Jürgen Roth

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

Modul 5a: Fachdidaktische Bereiche

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Jürgen Roth

Kapitel 5: Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

Kapitel 5: Reelle Zahlen ℝ

5.1 Warum reelle Zahlen?

5.2 Gibt es irrationale Zahlen?

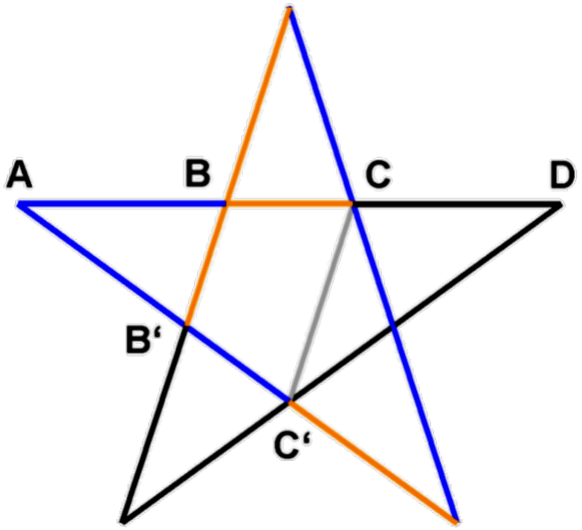
5.3 Heron-Algorithmus zur Berechnung von Quadratwurzeln

Kapitel 5: Reelle Zahlen ℝ

5.1 Warum reelle Zahlen?

Einführung reeller Zahlen

Kirsch, A. (1997). Mathematik wirklich verstehen. Köln: Aulis Verlag Deubner, S. 90



Inkommensurabilität

Einführung reeller Zahlen

- Lässt sich nicht aus praktischen Messaufgaben rechtfertigen.
- In realen Situationen (z. B. bei Messungen) treten irrationale Zahlen niemals direkt auf.

Entscheidung, ob eine Maßzahl/Gleichungslösung rational ist:

- Kann nicht experimentell-empirisch erfolgen.
- Kann nicht durch Ausrechnen mittels Computer erfolgen.
- Nur mit theoretischer Argumentation möglich.

Übergang von den rationalen zu den reellen Zahlen

- Eine theoretische zweckmäßige Erweiterung des Zahlbereichs.
- Sichert, dass für geometrische und algebraische Probleme anschaulich vorhandene Lösungen auch in der Theorie als wohlbestimmte Objekte existieren (z. B. Länge der Diagonalen eines Quadrats; Kreisumfang).

