetzt werden um Probleme zu lösen

Punkte und Geraden

Definition 1.3.1

- Für die **Punktmenge** $\mathcal{P}$ gilt: $\mathcal{P} := \mathbb{R}^2$
- **Geraden** sind Punktmengen der Form $L = L_{p,v} := \{x \in \mathbb{R}^2 | \, x = p + t \cdot v \; mit \; t \in \mathbb{R}\}$ mit $p, v \in \mathbb{R}^2$ und $v \neq 0$.
- Für die **Menge** $\mathcal{G}$ **der Geraden** gilt:
$$\mathcal{G} := \left\{L_{p,v} \mid p, v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0\right\}$$
- Ein Punkt p ist in einer Geraden L **enthalten** (**liegt auf** einer Geraden L), wenn p ein Element der Menge der Punkte der Geraden L ist: $p \in L$
- Ein Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ liegt **zwischen** zwei verschiedenen Punkten p und $r \in \mathbb{R}^2$, wenn es ein $t \in (0, 1)$ gibt, mit $q = t \cdot p + (1 - t) \cdot r$.

Übungen

- Zeigen Sie die Gültigkeit der Axiome $\boldsymbol{I_1}$ bis $\boldsymbol{I_4}$ und $\boldsymbol{A_1}$ bis $\boldsymbol{A_4}$.

Beispiel

- Die in Definition 1.3.1 definierten Punkte und Geraden erfüllen das Inzidenzaxiom $\boldsymbol{I}_1$.

- Nachweis:
  - Behauptung:

    Zwei Punkte $p = \binom{x_p}{y_p}$ und $q = \binom{x_q}{y_q}$ liegen immer auf der Geraden

    $$L(t) = p + t \cdot (q - p) = \binom{x_p}{y_p} + t \cdot \binom{x_q - x_p}{y_q - y_p}.$$

  - Beweis:

    $p \in L$, da $L(0) = \binom{x_p}{y_p} = p$

    $q \in L$, da $L(1) = \binom{x_p + 1 \cdot (x_q - x_p)}{y_p + 1 \cdot (y_q - y_p)} = \binom{x_q}{y_q} = q$ #

Euklidische Bewegungsgruppe

Bemerkung

- Die Kongruenzbeziehungen werden über Abbildungen definiert, die auf der Menge $\mathcal{P}$ der Punkte operieren.

Definition 1.3.2

- $A \in O(n)$ ist eine **orthogonale Matrix** (d.h. sie erfüllt die Gleichung $A \cdot A^T = Id$, wobei A^T die zu A transponierte Matrix ist) und $b \in \mathbb{R}^n$.
- Die Abbildung $F_{A,b}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, x \longmapsto F_{A,b}(x) = Ax + b$ heißt dann **euklidische Bewegung**.
- Der Vektor b wird **Translationsanteil** genannt.
  A ist die **Drehmatrix**.
- Bei festgehaltener Dimension n nennt man die Menge aller euklidischen Bewegungen $E(n) := \{F_{A,b} | A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}$ **euklidische Bewegungsgruppe**.

Beispiel

- **Bemerkung**
  - Die euklidische Bewegungsgruppe bildet zusammen mit der Verkettung (Komposition) $\circ$ eine Gruppe $(E(n),\circ)$ mit $Id = F_{Id,0}$ als neutralem Element.
  - Beweis:
    - Assoziativität

$$
\begin{aligned}
&F_{A,b} \circ (F_{B,c} \circ F_{C,d})(x)\\
&= F_{A,b}(F_{B,c}(F_{C,d}(x)))\\
&= F_{A,b}(F_{B,c}(Cx + d))\\
&= F_{A,b}(BCx + Bd + c)\\
&= ABCx + ABd + Ac + b\\
&= F_{ABC,ABd+Ac+b}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(F_{A,b} \circ F_{B,c}) \circ F_{C,d}(x)\\
&= (F_{A,b} \circ F_{B,c})(F_{C,d}(x))\\
&= (F_{A,b} \circ F_{B,c})(Cx + d)\\
&= (F_{AB,Ac+b})(Cx + d)\\
&= ABCx + ABd + Ac + b\\
&= F_{ABC,ABd+Ac+b}(x)
\end{aligned}
$$

