

Jürgen Roth

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

Modul 5: Fachdidaktische Bereiche



Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

- 1 Ziele und Inhalte
- 2 Natürliche Zahlen \mathbb{N}**
- 3 Ganze Zahlen \mathbb{Z}
- 4 Rationale Zahlen \mathbb{Q}
- 5 Reelle Zahlen \mathbb{R}
- 6 Komplexe Zahlen \mathbb{C}

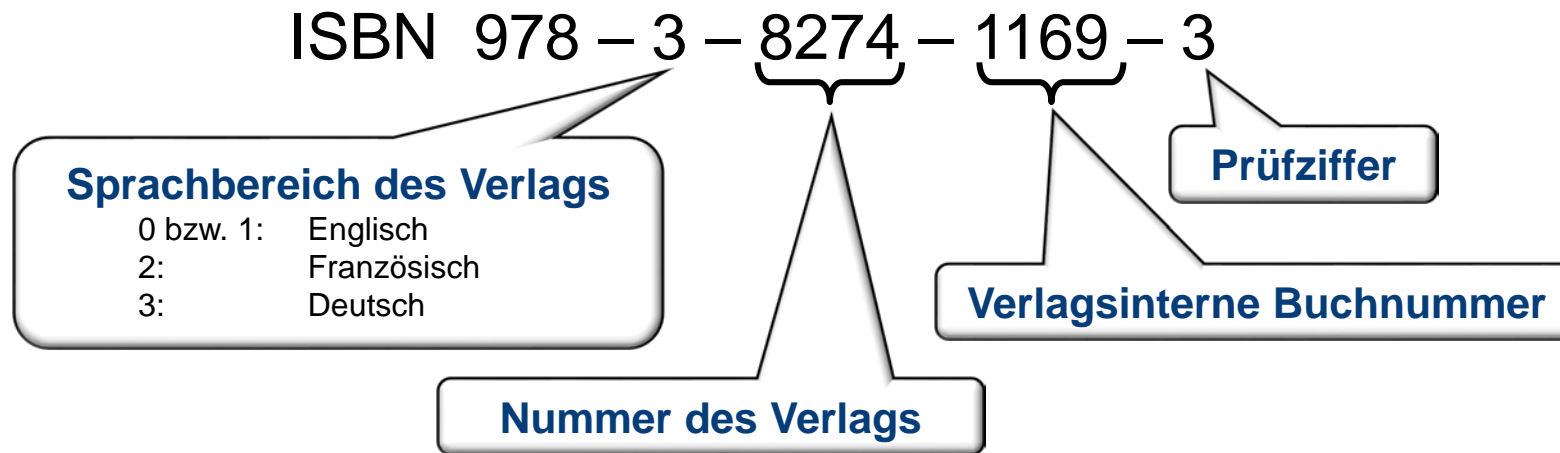


Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

Kapitel 2: Natürliche Zahlen \mathbb{N}



Zahlaspekt	Beschreibung	Beispiele	Addition	Subtraktion
Kardinalzahl	Mächtigkeit von Mengen, d. h. die Anzahl der Elemente.	3 Äpfel; 10^{13} Möglichkeiten	Mengenvereinigung	Restmengenbildung
Ordinalzahl	Zählzahl: Folge der beim Zählen durchlaufenden natürlichen Zahlen	eins, zwei, ..., fünf Studentinnen	Weiterzählen	Rückwärtszählen
	Ordnungszahl: Rangplatz eines Elements in total geordneter Reihe	Lisa wurde beim Wettlauf fünfte.		
Maßzahl	Natürliche Zahlen dienen als Maßzahlen für Größen (bzgl. einer Einheit)	3 Stunden; 4 <i>kg</i> ; 100 Schritte; ...	Addition / Subtraktion von Größen zurückführen auf Aneinandersetzen / Abtrennen von Repräsentanten.	
Operator	Bezeichnung der Vielfachheit einer Handlung / eines Vorgangs	Ich habe dir das jetzt schon fünfmal gesagt!	Operatoren verketteten	Umkehroperator aufsuchen
Rechenzahl	Algebraischer Aspekt: ($\mathbb{N}, +$) ist eine algebraische Struktur	$3 + 4 = 4 + 3$ (KG) $(6 + 7) + 3 = 6 + (7 + 3)$ (AG)	Rechnen mit Ziffern im Gegensatz zum Rechnen mit Zahlen beim halbschriftlichen Rechnen und Kopfrechnen.	
	Algorithmischer Aspekt: Schriftl. Rechenverfahren: Ziffernrechnen	$\begin{array}{r} 628 \\ + 563 \\ \hline 1191 \end{array}$		
Kodierung	Zahlen werden zur Bezeichnung von Objekten benutzt	76829 Landau ISBN 978-3-8274-1169-6		





▶ Eindeutigkeitsprinzip

- ▶ Jedem „Zähl Ding“ wird genau ein Zahlwort zugeordnet.