Kapitel 5: Reelle Zahlen ℝ

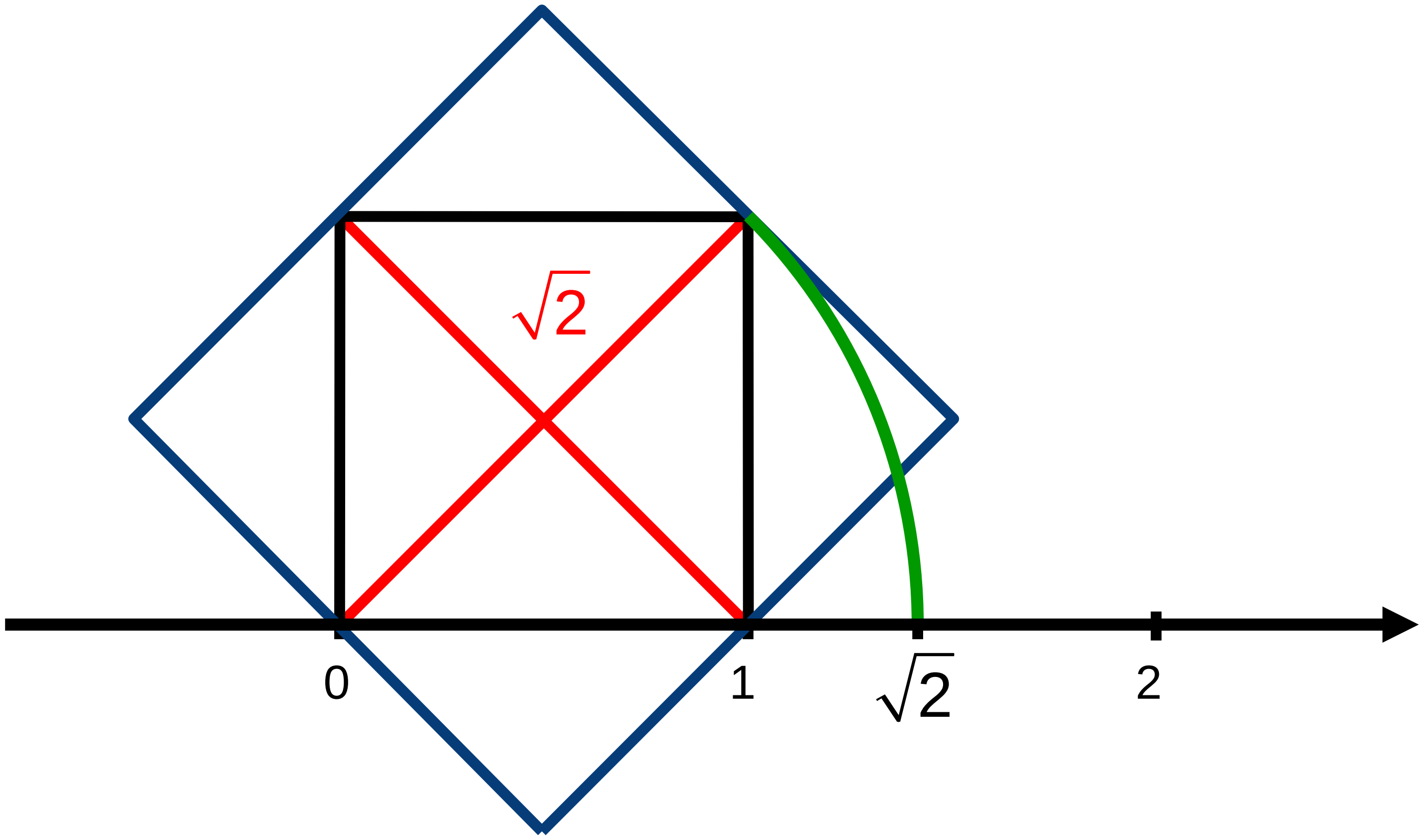
5.2 Gibt es irrationale Zahlen?