    - Neutrales Element

$$
\begin{aligned}
&\forall_{F_{A,b} \in E(n)}\, F_{Id,0} \circ F_{A,b}\\
&= F_{IdA,Idb+0} = F_{A,b}
\end{aligned}
$$

    - Inverses Element

$$
\begin{aligned}
&\forall_{F_{A,b} \in E(n)} F_{A,b}^{-1} \circ F_{A,b}\\
&= F_{A^{-1},-A^{-1}b} \circ F_{A,b}\\
&= F_{A^{-1}A,A^{-1}b-A^{-1}b} = F_{Id,0}
\end{aligned}
$$

#

- **Übung:** Zeigen Sie, dass Axiom von Pasch (A_5) erfüllt wird.

Kongruenz von Strecken und Winkeln

Definition 1.3.3

- Zwei **Strecken** $\overline{pq}$ und $\overline{rs}$ heißen **kongruent**, wenn es eine euklidische Bewegung $F \in E(2)$ gibt, so dass gilt:
$$\overline{F(p)F(q)} = \overline{rs}$$
- Zwei **Winkel** $\angle(p,q,r)$ und $\angle(p_1,q_1,r_1)$ heißen **kongruent**, wenn es eine euklidische Bewegung $F \in E(2)$ gibt, so dass gilt:
$$\angle(F(p),F(q),F(r)) = \angle(p_1,q_1,r_1)$$

Übung

- Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Axiome: Kongruenzaxiome $\boldsymbol{K}_1$ bis $\boldsymbol{K}_6$, Parallelenaxiom $\boldsymbol{P}$, Archimedischen Axioms $\boldsymbol{V}_1$.

Bemerkung

- Einen Beweis für die Gültigkeit des Maximalitätsaxioms $\boldsymbol{V}_2$ findet man in Bär (2010, S. 17ff).

Skalarprodukt

Bemerkungen

- Die Axiome der ebenen Geometrie gelten also für das kartesische Modell und sind insbesondere widerspruchsfrei.
- In diesem Modell steht die gesamte Differential- und Integralrechnung zur Verfügung, wodurch auch die Behandlung der euklidischen Trigonometrie vergleichsweise einfach wird.

Bezeichnung

- Für zwei Punkte
$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$
bezeichnet $\langle x, y \rangle$ das **Standard-skalarprodukt** auf dem $\mathbb{R}^n$:
$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$$

Beispiel

- Für $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
ergibt sich:
$\langle a, b \rangle = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$

Norm

Bezeichnung

- Für einen Punkt

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

bezeichnet $\|x\|$ die **Norm** auf dem $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2}$$

Beispiel

- Für $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ergibt sich:

$$\|x\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Innenwinkel

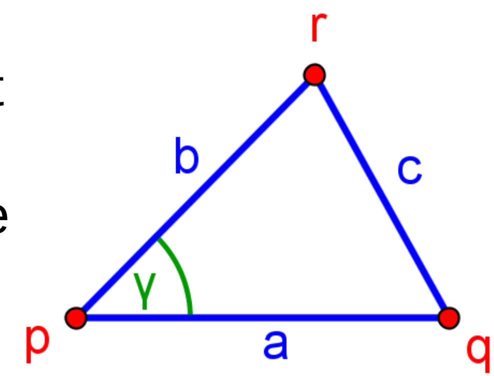
- **Bezeichnung**
  - Für drei verschiedene Punkte $x, y, z \in \mathbb{R}^2$, die nicht auf einer Geraden liegen, gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:
  $$|\langle y-x, z-x\rangle| \leq \|y-x\| \cdot \|z-x\|$$
  Daraus folgt:
  $$\left|\frac{\langle y-x, z-x\rangle}{\|y-x\| \cdot \|z-x\|}\right| \leq 1$$
  - Da $cos: [0, \pi] \rightarrow [-1,1]$ bijektiv ist, lässt sich der **Innenwinkel** bei x als die eindeutige Zahl $\gamma \in [0, \pi]$ definieren für die gilt:
  $$cos(\gamma) = \frac{\langle y-x, z-x\rangle}{\|y-x\| \cdot \|z-x\|}$$
- **Übung**
  - Zeigen Sie: Zwei Winkel sind genau dann kongruent, wenn Sie denselben Innenwinkel besitzen.

