Jürgen Roth

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

Modul 5: Fachdidaktische Bereiche

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

1 Ziele und Inhalte

2 Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

3 Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

4 Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

5 Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

6 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

7 Hyperkomplexe Zahlen

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

1 Ziele und Inhalte

2 Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

3 Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

4 Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

5 Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

6 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

7 Hyperkomplexe Zahlen

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

Kapitel 6: Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Komplexe Zahlen im Unterricht?

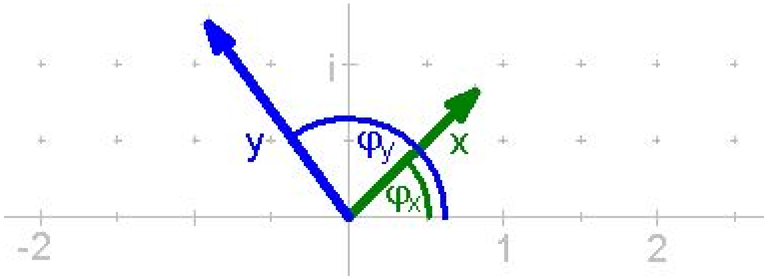
http://www.juergen-roth.de/veroeffentlichungen/zahl_i/roth_zahl_i.pdf

- **Vgl. hierzu folgenden Artikel:**
  - Roth, J. (2003). Die Zahl i – phantastisch, praktisch, anschaulich. *mathematik lehren, Heft 121*, S. 47-49
- **Komplexe Zahlen im Unterricht?**
  - Beim *Lösen von Gleichungen mit Computeralgebrasystemen* tauchen komplexe Zahlen auf – hierfür sollte man den Schülerinnen und Schülern eine befriedigende Erklärung anbieten.
  - Die nach dem Spiralprinzip angelegte Vermittlung der *Idee der Zahlbereichserweiterung beim Erreichen einer Grenze* des aktuellen Zahlbereichs wird unterstützt, wenn man beim Gleichungslösen und Wurzelziehen an Grenzen stößt und sich Gedanken über eine mögliche Zahlbereichserweiterung macht.
  - *Komplexe Zahlen sind praktisch*, weil sie die mathematische Aufarbeitung vieler inner- und außermathematischer Probleme deutlich vereinfachen oder erst möglich machen.

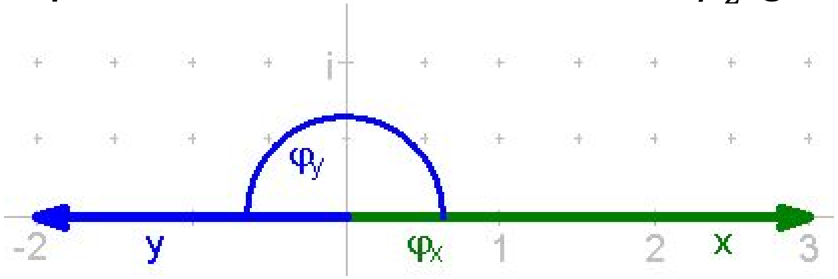
Gauß’schen Zahlenebene

https://www.geogebra.org/m/jgmef4cs

- Die Deutung von Punkten der „Zahlengeraden“ als reelle Zahlen wird geometrisch erweitert auf die Punkte der Ebene, die als „komplexe Zahlen“ gedeutet werden.
- Komplexe Zahlen werden durch Zeiger repräsentiert, die im Koordinatenursprung beginnen.
- Alle Zeiger $z = (r_z, \varphi_z)$ werden eindeutig festgelegt durch ihre Länge r_z und den Winkel φ_z, den sie mit der positiven reellen Achse einschließen.



