Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

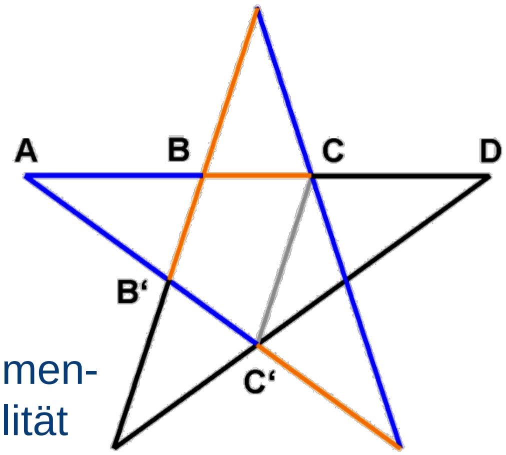
Inhaltsverzeichnis

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

Kapitel 5:

Reelle Zahlen ℝ

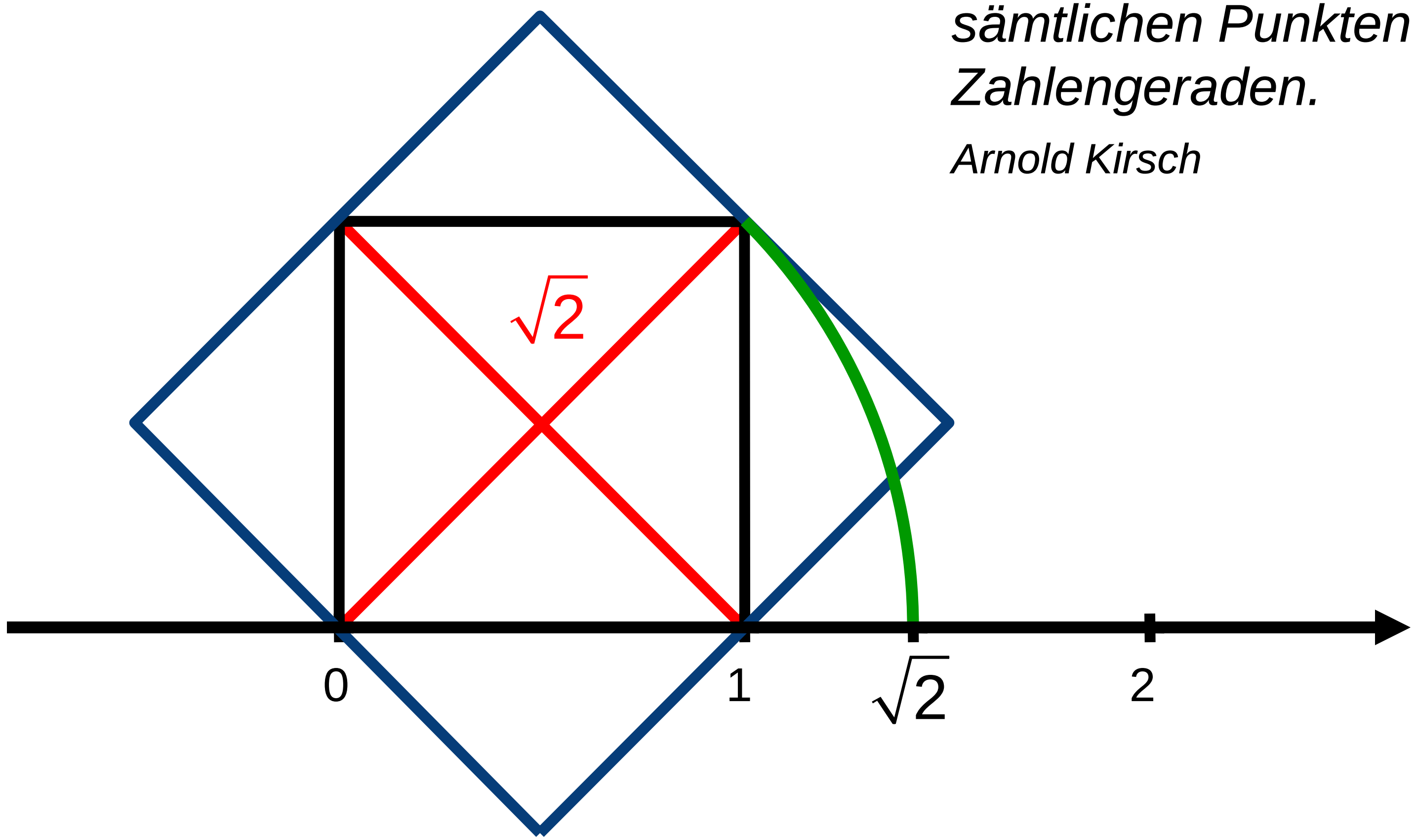


Inkommen-
surabilität

Einführung reeller Zahlen

Arnold Kirsch: Mathematik wirklich verstehen. Aulis Verlag Deubner, Köln, 1997, S. 90

- Die Einführung der reellen Zahlen lässt sich nicht aus praktischen Messaufgaben rechtfertigen. In realen Situationen, insbesondere bei Messungen, treten irrationale Zahlen niemals direkt auf.
- Die Entscheidung, ob eine Maßzahl oder eine Gleichungslösung rational ist oder nicht, kann nicht experimentell-empirisch erfolgen, auch nicht durch Ausrechnen mittels Computer, sondern nur mittels theoretischer Argumentation.
- Der Übergang von den rationalen zu den reellen Zahlen ist eine aus theoretischen Gründen zweckmäßige Erweiterung des Zahlbe-reichs. Durch sie wird gesichert, dass für gewisse geometrische und algebraische Probleme (wie etwa die Bestimmung der Diago-nalenlänge eines Quadrats oder des Kreisumfangs) anschaulich vorhandene Lösungen auch in der Theorie als wohlbestimmte Objekte existieren.



Die reellen Zahlen entsprechen eineindeutig den sämtlichen Punkten der Zahlengeraden.

Arnold Kirsch

Existenz irrationaler Zahlen

Definition

Eine reelle Zahl x heißt

- **rational**, wenn sie sich in der Form $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ schreiben lässt,