Kosinussatz

Satz 1.3.4 (Kosinussatz der euklidischen Geometrie)

$p, q, r \in \mathbb{R}^2$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks mit den Seitenlängen $a = \|p - q\|$, $b = \|p - r\|$ und $c = \|q - r\|$. Wenn γ der Innenwinkel an der Ecke p ist, dann gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos(\gamma)$$

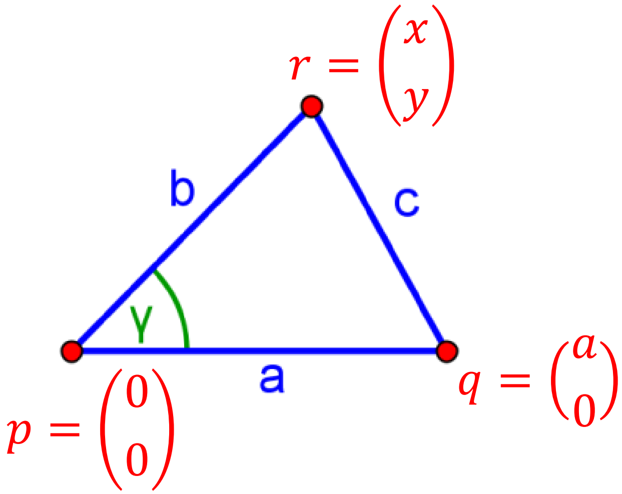


Beweis

- Sei o.B.d.A. $p = \binom{0}{0}$, $q = \binom{a}{0}$ und $r = \binom{x}{y}$.
  - Wahl eines geeigneten Koordinatensystems!
    Oder:
  - Ausgangsdreieck durch eine geeignete Bewegung auf das Dreieck mit den genannten Eckpunkten abbilden. Da Bewegungen Längen und Winkelgrößen erhalten, ändern sich dadurch die Ergebnisse nicht.

Kosinussatz

Beweis (Fortsetzung)



- Es gilt:

$$c^2 = \|q - r\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} a-x \\ 0-y \end{pmatrix} \right\|^2$$
$$= (a - x)^2 + (-y)^2$$
$$= a^2 - 2ax + \underbrace{x^2 + y^2}_{b^2}$$
$$= a^2 + b^2 - 2ax \qquad (*)$$

- Außerdem gilt:

$$\cos(\gamma) = \frac{\langle q-p, r-p \rangle}{\|q-p\| \cdot \|r-p\|}$$
$$\underbrace{=}_{p=0} \frac{\langle q,r \rangle}{\|q\| \cdot \|r\|}$$
$$= \frac{ax + 0 \cdot y}{a \cdot b} = \frac{ax}{ab}$$

Daraus folgt:

$$ax = ab \cdot \cos(\gamma) \qquad (**)$$

- Mit (*) und (**) ergibt sich:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

#

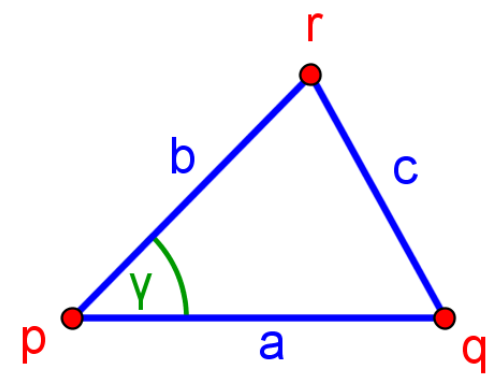
lat. corollarium
= „die Zugabe“,
„das Geschenk“

Satz des Pythagoras Sinussatz

Korollar 1.3.5 (Satz des Pythagoras)

$p, q, r \in \mathbb{R}^2$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks mit den Seitenlängen $a = \|p - q\|$, $b = \|p - r\|$ und $c = \|q - r\|$. Wenn für den Innenwinkel γ an der Ecke p gilt $\gamma = \frac{\pi}{2}$, dann folgt:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



- **Beweis:** Mit $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und dem Kosinussatz ergibt sich:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2$$