Reelle Zahlen

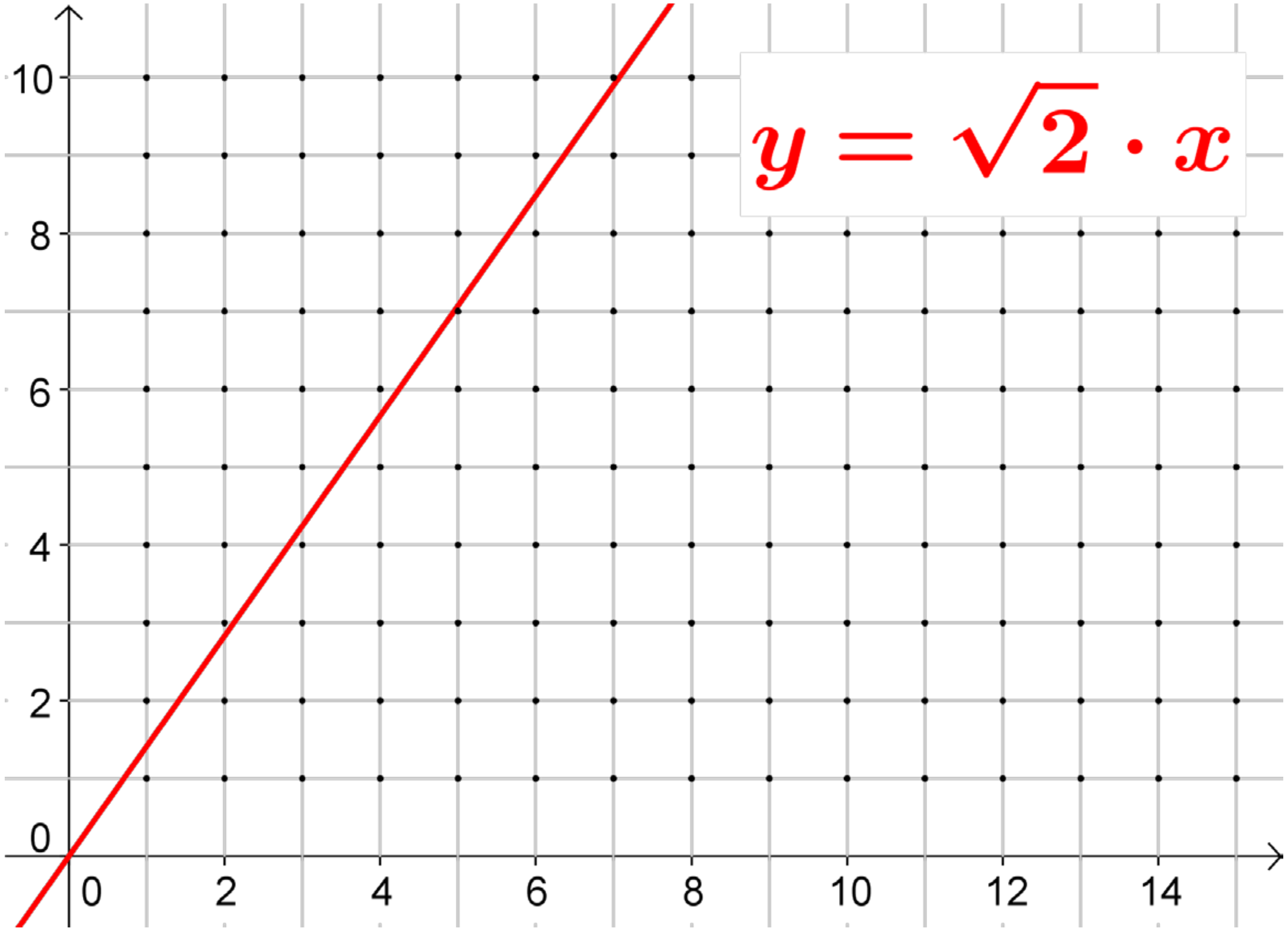
Kirsch, A. (1997). *Mathematik wirklich verstehen*. Köln: Aulis Verlag Deubner

Die reellen Zahlen entsprechen eineindeutig den sämtlichen Punkten der Zahlengeraden.

Arnold Kirsch



Irrationalität von $\sqrt{2}$



o. B. d. A. heißt „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“.

Existenz irrationaler Zahlen

Definition

Eine reelle Zahl x heißt

- **rational**, wenn sie sich in der Form $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ schreiben lässt,
- andernfalls **irrational**.

Satz

- Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.

Beweis (Widerspruchsbeweis)

„Wenn $\overbrace{x^2 = 2}^{p(x)}$ ist, dann gilt für alle Lösungen x dieser Gleichung $\underbrace{x \notin \mathbb{Q}}_{q(x)}$.“

Annahme: $p(x) \land \neg q(x)$

Es gibt o.B.d.A. einen vollständig gekürzter Bruch $\frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ mit: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$

$\Rightarrow m^2 = 2n^2$

$\Rightarrow m^2$ ist gerade.

$\Rightarrow m$ ist gerade.

