UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

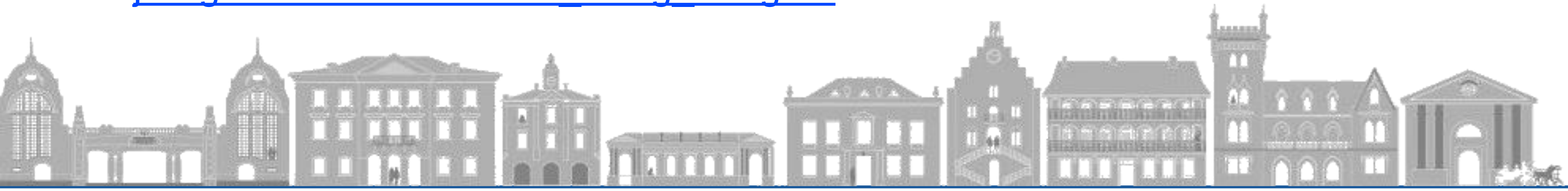
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)

Jürgen Roth

Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie

Modul 12a: Fachdidaktische Bereiche

juergen-roth.de/lehre/did_linalg_anageo/



Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie

Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie

Kapitel 3: Modellieren und Angewandte Mathematik

Warum Modellieren und Angewandte Mathematik?

- **Zielrichtungen**
  - Die Frage nach dem „Warum?“ wird von Anfang an thematisiert.
  - Begriffe, Verfahren und Strukturen
    - an konkreten Beispielen erarbeiten
    - als Grundlage von Problemlösungen
    - in vielfältigen Anwendungsbereichen einsetzen

Beispiel: Marktforschung

- **Fernsehzeitschriften**
  - Ein Marktforschungsinstitut wird von einem Verlag beauftragt, das Kaufverhalten der Kunden von Fernsehzeitschriften zu untersuchen.
  - Ziel: Argumente für Marketingentscheidungen liefern.

- **Modellannahmen**
  - Es gibt zwei Zeitschriften Gong (G) und Hörzu (H).

  - Die Gesamtzahl der Kunden bleibt konstant.
  - Der Marktmechanismus ändert sich nicht.

Beispiel: Marktforschung

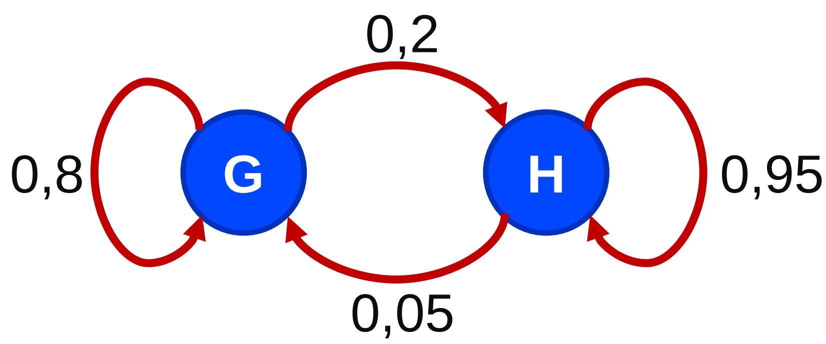
- **Daten über Umfragen**
  - Zeitschrift Gong (G) hat 20.000 Kunden
  - Zeitschrift Hörzu (H) hat 30.000 Kunden
  - pro Woche wechseln 20% der Gong-Kunden zu Hörzu (H)
  - pro Woche wechseln 5% der Hörzu-Kunden zu Gong (G)

- **Wie entwickeln sich die Kundenzahlen?**
  - Kaufen irgendwann alle die Zeitschrift Hörzu (H)?
  - Oszillieren die Kundenzahlen?
  - Stellt sich ein Gleichgewicht ein?