▶ Prinzip der stabilen Ordnung

- ▶ Zahlworte haben eine feste Reihenfolge.
- ▶ Kein Zahlwort darf ausgelassen werden.

▶ Kardinalzahlprinzip

- ▶ Die letzte Zahl beim Abzählen gibt die Anzahl der Elemente (die Mächtigkeit) der abgezählten Menge an.

▶ Abstraktionsprinzip



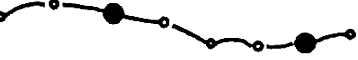
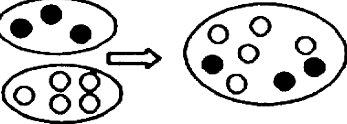

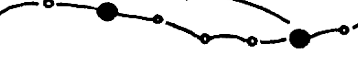
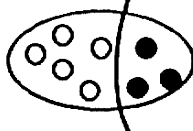
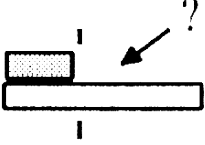

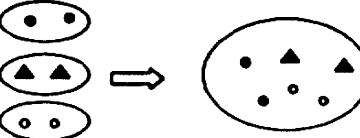


- ▶ Eine Menge von „Zähl Dingen“ kann aus Elementen mit sehr unterschiedlichen Merkmalen zusammengesetzt werden, die keinen nahe liegenden Bezüge aufweisen.

▶ Prinzip der beliebigen Reihenfolge

- ▶ Das Zählergebnis ist unabhängig von der Anordnung der zu zählenden Objekte.
- ▶ Zahlwörter sind keine Eigenschaft der zu zählenden Objekte.

Fördermaßnahmen?

Woran erkennt man Probleme mit einzelnen Zählprinzipien?

arithm. Komponenten \ Modell	Mengenmodell	Größenmodell (hier: Längenmodell)	Zählmodell
Repräsentanten	Mengen	Strecken, Stäbe, ..	Perlen einer offenen Kette Zahlwörter der Zählfolge
äquiv. Repräs.	gleichmächt. Mengen	gleichlange Strecken	
Hauptzahlaspekt	Kardinalzahl	Maßzahl	Ordinalzahl (Zählzahl)
Kleinerrelation	 "weniger"	 "kürzer"	 "vor"
Addition	 "Vereinigung disjunkter Mengen"	 "Streckenaddition"	 "weiterzählen"
Subtraktion	 "Restmengenbildung"	 "Abtrennen/Einfügen"	 "zurückzählen"
Multiplikation	 "Vereinigung disjunkter äquivalenter Mengen"	 "Streckenaddition kongruenter Strecken"	 "rhythmisches Zählen"

Radatz, Schipper: Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Schroedel, Hannover, 1983, S. 54 –61

▶ Vielfältige Zähl- und Schätzübungen

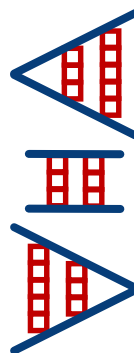
- ▷ Zählen mit Dingen und Darstellungen
- ▷ Zählübungen mit abstrakten Mengen
- ▷ Rhythmisches Zählen und Zählverse
- ▷ Zahlen mit allen Sinnen wahrnehmen

▶ Zahlen zerlegen und vergleichen

- ▷ Mächtigkeitsvergleiche
- ▷ Quasi-simultane Zahlauffassung
- ▷ Zahlen zerlegen

▶ Relationen zwischen Zahlen

- ▷ ist kleiner als, ist gleich, ist größer als
- ▷ liegt zwischen
- ▷ Zahlen der Größe nach ordnen



▶ Ziffern richtig lesen und schreiben

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

▶ Fragestellungen zur Einführung der Null

- ▷ Wie viele Personen sind in der Klasse?

Mädchen	Jungen	Lehrerinnen	Lehrer
12	9	1	0

- ▷ Wie viele Geschwister hast du?