$\Rightarrow m = 2 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow m^2 = 4 \cdot k^2$

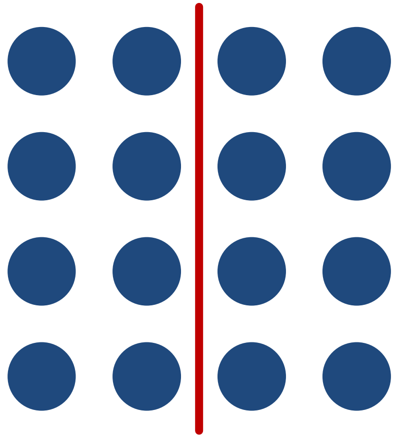
$\Rightarrow 4 \cdot k^2 = 2n^2$

$\Rightarrow 2 \cdot k^2 = n^2$

$\Rightarrow n^2$ ist gerade. $\Rightarrow n$ ist gerade.

$\Rightarrow \frac{m}{n}$ ist nicht vollständig gekürzt.

$\Rightarrow$ Es gibt kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. $\blacksquare$



Spies (2018). Vom Widerspruch, zugleich gerade und ungerade zu sein. Mathematik lehren 208, S. 16-20

o. B. d. A. heißt „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“.

Existenz irrationaler Zahlen

Definition

Eine reelle Zahl x heißt

- **rational**, wenn sie sich in der Form $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ schreiben lässt,
- andernfalls **irrational**.

Satz

- Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.

Beweis (Widerspruchsbeweis)

„Wenn $\overbrace{x^2 = 2}^{p(x)}$ ist, dann gilt für alle Lösungen x dieser Gleichung $\underbrace{x \notin \mathbb{Q}}_{q(x)}$.“

Annahme: $p(x) \wedge \neg q(x)$

Es gibt o.B.d.A. einen vollständig gekürzter Bruch $\frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ mit: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$

$\Rightarrow m^2 = 2n^2$

$\Rightarrow m \cdot m = 2 \cdot n \cdot n$

In der Primfaktorzerlegung von $m \cdot m$ tritt die Zahl 2 in einer geraden Anzahl auf, in der von $2 \cdot n \cdot n$ tritt die Zahl 2 dagegen in einer ungeraden Anzahl auf.

Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung!

$\Rightarrow$ Es kann keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$ geben.

$\blacksquare$

Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung

Beweis

- Annahme:
  Es gibt natürliche Zahlen mit mehreren unterschiedlichen Zerlegungen. Dann gibt es darunter eine kleinste Zahl n.
- n kann keine Primzahl sein (Warum?).
- Zwei Zerlegungen von n können keinen gemeinsamen Primfaktor p enthalten, da dann auch $\frac{n}{p}$ zwei verschiedene Zerlegungen hätte und kleiner als n wäre.

  Widerspruch zu „n ist minimal".

- Es gilt also:
  $n = p \cdot a = q \cdot b$
  mit $p, q \in \mathbb{P} \wedge p \neq q \wedge a \neq b$
- Das letzte Argument ist das

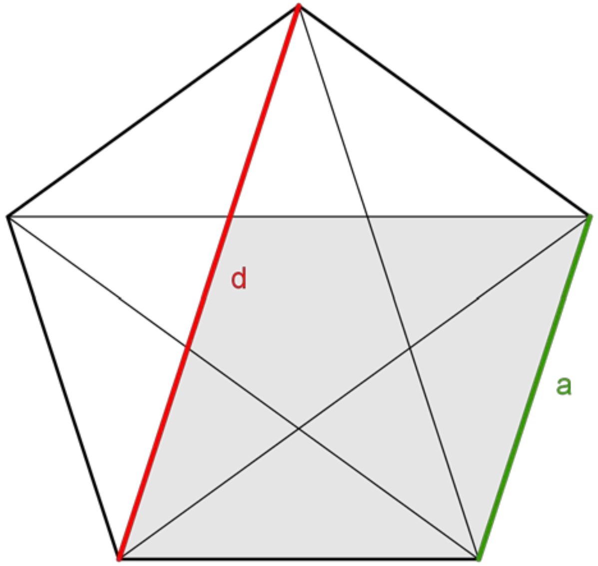
  Lemma von Euklid: Teilt eine Primzahl ein Produkt, so auch mindestens einen der Faktoren.
  $$p|(a \cdot b) \;\Rightarrow\; p|a \vee p|b$$