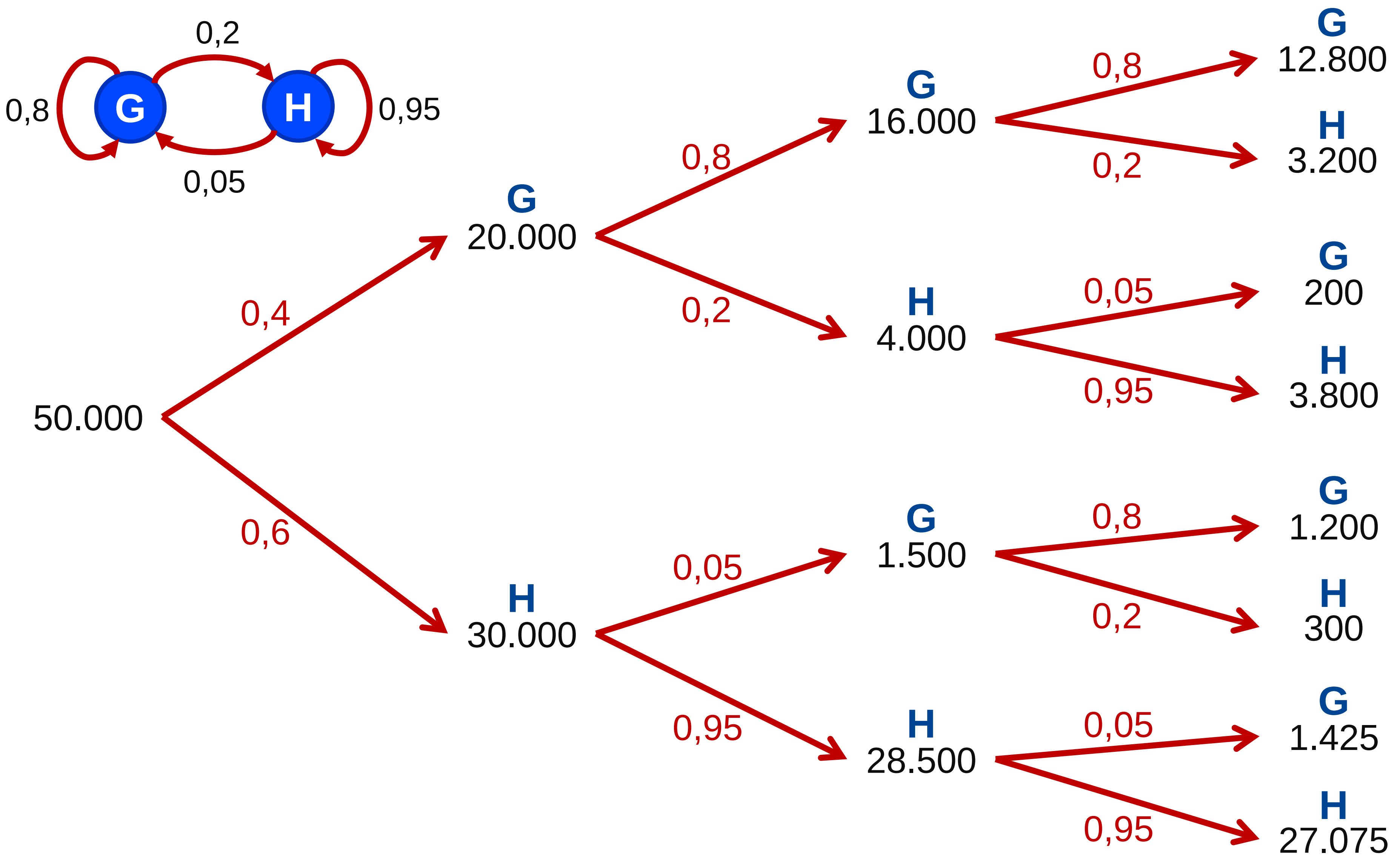
- **Übergangstabelle**

	von G	von H
nach G	0,8	0,05
nach H	0,2	0,95

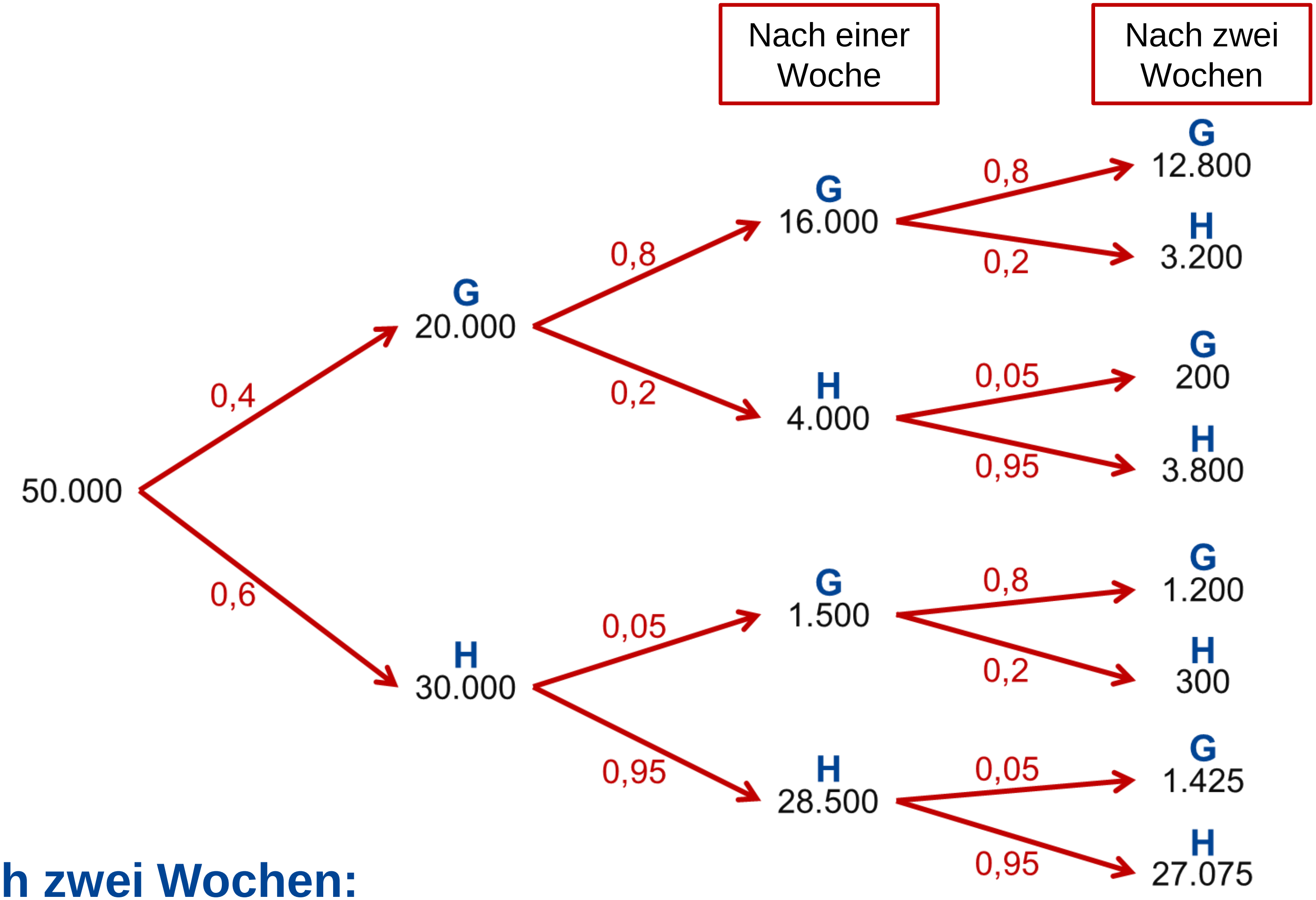
- **Übergangsgraph**



Baumdiagramm



Entwicklung der Käuferzahlen



- **Nach zwei Wochen:**

Leser G: 12.800 + 200 + 1.200 + 1.425 = 15.625

Leser H: 3.200 + 3.800 + 300 + 27.075 = 34.375

Entwicklung der Käuferzahlen

- **Aufgabe**
  - Untersuchen Sie die Entwicklung der der Käuferzahlen über einen Zeitraum von …
    - … 10 Wochen.
    - … 100 Wochen.
  - Ein Tabellenkalkulations-programm kann helfen…