- andernfalls **irrational**.

Satz:

- Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.

Beweis (Widerspruchsbeweis):

„Wenn $x^2 = 2$ ist, dann gilt für alle Lösungen x dieser Gleichung $x \notin \mathbb{Q}$.“

Annahme: $p(x) \wedge \neg q(x)$

$\Rightarrow$ Es gibt o. B. d. A. einen Bruch $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ für den gilt: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$

$\Rightarrow$ $m^2 = 2n^2$

$\Rightarrow$ $m \cdot m = 2 \cdot n \cdot n$

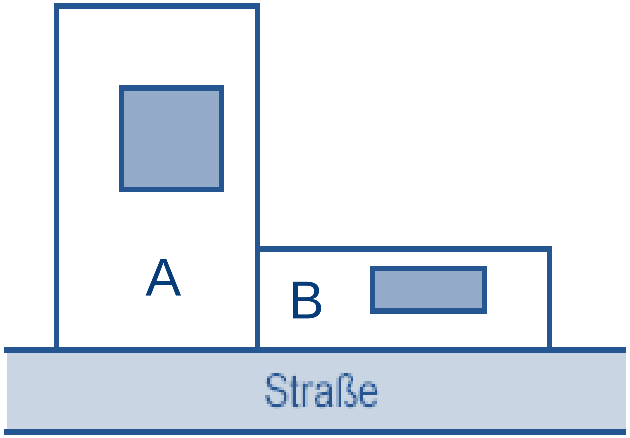
In der Primfaktorzerlegung von $m \cdot m$ tritt die Zahl 2 in einer geraden Anzahl auf, in der von $2 \cdot n \cdot n$ tritt die Zahl 2 dagegen in einer ungeraden Anzahl auf .

Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung!

$\Rightarrow$ Es kann keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$ geben. #

Heron-Verfahren (Wurzelberechnung)

- **Berechnungsgrundlage für Straßenreinigungsgebühren:**
  - An die Straße grenzende Grundstückslänge (**Frontmetermaßstab**).
  - Der Eigentümer von Grundstück B muss mehr bezahlen als der von Grundstück A, obwohl Grundstück A größer ist.
  - Gemeinderat: Für ein größeres Grundstück mehr zahlen.
- **Lösung: Quadratwurzelmaßstab als Bemessungsgrundlage**
  - Straßenreinigungsgebühren werden aus der Seitenlänge eines zum Grundstück flächeninhaltsgleichen Quadrats berechnet.
  - **Frage:** Wie findet man die Seitenlänge dieses Quadrats?