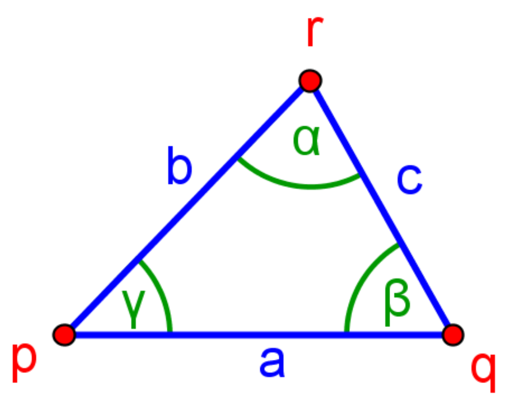
#

Satz 1.3.6 (Sinussatz der euklidischen Geometrie)

$p, q, r \in \mathbb{R}^2$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks mit den Seitenlängen $a = \|p - q\|$, $b = \|p - r\|$ und $c = \|q - r\|$. Wenn α der Innenwinkel an der Ecke r und β der Innenwinkel an der Ecke r ist, dann gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$

- **Beweis** (Sinussatz)



- Zu zeigen ist: $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{a}{b}$
- Bisher ist nur der Kosinus (über den Kosinussatz) bekannt.
- Zusammenhang zwischen Sinus und Kosinus:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

- Mit dem Kosinussatz ergibt sich:

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$$

$$= 1 - \left(\frac{a^2-(b^2+c^2)}{2bc}\right)^2$$

$$= \frac{4b^2c^2-\left(a^2-(b^2+c^2)\right)^2}{4b^2c^2}$$

Analog ergibt sich:

$$\sin^2(\beta) = \frac{4a^2c^2-\left(b^2-(a^2+c^2)\right)^2}{4a^2c^2}$$

- Daraus folgt:

$$\frac{\sin^2(\alpha)}{\sin^2(\beta)} = \frac{a^2\cdot\left(4b^2c^2-\left(a^2-(b^2+c^2)\right)^2\right)}{b^2\cdot(4a^2c^2-(b^2-(a^2+c^2))^2)}$$

$$= \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}$$

$$= \frac{a^2}{b^2}$$

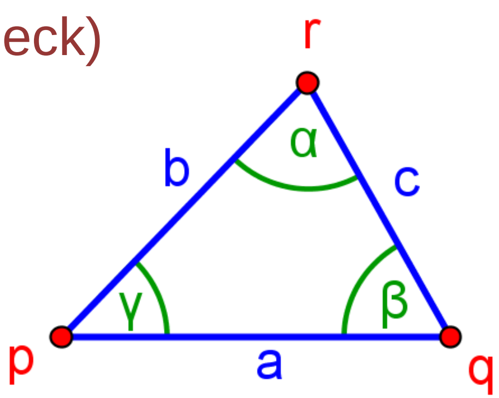
- Also gilt: $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{a}{b}$ #

Satz des Pythagoras Sinussatz

Satz 1.3.7 (Innenwinkelsumme im euklidischen Dreieck)

Für die Summe der Innenwinkel α, β, γ im euklidischen Dreieck gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

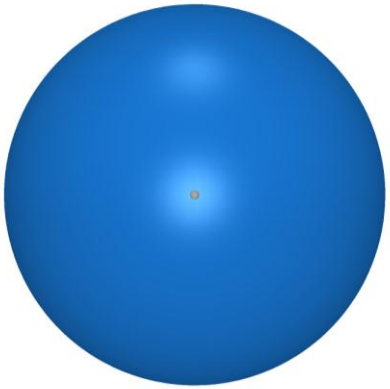


- **Beweis:** Siehe Bär (2010, S. 22f)
- **Übung**
  - Zeigen Sie: In einem Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c gilt für den Innenwinkel α:

$$tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(a-b+c)\cdot(a+b-c)}{(a+b+c)\cdot(-a+b+c)}$$

Hinweis: Zeigen und benutzen Sie: $tan^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{1+\cos(2t)}$

- **Bemerkungen**
  - Die **sphärische Geometrie** ist die Geometrie auf einer Kugeloberfläche.