- Da n durch p teilbar ist, muss einer der Faktoren der anderen Zerlegung durch p teilbar sein und das ist b, denn q ist prim.
- Also taucht ein beliebiger Primfaktor stets in beiden Zerlegungen auf und damit sind sie identisch. ■

Inkommensurabilität

Pentagon

Es gibt kein gemeinsames Maß für die Diagonale d und die Seite a des regelmäßigen Fünfecks.



$d = 1 \cdot a + d_1$

$$d = 1 \cdot a + d_1$$
$$a = 1 \cdot d_1 + a_1$$

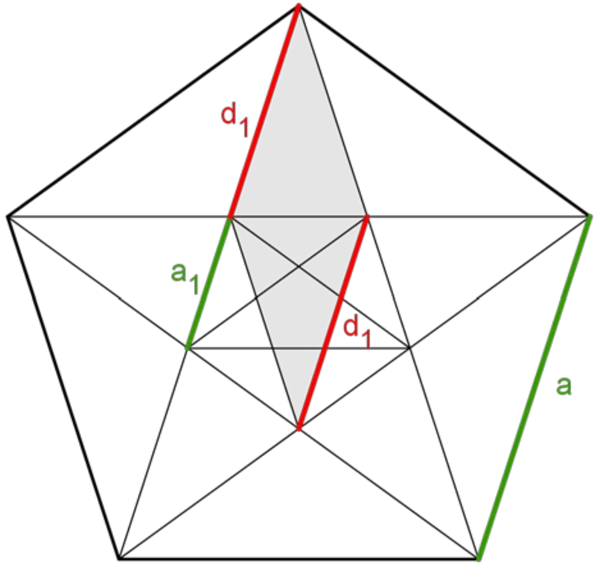
Im zweiten Fünfeck:

$$d_1 = 1 \cdot a_1 + d_2$$
$$a_1 = 1 \cdot d_2 + a_2$$

Im dritten Fünfeck:

$$d_2 = 1 \cdot a_2 + d_3$$
$$a_2 = 1 \cdot d_3 + a_3$$

…



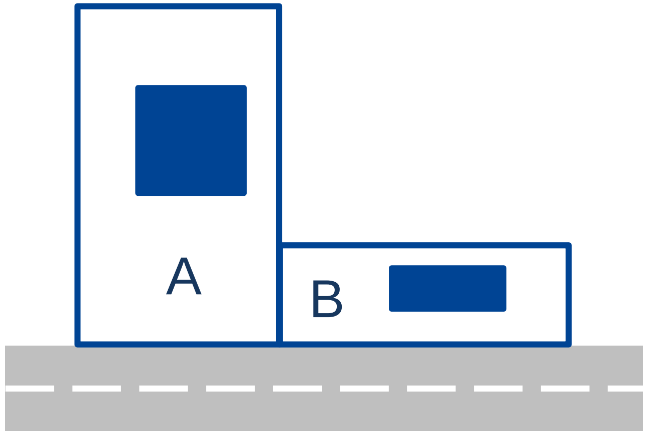
$a = 1 \cdot d_1 + a_1$

Wäre e ein gemeinsames Maß von d und a, dann auch für jedes Paar (d_n, a_n). Die Längen nehmen aber bei jedem Schritt um mehr als die Hälfte ab und werden damit sicher kleiner als jedes e. 💣

Kapitel 5: Reelle Zahlen ℝ

5.3 Heron-Algorithmus zur Quadratwurzel-berechnung

Heron-Verfahren (Wurzelberechnung)



- **Berechnungsgrundlage für Straßenreinigungsgebühren**
  - An die Straße grenzende Grundstückslänge (Frontmetermaßstab).
  - Der Eigentümer von Grundstück B muss mehr bezahlen als der von Grundstück A, obwohl Grundstück A größer ist.
  - Gemeinderat: Für ein größeres Grundstück mehr zahlen.