Anzahl der Geschwister	0	1	2	3	4
Anzahl der Schüler/innen	7	6	5	0	1

▶ Aufgabenreihen zur Null

5 + 5	5 - 5	5 - 5	1 - 0	0 + 1	5 + 5 - 0
5 + 4	5 - 4	4 - 4	2 - 0	0 + 2	5 + 4 - 0
5 + 3	5 - 3	3 - 3	3 - 0	0 + 3	5 + 3 - 0
5 + 2	5 - 2	2 - 2	4 - 0	0 + 4	5 + 2 - 0
5 + 1	5 - 1	1 - 1	5 - 0	0 + 5	5 + 1 - 0
5 + 0	5 - 0	0 - 0	6 - 0	0 + 6	5 + 0 - 0

KMK: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). Luchterhand, München, 2005

Jahrgangsstufe 1	Jahrgangsstufe 2	Jahrgangsstufe 3	Jahrgangsstufe 4
Lebenswelt im Hinblick auf Mengen und Zahlen erkunden & untersuchen			
Zahlen bis 20 erfassen und darstellen	Zahlen bis 100 erfassen und darstellen	Zahlen bis 1.000 erfassen darstellen	Zahlen bis 1.000.000 erfassen und darstellen
Zahlen bis 20 zerlegen			
Zahlen und Rechenausdrücke bis 20 vergleichen und ordnen	Zahlen und Rechenausdrücke bis 100 vergleichen und ordnen	Zahlen und Rechenausdrücke bis 1.000 vergleichen und ordnen	Zahlen und Rechenausdrücke bis 1.000.000 vergleichen und ordnen

eins

I

fünf

V

zehn

X

fünfzig

L

hundert

C

fünfhundert


D

tausend


M

alternierende Fünfer-Zweier-Bündelung

Heutige Regeln (international vereinbart)

- (1) Von links nach rechts werden zunächst ggf. die Tausender, dann ggf. die Hunderter, danach ggf. die Zehner und schließlich ggf. die Einer notiert. 
- (2) Die Zahlenwerte kleinerer Zahlzeichen die rechts von einem größeren stehen, werden zum Wert des größeren addiert.
- (3) Ein Zeichen I, X oder C darf von dem jeweils Fünf- oder Zehnfachen abgezogen werden. Man notiert das abzuziehende Zeichen dann unmittelbar links vor dem zu vermindernenden.
- (4) Unter Beachtung der ersten drei Regeln müssen möglichst wenige Zeichen geschrieben werden.

Regeln der Römerzeit bis zum Mittelalter

- (1) Von links nach rechts werden zunächst ggf. die Tausender, dann ggf. die Hunderter, danach ggf. die Zehner und schließlich ggf. die Einer notiert. 
- (2) Kein Zeichen darf so oft vorkommen, dass die untereinander gleichen Zeichen in ein höherwertiges umgetauscht werden könnten.
- (3) Abweichend von Regel 1 darf unmittelbar links vor dem ersten Zeichen der selben Sorte (höchstens) ein weniger wertiges Zeichen stehen. Der kleinere Wert ist dann von dem größeren abzuziehen.

Beispiel: 99 = XCIX (heute) = LXXXVIII = IC

Römische Zahlschrift **MMMDCCLXXXVIII**

Dezimales Stellenwertsystem **3888**

Alternierende Fünfer-Zweier-Bündelung

Reine Zehnerbündelung

Jede Ziffer gibt auch die Bündelungseinheit an.

Stellung der Ziffer gibt Bündelungseinheit an.

Jede Ziffer hat einen festen Wert (geringfügige Ausnahme: Regel 3), unabhängig von ihrer Stellung im Zahlwort.

Der Wert einer Ziffer hängt von ihrer Stellung innerhalb des Zahlwortes ab (Stellenwert).

Jede Ziffer übermittelt nur eine Information, nämlich ihren Zahlenwert.

Jede Ziffer übermittelt zwei Informationen, nämlich ihren Zahlen- und ihren Stellenwert.

Den Zahlenwert eines mehrstelligen Zahlwortes erhält man im wesentlichen durch Addition, daher ist eine Ziffer 0 in diesem Zusammenhang nicht erforderlich.

Zahlenwert eines mehrstelligen Zahlwortes durch Kombination aus Multiplikation und Addition. Nicht besetzte Stellen innerhalb eines Zahlwortes müssen kenntlich gemacht werden. ⇨ Ziffer 0 erforderlich.