  - Die zugehörige **Punktmenge** $\mathcal{P}$ lässt sich wie folgt festlegen:

$$\mathcal{P} := S^2$$
$$:= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

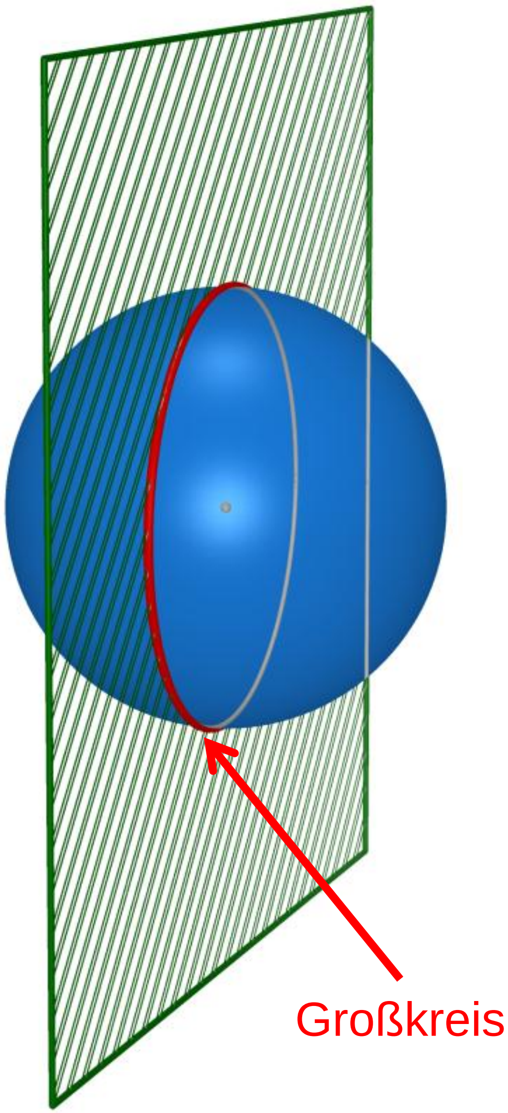
S^2 wird **zweidimensionale Sphäre** genannt.

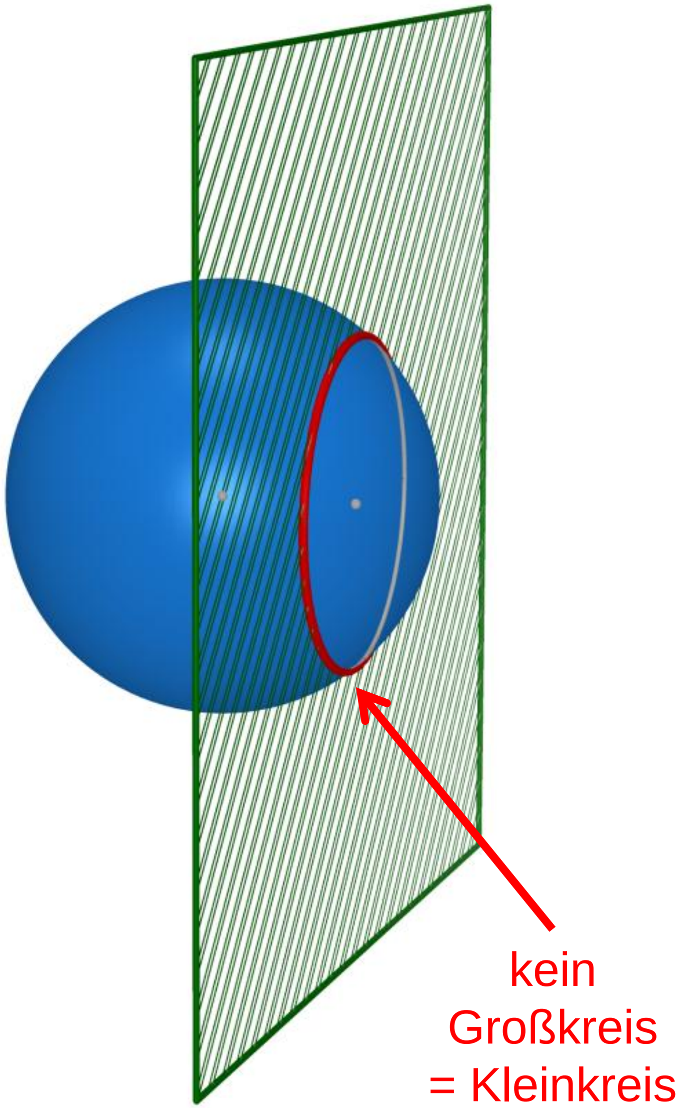
  - **Geraden** kann man in der Ebene als die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten charakterisieren.
  - Die kürzeste Verbindung zweier verschiedener (nicht antipodaler) Punkte der Sphäre liegen auf dem Großkreis durch die beiden Punkte.
  - Ein **Großkreis** ist die Schnittmenge eines zweidimensionalen Untervektorraums von $\mathbb{R}^3$ (also einer Ebene die 0 enthält) mit S^2.
  - Die **Menge** $\mathcal{G}$ **der Geraden** lässt sich damit wie folgt definieren:

$$\mathcal{G} := \left\{ S^2 \cap E \,\middle|\, \begin{matrix} E \text{ ist zweidimensionaler} \\ \text{Untervektorraum des } \mathbb{R}^3 \end{matrix} \right\}$$

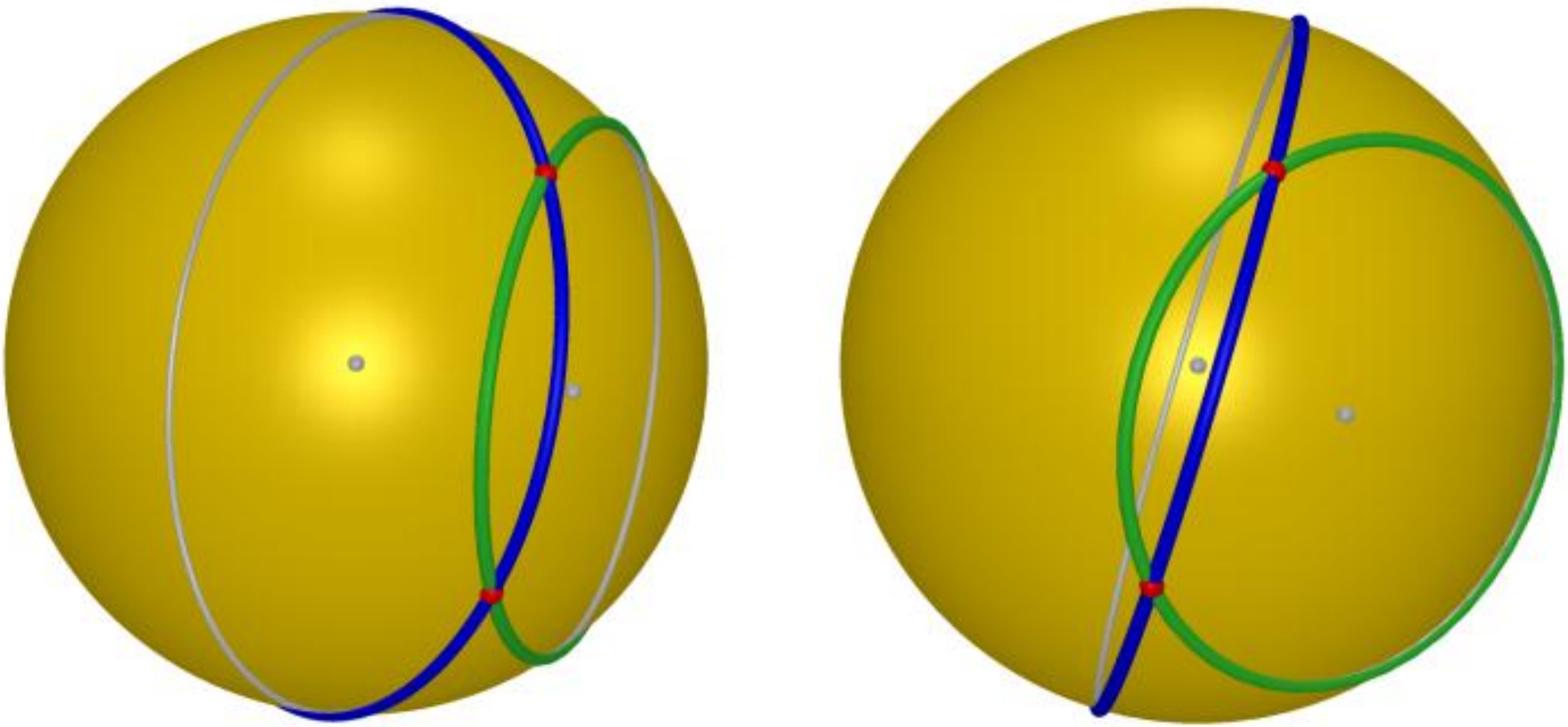
  - Die **Inzidenzrelation** $\in$ ist mengentheoretisch erklärt („… ist Element von …“).