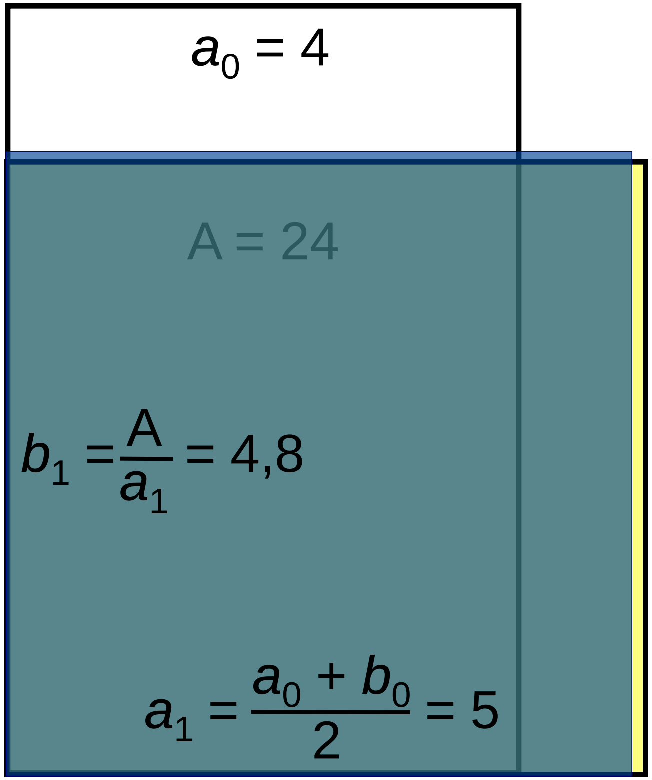
Gesucht: $\sqrt{A}$

Anfangswert: a_0

$$b_n = \frac{A}{a_n}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$b_0 = \frac{A}{a_0} = 6$$



$$b_1 = \frac{A}{a_1} = 4{,}8$$

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 5$$

Heron-Verfahren

Berechnung der Seitenlänge eines Quadrates der Fläche A
bzw. Berechnung der Quadratwurzel von A (Näherungsverfahren!)

Fläche A	Wurzel aus A
66,00	8,1240384046

n	a	b = A / a	| a - b |
1	3,00	22,0000000000	19,0000000000
2	12,5000000000	5,2800000000	7,2200000000
3	8,8900000000	7,4240719910	1,4659280090
4	8,1570359955	8,0911742987	0,0658616968
5	8,1241051471	8,1239716627	0,0001334843
6	8,1240384049	8,1240384044	0,0000000005
7	8,1240384046	8,1240384046	0,0000000000

Schnell konvergierende Intervallschachtelung.

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

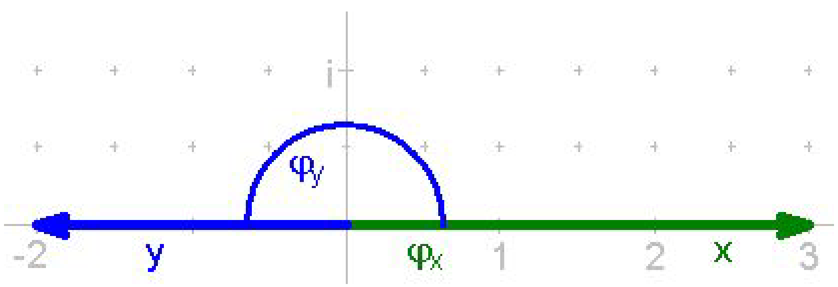
Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