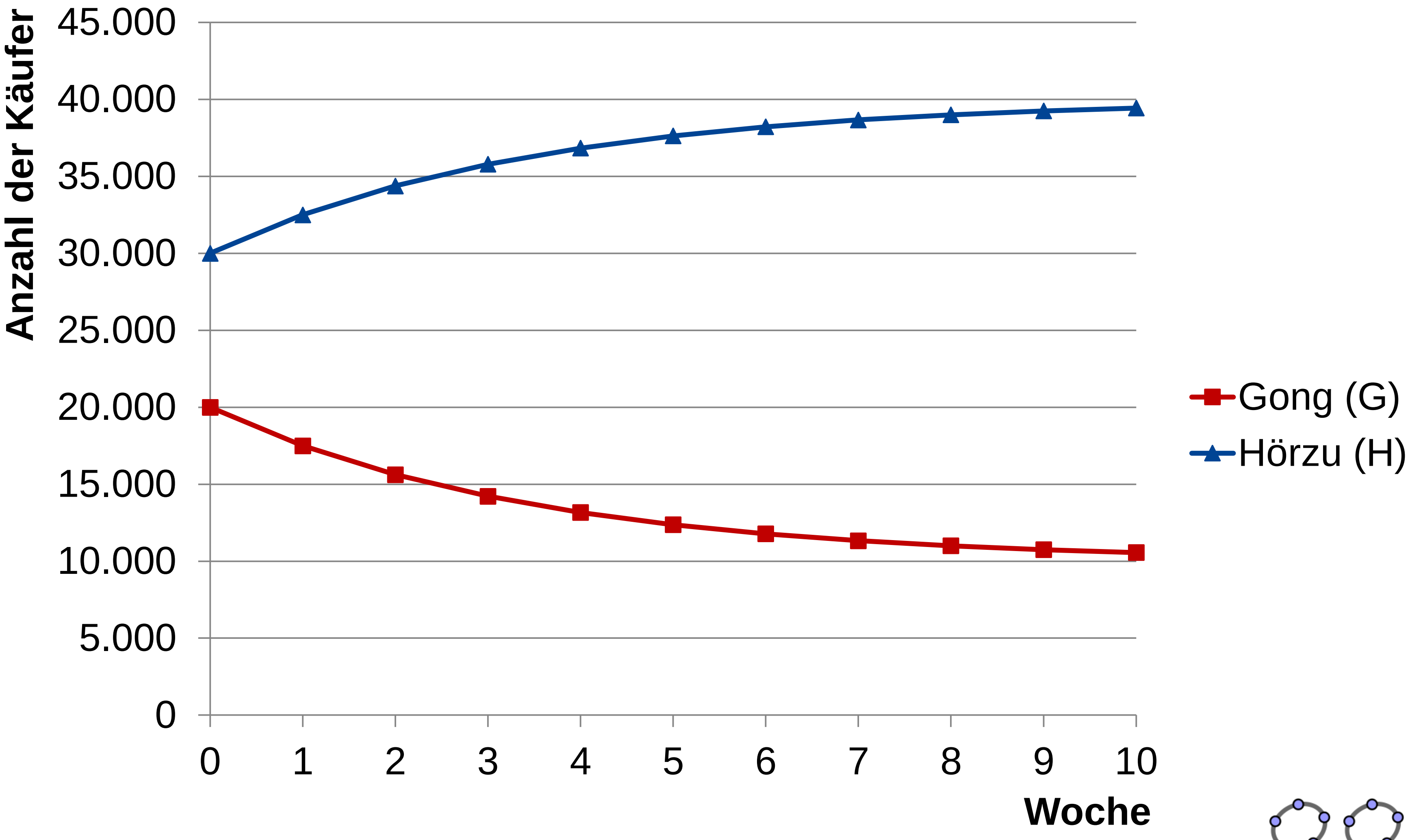
	A	B	C
1	G -> H	0,2	
2	H -> G	0,05	
3			
4	Woche	G	H
5	0	20.000	30.000
6	1	17.500	32.500
7	2		
8	3		
9	4		
10	5		
11	6		
12	7		
13	8		
14	9		
15	10		