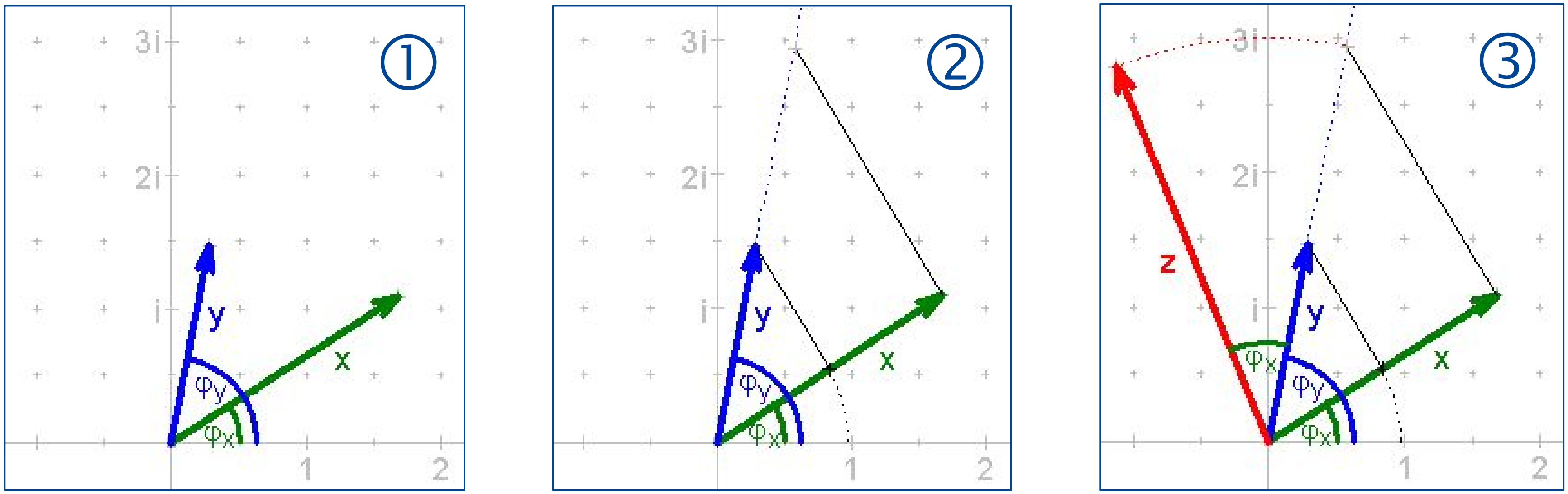
- Dabei ist r_z eine positive reelle Zahl und für φ_z gilt $0° \leq \varphi_z < 360°$.