Großkreis

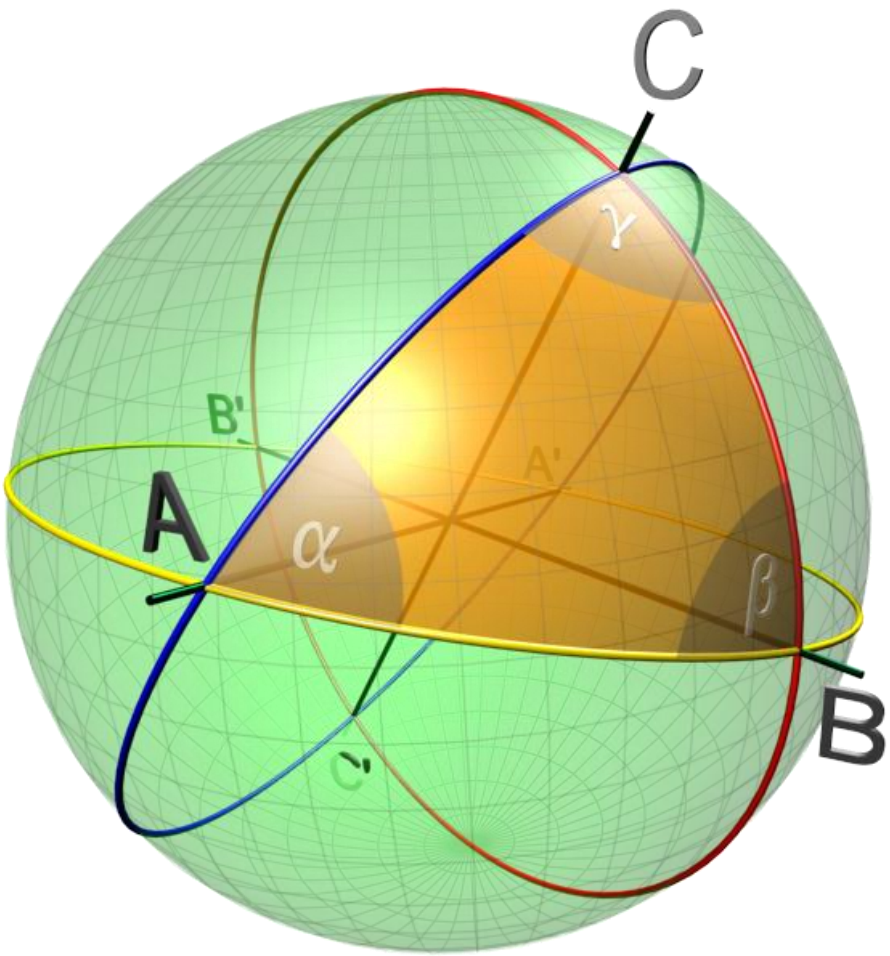




Großkreis



Sphärische Geometrie



Aufgaben

- Welche der Axiome I_1 bis I_4 gelten?
- Was ist eine Strecke?
- Welche der Axiome A_1 bis A_5 gelten?
- Zeigen Sie, dass die Axiome K_1 bis K_6 gelten.

Bemerkungen

- Kongruenzrelationen lassen sich über die Orthogonale Gruppe O(3) definieren.
- Für $A \in O(3)$ und $p \in S^2$ folgt $Ap \in S^2$.
- Es gibt keine Parallelen, da sich Großkreise immer schneiden.