= B5 * (1 - B1) + C5 * B2

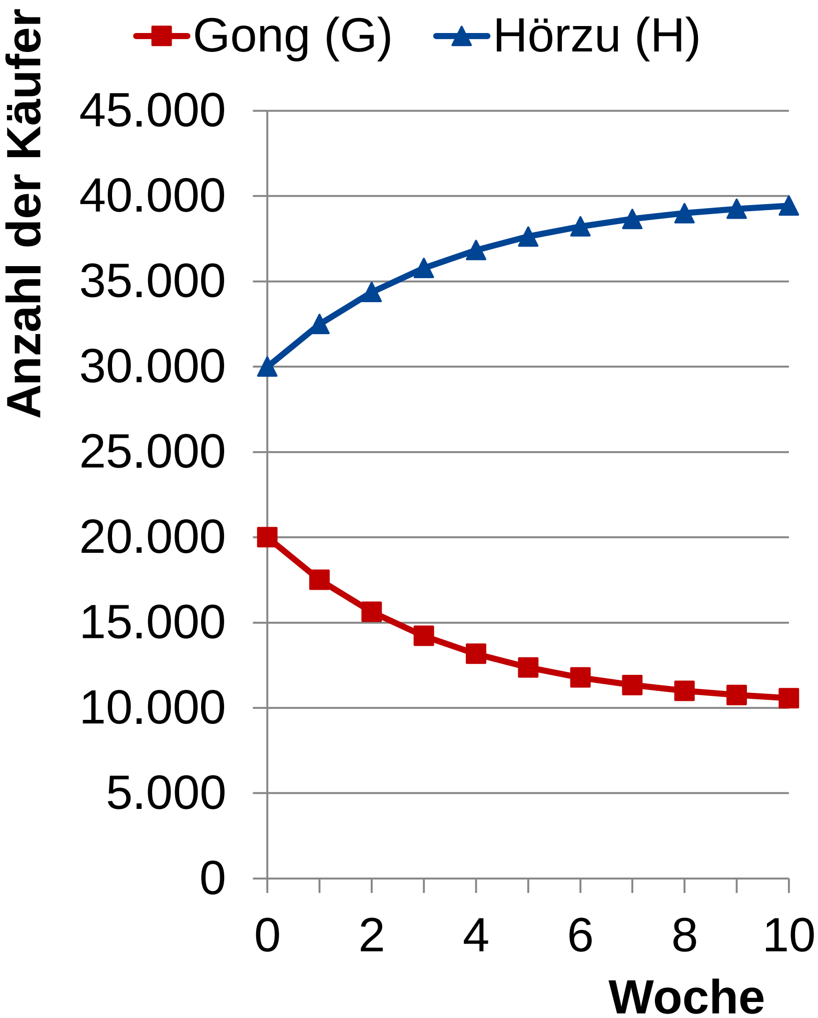
= B5 * B1 + C5 * (1 - B2)

Herunter-ziehen

Entwicklung der Käuferzahlen



Entwicklung der Käuferzahlen



- **Erkenntnis**
  - Die Käuferzahlen von Gong sinken und die von Hörzu steigen.
- **Fragen**
  - Halten diese Tendenzen an?
  - Hat Gong irgendwann keine Käufer mehr?
  - Was passiert, wenn Gong zu Beginn mehr bzw. noch weniger Kunden hat?
- **Vorgehensweise**
  - Vorhersagen machen und festhalten lassen.
  - Testen! (Schieberegler!)

Schematisierung

- **Käuferzahlen nach einer Woche**
  - G_1: $0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000$
  - H_1: $0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000$

- **Käuferzahlen nach einer Woche**
  - G_1: $0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000$
  - H_1: $0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000$

- **Übergangstabelle**

	von G	von H
nach G	0,8	0,05
nach H	0,2	0,95

- **Tabelle der Ausgangswerte**

G_0	20.000
H_0	30.000

- **Übergangsmatrix**

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

- **Vektor der Ausgangswerte**

$$\begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$$

- **Berechnung der Käuferzahl nach einer Woche**
  - G_1: $0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000$
  - H_1: $0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$$

Schematisierung

- **Berechnung der Käuferzahl nach einer Woche**
  - G_1: $0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000$
  - H_1: $0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 \\ \end{pmatrix}$$

Schematisierung

- **Berechnung der Käuferzahl nach einer Woche**
  - G_1: $0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000$
  - H_1: $0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 \\ \end{pmatrix}$$

Schematisierung

- **Berechnung der Käuferzahl nach einer Woche**
  - G_1: $0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000$
  - H_1: $0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 \\ 0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000 \end{pmatrix}$$

Schematisierung

- **Berechnung der Käuferzahl nach einer Woche**
  - G_1: $0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 = 17.500$
  - H_1: $0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000 = 32.500$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}}_{\text{Übergangs-matrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}}_{\text{Ursprünglicher Kundenvektor}} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 20.000 + 0{,}05 \cdot 30.000 \\ 0{,}2 \cdot 20.000 + 0{,}95 \cdot 30.000 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 17.500 \\ 32.500 \end{pmatrix}}_{\text{Kundenvektor nach einer Woche}}$$

Schematisierung

Definition

- Ein rechteckiges Zahlenschema mit n Zeilen und m Spalten heißt **$(n \times m)$-Matrix**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Bemerkung

- Eine $(n \times 1)$-Matrix heißt auch **Spaltenvektor**.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

- Eine $(1 \times m)$-Matrix heißt auch **Zeilenvektor**.