Kapitel 6:
Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

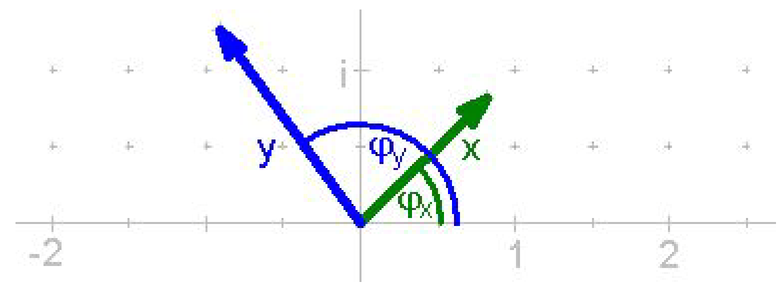
- **Vgl. hierzu folgenden Artikel:**
  - Jürgen Roth: Die Zahl i – phantastisch, praktisch, anschaulich. In: Mathematik lehren, Heft 121, Dezember 2003, S. 47-49
- **Komplexe Zahlen im Unterricht?**
  - Beim *Lösen von Gleichungen mit Computer-Algebra-Systemen* tauchen komplexe Zahlen auf – hierfür sollte man den Schülerinnen und Schülern eine befriedigende Erklärung anbieten.
  - Die nach dem Spiralprinzip angelegte Vermittlung der *Idee der Zahlbereichserweiterung beim Erreichen einer Grenze* des aktuellen Zahlbereichs wird unterstützt, wenn man beim Gleichungslösen und Wurzelziehen an Grenzen stößt und sich Gedanken über eine mögliche Zahlbereichserweiterung macht.
  - *Komplexe Zahlen sind praktisch*, weil sie die mathematische Aufarbeitung von vielen inner- und außermathematischen Problemen deutlich vereinfachen oder erst möglich machen.

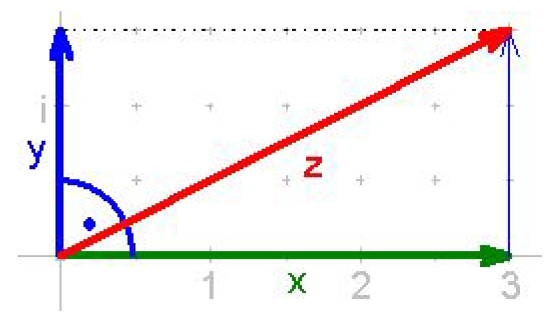
Gauß'schen Zahlenebene

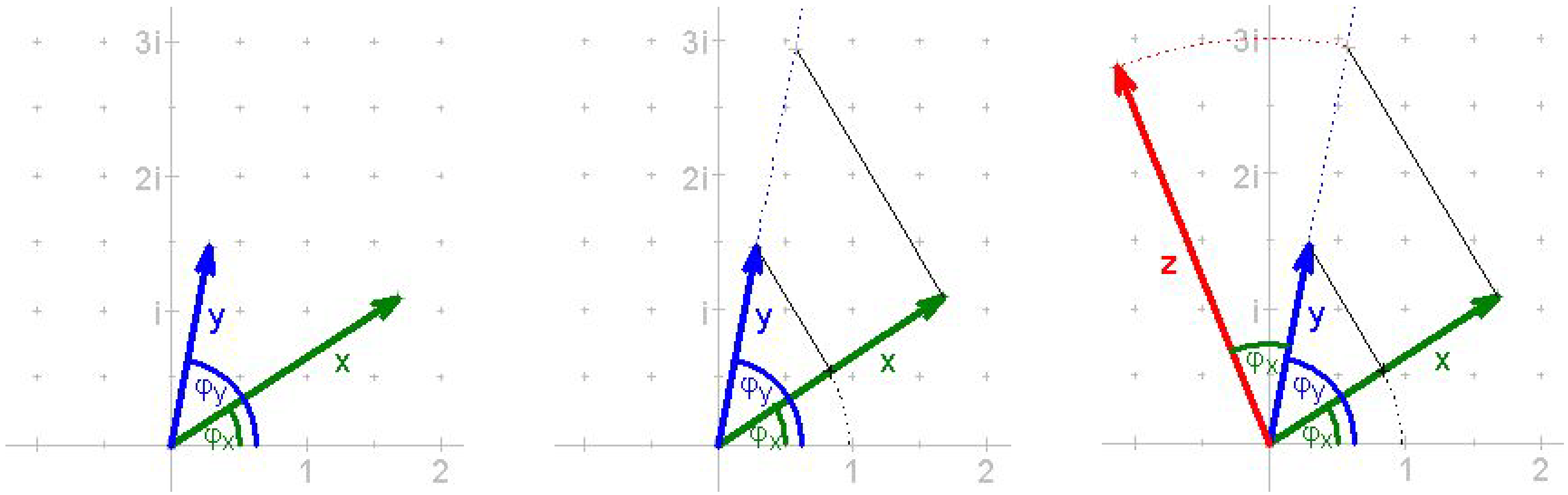
Die bekannte Deutung von Punkten der „Zahlengeraden“ als reelle Zahlen wird geometrisch erweitert auf die Punkte der Ebene, die als „komplexe Zahlen“ gedeutet werden. Komplexe Zahlen werden dabei durch Zeiger repräsentiert, die im Koordinatenursprung beginnen. Alle Zeiger $z = (r_z, \varphi_z)$ werden eindeutig festgelegt durch ihre Länge r_z und den Winkel φ_z, den sie mit der positiven reellen Achse einschließen.
Dabei ist r_z eine positive reelle Zahl und für φ_z gilt $0° \leq \varphi_z < 360°$.