– 2 = (2, 180°) **3 = (3, 0°)**

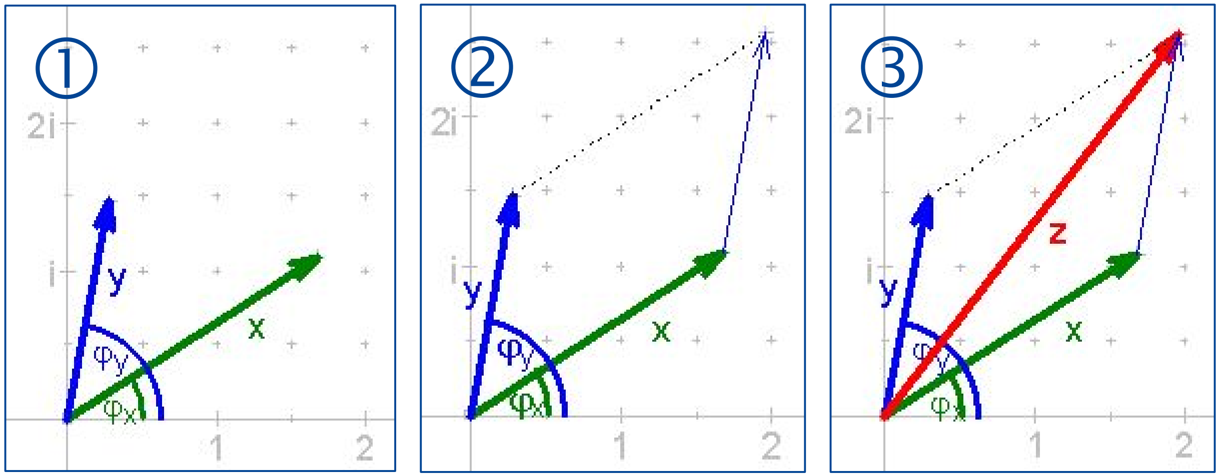
$z = x \cdot y$

https://www.geogebra.org/m/jgmef4cs

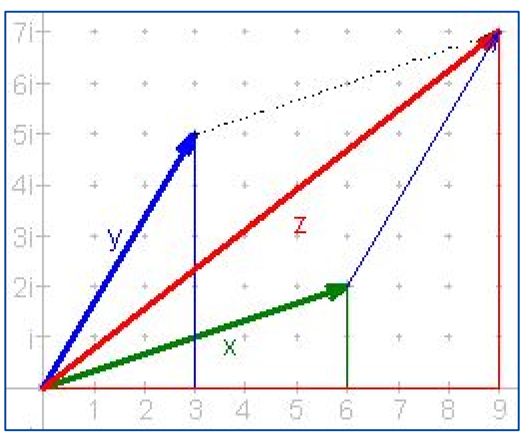


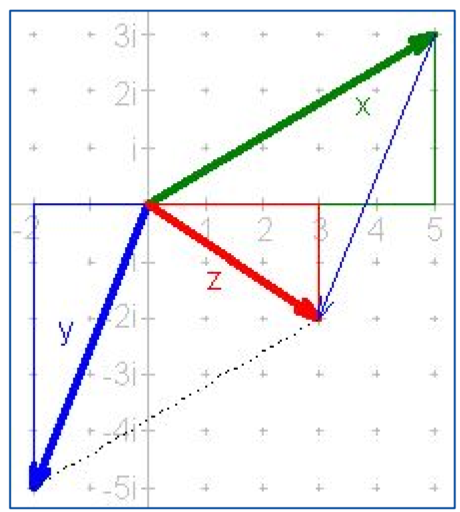
$z = x \pm y$

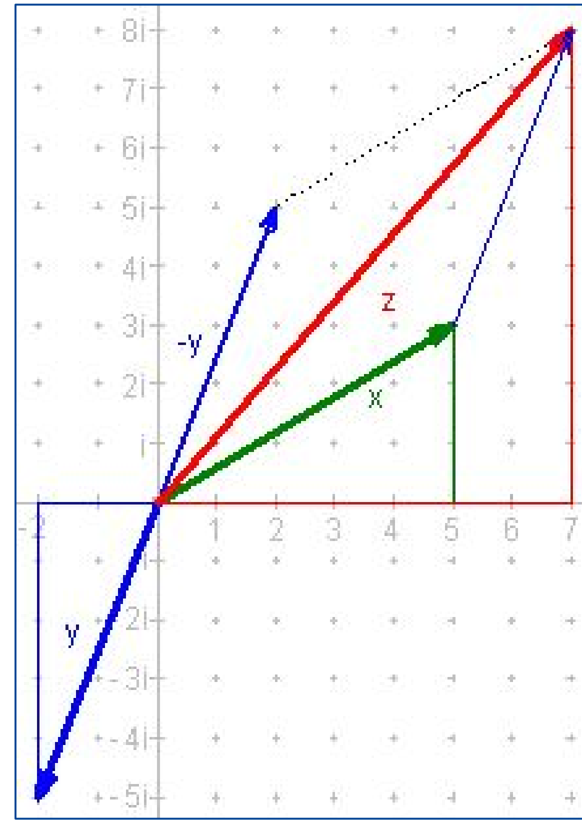
https://www.geogebra.org/m/jgmef4cs



$$z = x + y$$







$$z = x - y$$
$$= x + (-y)$$

Die Zahl i

https://www.geogebra.org/m/jgmef4cs

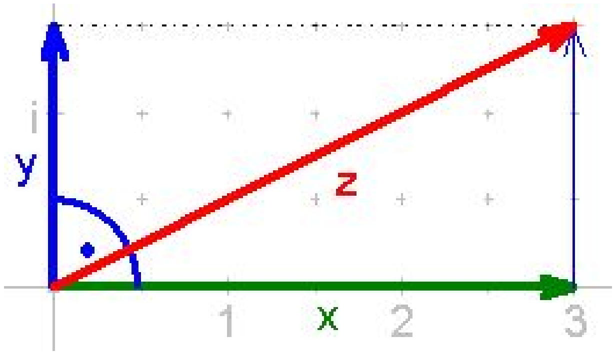
- Die Richtung der zweiten Koordinatenachse wird durch den Zeiger $(1, 90°)$ festgelegt.
- Wegen der Bedeutung für diesen Zahlenbereich erhält er einen Namen, nämlich $i = (1, 90°)$.
(Vgl. die Achsenbeschriftungen in den bisherigen Darstellungen.)
- Wenn man i mit sich selbst multipliziert, ergibt sich:

$$\begin{aligned} i^2 &= i \cdot i \\ &= (1, 90°) \cdot (1, 90°) \\ &= (1 \cdot 1, 90° + 90°) \\ &= (1, 180°) \end{aligned}$$

- $(1, 180°)$ ist ein Zeiger auf der reellen Achse, nämlich die Zahl -1.
- In diesem Zahlensystem ist die Gleichung $x^2 = -1$ also lösbar.

https://www.geogebra.org/m/jgmef4cs

- **Mit der Zeigeraddition kann jeder Zeiger z als Summe dargestellt werden aus**
  - einem auf der reellen Achse liegenden Zeiger x
  - und einem auf der durch i festgelegten Achse (wir nennen sie i-Achse) liegenden Zeiger y.
- **Damit ergibt sich:**
  - $z = x + y = (r_x, 0°) + (r_y, 90°)$
    $= (r_x, 0°) + (r_y \cdot 1, 0° + 90°)$
    $= (r_x, 0°) + (r_y, 0°) \cdot (1, 90°)$
    $= r_x + r_y \cdot i$



  - Dabei sind r_x und r_y reelle Zahlen.
  - **Beispiel:** Für den Zeiger in der Abbildung ergibt sich: $z = 3 + 1{,}5i$
  - Auf dieser Grundlage lassen sich alle Rechenregeln für Zahlen (die Körperaxiome) relativ einfach herleiten.