Für größere (und kleinere) Zahlen werden ständig weitere Zeichen benötigt.

Für beliebig große (und kleine) Zahlen kommt man mit zehn Ziffern aus.

Die Zahlwörter sind relativ lang und kompliziert zu lesen.

Die Zahlwörter sind relativ kurz und einfach zu lesen.

Schriftliche Rechenverfahren (besonders die Multiplikation und die Division) sind äußerst kompliziert und langwierig.

Schriftliche Rechenverfahren können rasch, elegant und weitgehend unkompliziert durchgeführt werden.

Basis	Eins	Zwei	Drei	Vier	Fünf	Sechs	Sieben	Acht	Neun	Zehn
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11
8	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12
7	1	2	3	4	5	6	10	11	12	13
6	1	2	3	4	5	10	11	12	13	14
5	1	2	3	4	10	11	12	13	14	20
4	1	2	3	10	11	12	13	20	21	22
3	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101
2	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

Zentrale Begriffe: Bündelung
 Stellenwert

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

8**9****10****11****12****13****14****15****24****25****26****27****28****29****30****31****40****41****42****43****44****45****46****47****56****57****58****59****60****61****62****63**

4

5

6

7

12

13

14

15

20

21

22

23

28

29

30

31

36

37

38

39

44

45

46

47

52

53

54

55

60

61

62

63

2

3

6

7

10

11

14

15

18

19

22

23

26

27

30

31

34

35

38

39

42

43

46

47

50

51

54

55

58

59

62

63

1

3

5

7

9

11

13

15

17

19

21

23

25

27

29

31

33

35

37

39

41

43

45

47

49

51

53

55

57

59

61

63

	32_{10}	16_{10}	8_{10}	4_{10}	2_{10}	1_{10}
1_{10}						1
2_{10}					1	0
3_{10}					1	1
4_{10}				1	0	0
5_{10}				1	0	1
6_{10}				1	1	0
7_{10}				1	1	1
8_{10}			1	0	0	0
9_{10}			1	0	0	1
10_{10}			1	0	1	0
11_{10}			1	0	1	1
12_{10}			1	1	0	0

	32_{10}	16_{10}	8_{10}	4_{10}	2_{10}	1_{10}
13_{10}			1	1	0	1
14_{10}			1	1	1	0
15_{10}			1	1	1	1
16_{10}		1	0	0	0	0
17_{10}		1	0	0	0	1
18_{10}		1	0	0	1	0
19_{10}		1	0	0	1	1
20_{10}		1	0	1	0	0
21_{10}		1	0	1	0	1
22_{10}		1	0	1	1	0
23_{10}		1	0	1	1	1
24_{10}		1	1	0	0	0

	32_{10}	16_{10}	8_{10}	4_{10}	2_{10}	1_{10}
25_{10}		1	1	0	0	1
26_{10}		1	1	0	1	0
27_{10}		1	1	0	1	1
28_{10}		1	1	1	0	0
29_{10}		1	1	1	0	1
30_{10}		1	1	1	1	0
31_{10}		1	1	1	1	1
32_{10}	1	0	0	0	0	0
33_{10}	1	0	0	0	0	1
34_{10}	1	0	0	0	1	0
35_{10}	1	0	0	0	1	1
36_{10}	1	0	0	1	0	0

	32_{10}	16_{10}	8_{10}	4_{10}	2_{10}	1_{10}
37_{10}	1	0	0	1	0	1
38_{10}	1	0	0	1	1	0
39_{10}	1	0	0	1	1	1
40_{10}	1	0	1	0	0	0
41_{10}	1	0	1	0	0	1
42_{10}	1	0	1	0	1	0
43_{10}	1	0	1	0	1	1
44_{10}	1	0	1	1	0	0
45_{10}	1	0	1	1	0	1
46_{10}	1	0	1	1	1	0
47_{10}	1	0	1	1	1	1
48_{10}	1	1	0	0	0	0

	32_{10}	16_{10}	8_{10}	4_{10}	2_{10}	1_{10}
49_{10}	1	1	0	0	0	1
50_{10}	1	1	0	0	1	0
51_{10}	1	1	0	0	1	1
52_{10}	1	1	0	1	0	0
53_{10}	1	1	0	1	0	1
54_{10}	1	1	0	1	1	0
55_{10}	1	1	0	1	1	1
56_{10}	1	1	1	0	0	0
57_{10}	1	1	1	0	0	1
58_{10}	1	1	1	0	1	0
59_{10}	1	1	1	0	1	1
60_{10}	1	1	1	1	0	0