$$(a_1 \dots a_m)$$

- Matrizen werden mit einem Großbuchstaben abgekürzt, Vektoren mit Kleinbuchstaben und einem Pfeil darüber.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Matrix A Vektor $\vec{a}$

Schematisierung

Im Beispiel

- Ursprünglicher Kundenvektor: $\overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$
- Übergangsmatrix: $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$
- Kundenvektor nach
  - einer Woche: $\overrightarrow{k_1} = A \cdot \overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.500 \\ 32.500 \end{pmatrix}$
  - zwei Wochen: $\overrightarrow{k_2} = A \cdot \overrightarrow{k_1} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{k_1}$
  - nach n Wochen: $\overrightarrow{k_n} = A \cdot \overrightarrow{k_{n-1}}$

Schematisierung

- **Definition**
  - Das Produkt einer (2×2)-Matrix mit einer (2×1)-Matrix (Spaltenvektor) wird definiert durch:

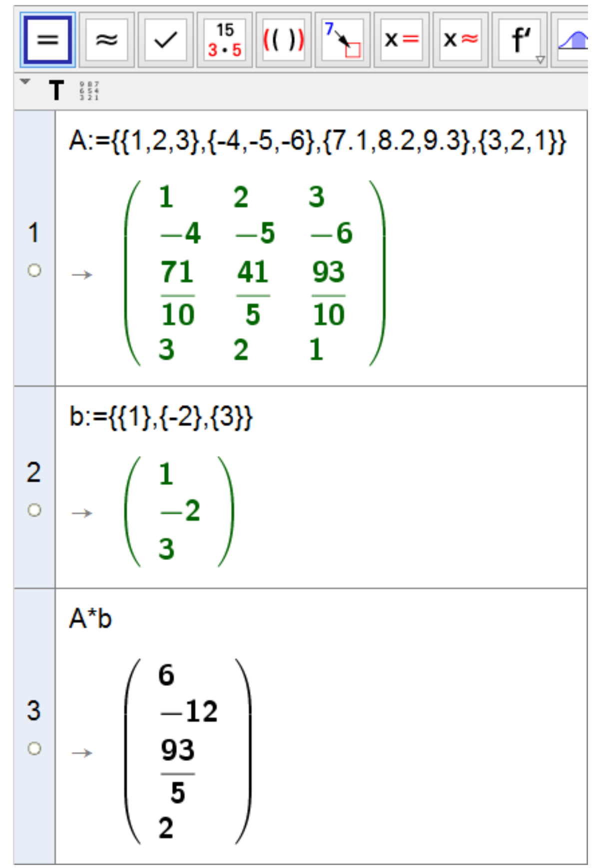
$$A \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} \cdot k_1 + a_{12} \cdot k_2 \\ a_{21} \cdot k_1 + a_{22} \cdot k_2 \end{pmatrix}$$

Exkurs: Matrizenrechnung mit GeoGebra

http://www.geogebra.org/wiki/de/CAS-Ansicht

Eingabe von Matrizen

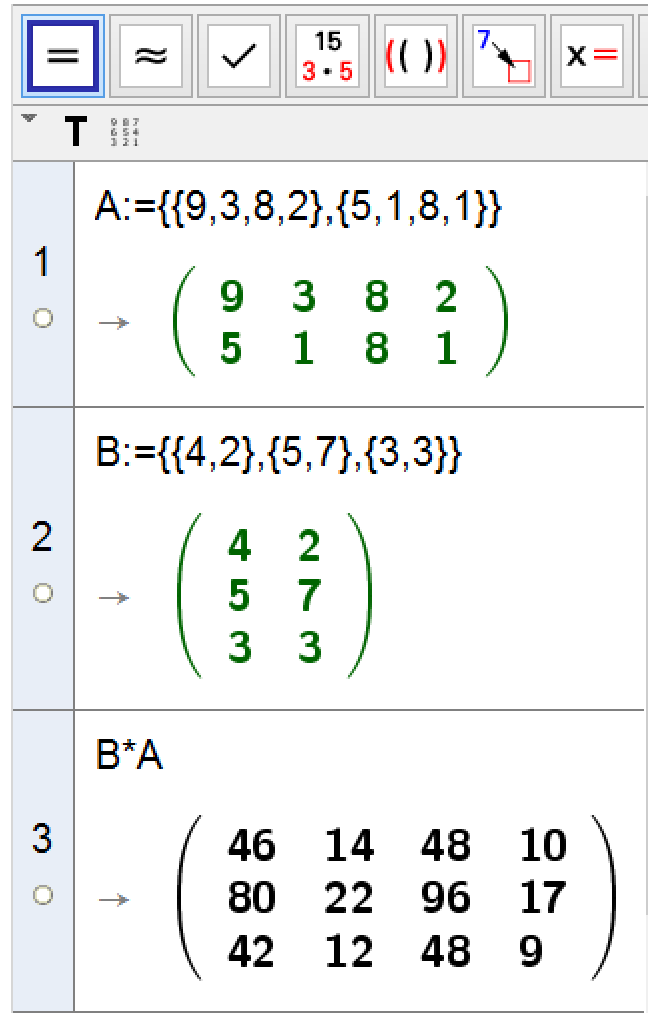
- Eingabe von
  $A := \{\{1,2,3\},\{-4,-5,-6\},\{7.1,8.2,9.3\},\{3,2,1\}\}$
  liefert nach Auswahl von $\boxed{=}$
  und ggf. drücken der Taste *Return* :
  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ \frac{71}{10} & \frac{41}{5} & \frac{93}{10} \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