– 2 = (2, 180°) **3 = (3, 0°)**

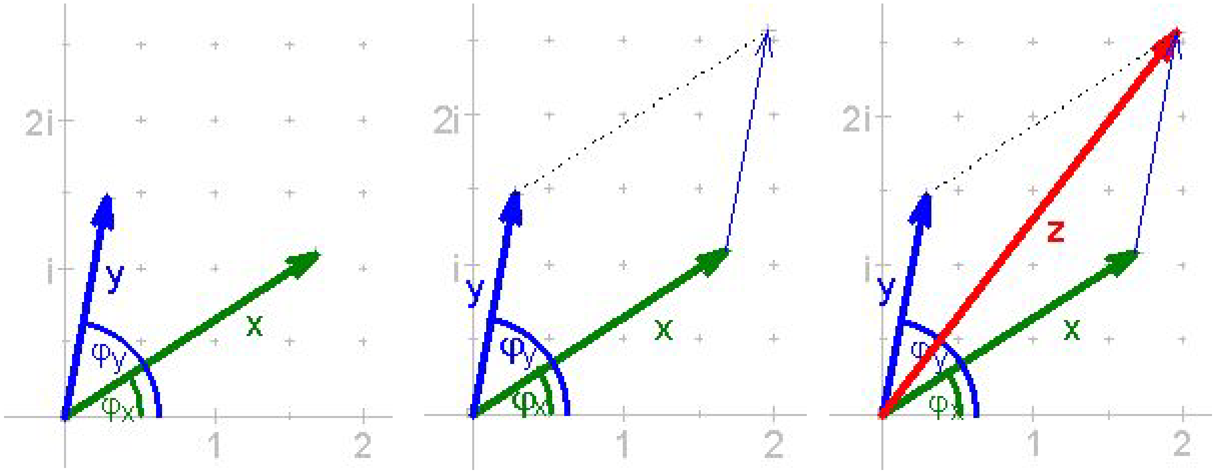




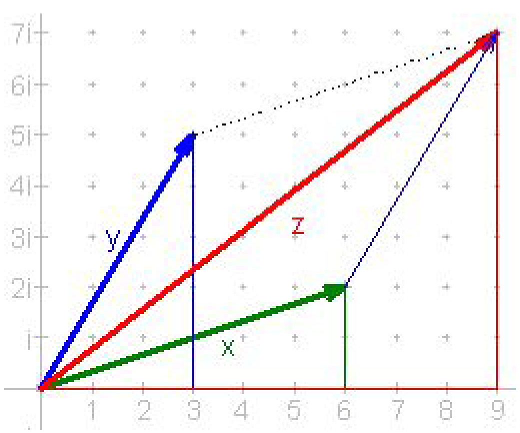


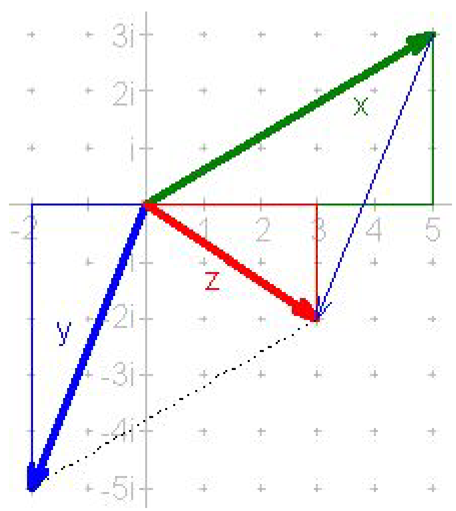
3i
2i
i
1
2
y
x
φy
φx
z

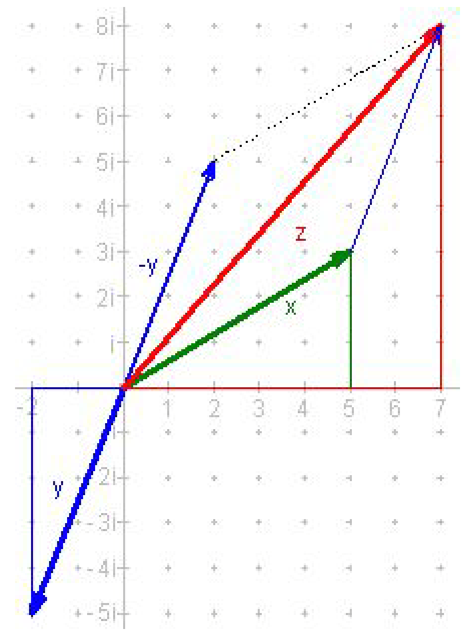
z = x + y



z = x + y







z = x – y = x + (– y)

Die Richtung der zweiten Koordinatenachse wird durch den Zeiger $(1, 90°)$ festgelegt. Da er offensichtlich eine herausragende Bedeutung in unserem Zahlenbereich hat, geben wir ihm einen eigenen Namen, nämlich i. (In den bisherigen Abbildungen der Koordinatensysteme wird dem bereits durch die Achsenbeschriftung Rechnung getragen.) Wenn man i mit sich selbst multipliziert, dann ergibt sich

$$i \otimes i = (1, 90°) \otimes (1, 90°) = (1 \cdot 1, 90° + 90°) = (1, 180°).$$

Dies ist ein Zeiger auf der reellen Achse, nämlich die reelle Zahl –1. In diesem „Zahlensystem" ist die Gleichung $x^2 = -1$ also lösbar!

z = a + bi