	32_{10}	16_{10}	8_{10}	4_{10}	2_{10}	1_{10}
61_{10}	1	1	1	1	0	1
62_{10}	1	1	1	1	1	0
63_{10}	1	1	1	1	1	1


Vierundsechziger	Sechzehner	Vierer	Einer
V^3	V^2	V	E
	1	2	3
	3 ₁	2 ₁	1
1	1	1	0

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 2 \quad 3_4 \\
 + 3_1 \quad 2_1 \quad 1_4 \\
 \hline
 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0_4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 2 \quad 3_4 \quad \cdot \quad 3 \quad 2 \quad 1_4 \\
 \hline
 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1_4 \\
 \quad 3 \quad 1 \quad 2_4 \\
 \quad 1 \quad 2 \quad 3_4 \\
 \hline
 1539_{10} = 1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3_4 \\
 \phantom{1539_{10} =} \quad 1024_{10} \quad 256_{10} \quad 64_{10} \quad 16_{10} \quad 4_{10} \quad 1_{10}
 \end{array}$$

Übertragungstechniken Verfahren	Entbündeln	Erweitern	Auffüllen
Abziehen	+	+	-
Ergänzen	+	+	+

 Früher die einzigen von der KMK zugelassenen Verfahren.

 Heute vielfach bevorzugtes Verfahren. (International schon sehr lange!)





Subtraktion:

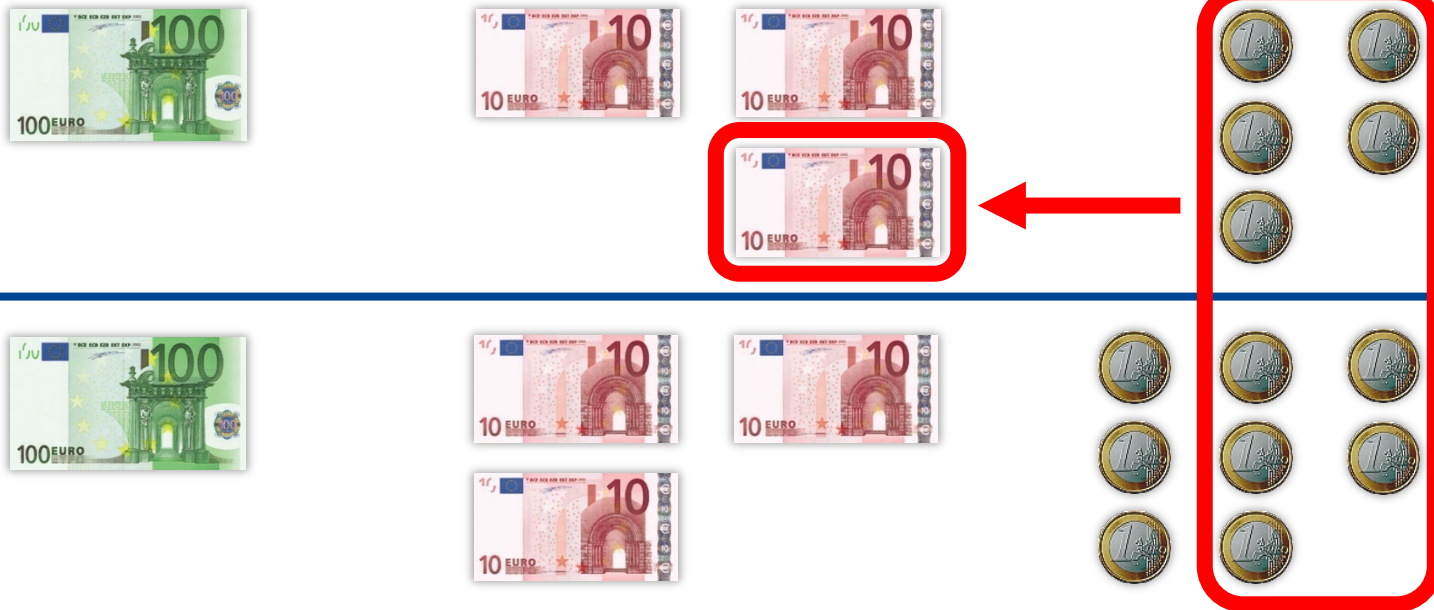
$$\begin{array}{r} 263 \\ -125 \\ \hline \square \end{array}$$