- Eingabe von $b := \{\{1\},\{-2\},\{3\}\}$
  liefert nach Auswahl von $\boxed{=}$
  und ggf. drücken der Taste *Return* : $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exkurs: Matrizenrechnung mit GeoGebra

http://www.geogebra.org/wiki/de/CAS-Ansicht



Matrizen multiplizieren

- Eingabe von

  $A \coloneqq \{\{9,3,8,2\},\{5,1,8,1\}\}$

  $B \coloneqq \{\{4,2\},\{5,7\},\{3,3\}\}$

  $B * A$

  liefert nach Auswahl von [=]
  und ggf. drücken der Taste *Return*
  das Produkt $B \cdot A$ der Matrizen.

http://www.geogebra.org/wiki/de/CAS-Ansicht

Zeilenbezüge

- **Statische Bezüge**:
  Änderungen der Referenzzeile haben keine Auswirkungen
  - # kopiert die vorherige Ausgabe
  - #3 kopiert die Ausgabe von Zeile 3
- **Dynamische Bezüge**:
  Änderungen der Referenzzeile werden übernommen
  - $ fügt die vorherige Ausgabe ein
  - $3 fügt die Ausgabe von Zeile 3 ein

Entwicklung der Käuferzahl

http://www.geogebra.org/wiki/de/CAS-Ansicht

Berechnung der Käuferzahl mit GeoGebra

- Eingabe des ursprünglichen Kundenvektors $\overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} 20.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$
- Eingabe der Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$
- Berechnen des Kundenvektors nach einer Woche $\overrightarrow{k_1} = A \cdot \overrightarrow{k_0}$
- Berechnen des Kundenvektors nach zwei Wochen $\overrightarrow{k_2} = A \cdot \overrightarrow{k_1}$

1	k_0:={{20000},{30000}}	$\to \begin{pmatrix} 20000 \\ 30000 \end{pmatrix}$
2	A:={{0.8,0.05},{0.2,0.95}}	$\approx \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 \\ 0.2 & 0.95 \end{pmatrix}$
3	k_1:=A*k_0	$\to \begin{pmatrix} 17500 \\ 32500 \end{pmatrix}$
4	k_2:=A*k_1	$\to \begin{pmatrix} 15625 \\ 34375 \end{pmatrix}$

Entwicklung der Käuferzahl

http://www.geogebra.org/wiki/de/CAS-Ansicht

Berechnung der Käuferzahl mit GeoGebra

5	k_3:=A*k_2	$\approx \begin{pmatrix} 14218.75 \\ 35781.25 \end{pmatrix}$
6	k_4:=A*k_3	$\approx \begin{pmatrix} 13164.06 \\ 36835.94 \end{pmatrix}$
7	k_5:=A*k_4	$\approx \begin{pmatrix} 12373.05 \\ 37626.95 \end{pmatrix}$
8	k_6:=A*k_5	$\approx \begin{pmatrix} 11779.79 \\ 38220.21 \end{pmatrix}$
9	k_7:=A*k_6	$\approx \begin{pmatrix} 11334.84 \\ 38665.16 \end{pmatrix}$
10	k_8:=A*k_7	$\approx \begin{pmatrix} 11001.13 \\ 38998.87 \end{pmatrix}$
11	k_9:=A*k_8	$\approx \begin{pmatrix} 10750.85 \\ 39249.15 \end{pmatrix}$
12	k_10:=A*k_9	$\approx \begin{pmatrix} 10563.14 \\ 39436.86 \end{pmatrix}$
13	k_11:=A*k_10	$\approx \begin{pmatrix} 10422.35 \\ 39577.65 \end{pmatrix}$
14	k_12:=A*k_11	$\approx \begin{pmatrix} 10316.76 \\ 39683.24 \end{pmatrix}$
15	k_13:=A*k_12	$\approx \begin{pmatrix} 10237.57 \\ 39762.43 \end{pmatrix}$
16	k_14:=A*k_13	$\approx \begin{pmatrix} 10178.18 \\ 39821.82 \end{pmatrix}$