Mit der eben definierten Zeigeraddition kann jeder Zeiger z als Summe dargestellt werden aus einem auf der reellen Achse liegenden Zeiger x und einem auf der durch i festgelegten Achse (wir nennen sie i-Achse) liegenden Zeiger y. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} z = x \oplus y &= (r_x, 0°) \oplus (r_y, 90°) \\ &= (r_x, 0°) \oplus (r_y \cdot 1, 0° + 90°) \\ &= (r_x, 0°) \oplus (r_y, 0°) \otimes (1, 90°) \\ &= r_x \oplus r_y \otimes i \end{aligned}$$

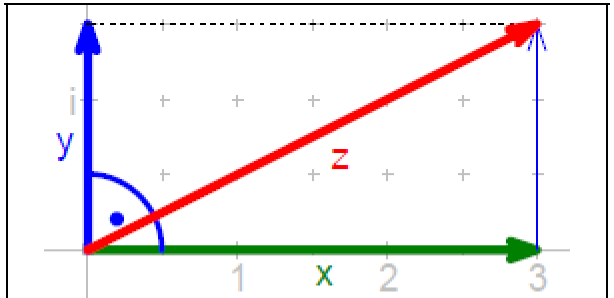


Abb. 8: Darstellung eines Zeigers als Summe eines reellen und eines i-Zeigers

Dabei sind r_x und r_y reelle Zahlen. Mit Hilfe dieser Überlegung lässt sich z. B. der Zeiger z in **Abbildung 8** schreiben als $z = 3 \oplus 1{,}5\,i$. In dieser Schreibweise kann das Ergebnis einer Zeigeraddition direkt abgelesen werden.

Aus diesen Grundlagen können alle üblichen Rechenregeln für Zahlen (die Körperaxiome) relativ einfach hergeleitet werden. Damit ist der Nachweis erbracht, dass es sich bei den neuen Gebilden wirklich um Zahlen im herkömmlichen Sinn handelt. Mit Ihnen kann man nun diverse Probleme in Angriff nehmen.