Umdeutung
als Addition:

$$\begin{array}{r} 263 \\ +125 \\ \hline \square \end{array}$$

Kurz:

$$\begin{array}{r} 263 \\ -125 \\ \hline 138 \end{array}$$





Ausführlich:

$$\begin{array}{r} 263^{10} \\ - 125 \\ \hline 138 \end{array}$$



Kurz:

$$\begin{array}{r} 263 \\ - 125 \\ \hline 138 \end{array}$$





Ausführlich:

$$\begin{array}{r}
 203 \\
 -125 \\
 \hline
 138
 \end{array}$$

5 10



Kurz:

$$\begin{array}{r}
 203 \\
 -125 \\
 \hline
 138
 \end{array}$$



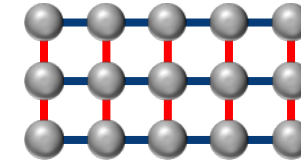


<http://www.juergen-roth.de/dynageo/distributivgesetz/>

► Kommutativgesetz

Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a \cdot b = b \cdot a$$



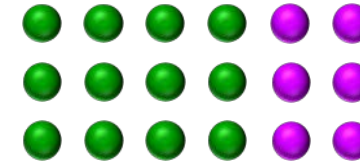
$$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$$

► Distributivgesetz

Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1) a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(2) (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

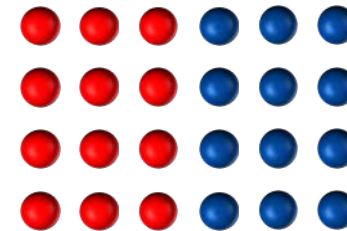


$$3 \cdot (4 + 2) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2$$

► Assoziativgesetz

Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$



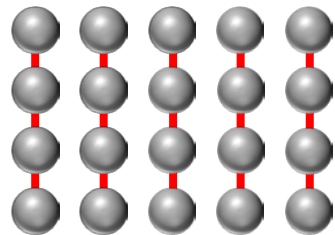
$$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4)$$

- ▶ Die Division ist weder kommutativ noch assoziativ!

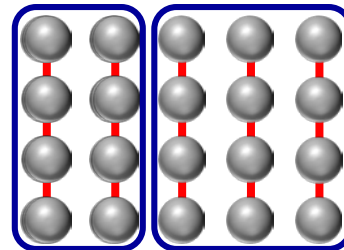
- ▶ **Distributivgesetz** (Es existiert nur eines!)

Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0$ und $c \in \mathbb{N}$ gilt:

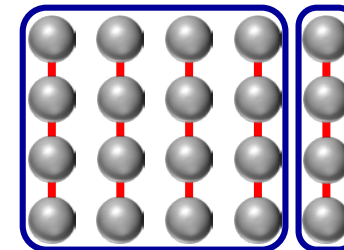
$$(a + b) : c = a : c + b : c$$



$$20 : 4$$



$$8 : 4 + 12 : 4$$



$$16 : 4 + 4 : 4$$

- ▶ Die Rechengesetze für Addition und Subtraktion können analog veranschaulicht werden.

► Division

- ▷ in \mathbb{N} nicht immer durchführbar.

► Teilerrelation $b|c$

- ▷ b ist genau dann Teiler von c , wenn es ein $a \in \mathbb{N}$ gibt mit $a \cdot b = c$.

► Teilbarkeitsregeln

Eine Zahl ist durch ...

Endziffern-
Test

- ▷ **10** teilbar, wenn die *letzte Ziffer* eine Null ist.
- ▷ **5** teilbar, wenn die *letzte Ziffer* eine 5 oder 0 ist.
- ▷ **2** teilbar, wenn die *letzte Ziffer* durch 2 teilbar ist.

Endziffern-
Test

- ▷ **4** teilbar, wenn die aus den *letzten beiden Ziffern* gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.
- ▷ **8** teilbar, wenn die aus den *letzten drei Ziffern* gebildete Zahl durch 8 teilbar ist.
- ▷ **3** teilbar, wenn die *Quersumme* durch 3 teilbar ist.
- ▷ **9** teilbar, wenn die *Quersumme* durch 9 teilbar ist.
- ▷ **6** teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.
- ▷ **11** teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

Quersummen-
Test