- **Lösung: Quadratwurzelmaßstab als Bemessungsgrundlage**
  - Straßenreinigungsgebühren werden aus der Seitenlänge eines zum Grundstück flächeninhaltsgleichen Quadrats berechnet.

- **Frage**
  - Wie findet man die Seitenlänge dieses Quadrats?

Heron-Verfahren (Quadratwurzelberechnung)

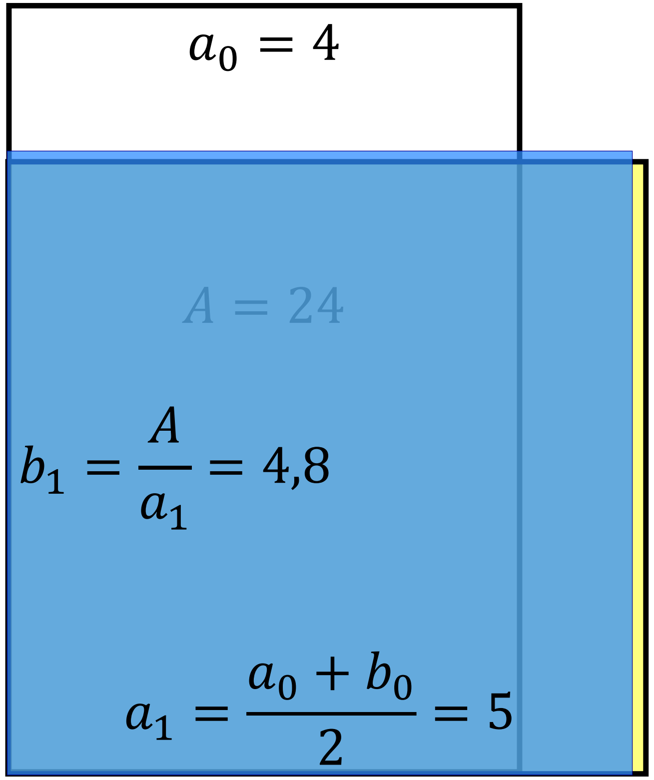
Gesucht: $\sqrt{A}$

Anfangswert: a_0

$$b_n = \frac{A}{a_n}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{a_n + \frac{A}{a_n}}{2}$$