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

1 Ziele und Inhalte

2 Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

3 Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

4 Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

5 Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

6 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

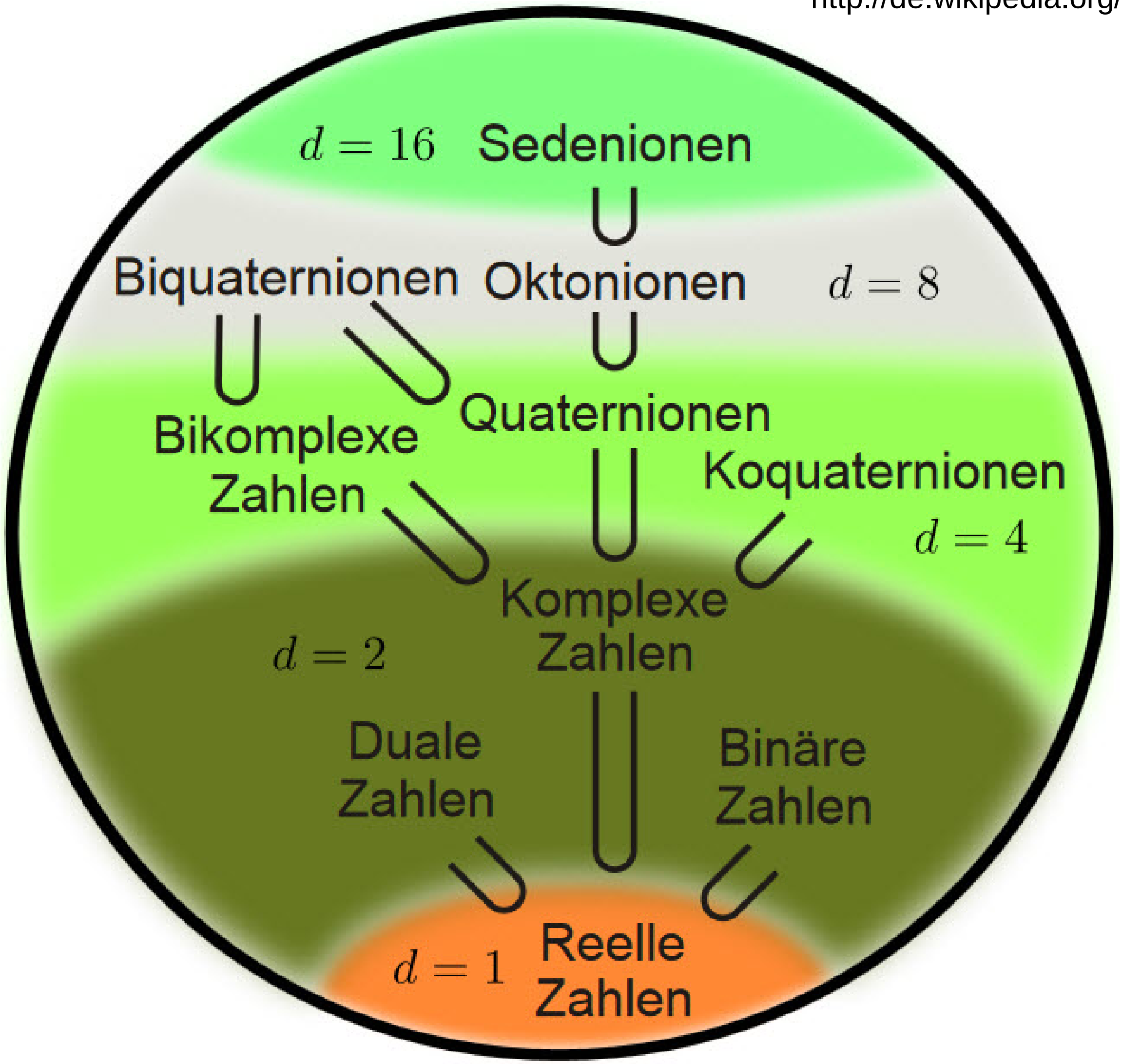
7 Hyperkomplexe Zahlen

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

Kapitel 7: Hyperkomplexe Zahlen

Hyperkomplexe Zahlen

http://de.wikipedia.org/wiki/Hyperkomplexe_Zahl



http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hyperkomplexe_Zahlen.svg http://de.wikipedia.org/wiki/Quaternionen

Grundlegende Aspekte

- Quaternionen erlauben eine rechnerisch elegante Beschreibung des dreidimensionalen euklidischen Raumes und anderer Räume.
- Verwendungsbeispiel:
  Berechnungs- und Darstellungsalgorithmen für Simulationen
- Jede Quaternion lässt sich eindeutig in der Form

$$x = x_0 + x_1 \cdot i + x_2 \cdot j + x_3 \cdot k$$

mit $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ und $i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$.

- Ein Quaternion kann auch als vierdimensionaler Vektor

$$(x_0, \vec{x}) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

aufgefasst werden.

http://de.wikipedia.org/wiki/Quaternionen

Einige Rechenoperationen

- $\lambda \cdot x = \lambda \cdot x_0 + \lambda \cdot x_1 \cdot i + \lambda \cdot x_2 \cdot j + \lambda \cdot x_3 \cdot k$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$
- $x + y = x_0 + x_1 \cdot i + x_2 \cdot j + x_3 \cdot k + y_0 + y_1 \cdot i + y_2 \cdot j + y_3 \cdot k$
  $= (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1) \cdot i + (x_2 + y_2) \cdot j + (x_3 + y_3) \cdot k$
- $x \cdot y = (x_0, \vec{x}) \cdot (y_0, \vec{y})$
  $= (x_0 y_0 - \vec{x} \cdot \vec{y}, x_0 \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot y_0 + \vec{x} \times \vec{y})$
- $\bar{x} = x_0 - x_1 \cdot i - x_2 \cdot j - x_3 \cdot k$
- Skalarteil: $\frac{x+\bar{x}}{2}$
- Vektorteil: $\frac{x-\bar{x}}{2}$