$$b_0 = \frac{A}{a_0} = \frac{24}{4} = 6$$



Heron-Verfahren

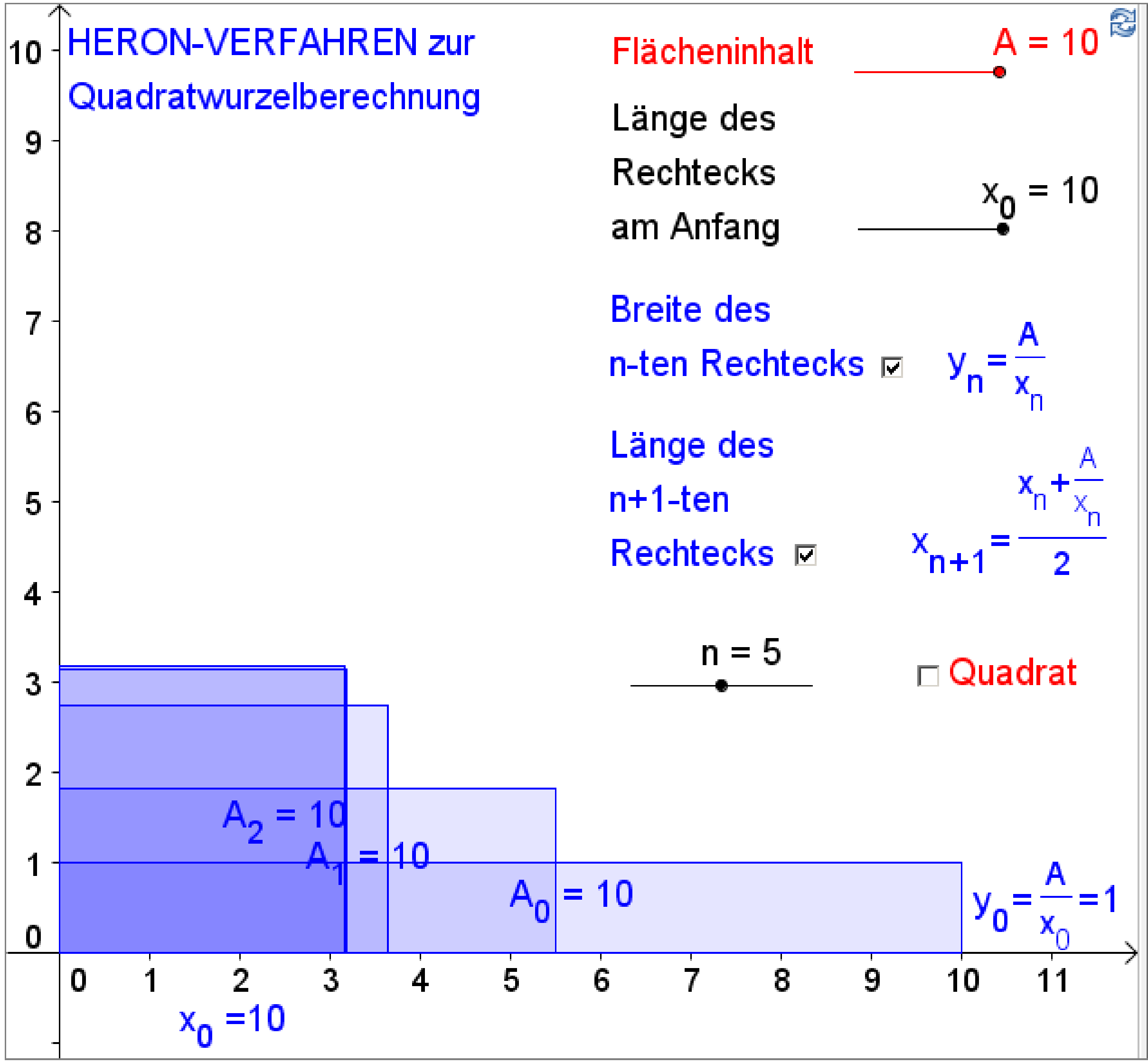
Berechnung der Seitenlänge eines Quadrates der Fläche A
bzw. Berechnung der Quadratwurzel von A (Näherungsverfahren!)

Fläche A	Wurzel aus A
66,00	8,1240384046

n	a	b = A / a	| a - b |
1	3,00	22,0000000000	19,0000000000
2	12,5000000000	5,2800000000	7,2200000000
3	8,8900000000	7,4240719910	1,4659280090
4	8,1570359955	8,0911742987	0,0658616968
5	8,1241051471	8,1239716627	0,0001334843
6	8,1240384049	8,1240384044	0,0000000005
7	8,1240384046	8,1240384046	0,0000000000

Schnell konvergierende Intervallschachtelung.

Heron-Verfahren (Quadratwurzelberechnung)



	A	B	C
1	n	x_n	y_n = A/x_n
2	0	10	1
3	1	5.5	1.8181818182
4	2	3.6590909091	2.7329192547
5	3	3.1960050819	3.1289061637
6	4	3.1624556228	3.1620997075
7	5	3.1622776652	3.1622776552
8	6	3.1622776602	3.1622776602
9	7	3.1622776602	3.1622776602
10	8	3.1622776602	3.1622776602
11	9	3.1622776602	3.1622776602
12	10	3.1622776602	3.1622776602
13			
14			
15			

http://www.juergen-roth.de/dynageo/heronverfahren/ • https://www.geogebra.org/m/e9vmcf5w