Eingabe von Matrizen

- Eingabe von

  $A\colon matrix([1,2,3],[-4,-5,-6],[7.1,8.2,9.3],[3,2,1]);$

  liefert nach drücken der Tasten *Shift* ⇧ + *Return* ↲

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 7.1 & 8.2 & 9.3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Eingabe von

  $b\colon matrix([1],[-2],[3]);$

  liefert nach drücken der Tasten *Shift* ⇧ + *Return* ↲

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exkurs: Matrizenrechnung mit Maxima

Achtung

- Befehlszeilen werden mit einem ***;*** abgeschlossen.
- Um Befehle Auszuführen muss immer die Tastenkombination ***Shift***  + ***Return***  gedrückt werden.
- Maxima merkt sich Wertbelegungen auch nach dem Löschen der entsprechenden Eingaben (z.B. A:matrix(…)).
  Um alle Werte zu löschen gibt man ***kill(all);*** ein oder wählt den Menübefehl „Maxima → Speicher löschen“.

Matrizen multiplizieren

- Eingabe von $A\colon matrix([9,3,8,2],[5,1,8,1]);$

  $B\colon matrix([4,2],[5,7],[3,3]);$

  $B.A;$

  liefert das Produkt der Matrizen $B \cdot A.$

(%i1) A:matrix([9,3,8,2],[5,1,8,1]);

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} 9 & 3 & 8 & 2 \\ 5 & 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i2) B:matrix([4,2],[5,7],[3,3]);

$$(\%o2)\quad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(%i3) B.A;

$$(\%o3)\quad \begin{bmatrix} 46 & 14 & 48 & 10 \\ 80 & 22 & 96 & 17 \\ 42 & 12 & 48 & 9 \end{bmatrix}$$

Berechnung der Käuferzahl mit Maxima

- Eingabe des ursprünglichen Kundenvektors

(%i1) k0:matrix([20000],[30000]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 20000 \\ 30000 \end{bmatrix}$

- Eingabe der Übergangsmatrix

(%i2) A:matrix([0.8,0.05],[0.2,0.95]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.05 \\ 0.2 & 0.95 \end{bmatrix}$

- Initialisieren des Kundenvektors

(%i3) k:k0;

(%o3) $\begin{bmatrix} 20000 \\ 30000 \end{bmatrix}$

- Berechnen des neuen Kundenvektors

(%i4) k:A.k;

Entwicklung der Käuferzahl
Maxima

- **Berechnung der Käuferzahl mit Maxima**

(%i3) k:k0;

(%o3) $\begin{bmatrix} 20000 \\ 30000 \end{bmatrix}$

(%i4) k:A.k;

(%o4) $\begin{bmatrix} 17500.0 \\ 32500.0 \end{bmatrix}$

(%i5) k:A.k;

(%o5) $\begin{bmatrix} 15625.0 \\ 34375.0 \end{bmatrix}$

(%i6) k:A.k;

(%o6) $\begin{bmatrix} 14218.75 \\ 35781.25 \end{bmatrix}$

(%i8) k:A.k;

(%o8) $\begin{bmatrix} 13164.0625 \\ 36835.9375 \end{bmatrix}$

(%i9) k:A.k;

(%o9) $\begin{bmatrix} 12373.046875 \\ 37626.953125 \end{bmatrix}$

Entwicklung der Käuferzahl

Iterative Berechnung

- Die Käuferzahlen nach zwei Wochen wurden so berechnet:
  $$\overrightarrow{k_2} = A \cdot \overrightarrow{k_1} = A \cdot \left(A \cdot \overrightarrow{k_0}\right)$$
- Will man die Käuferzahl nicht iterativ sondern direkt berechnen, dann müsste das so funktionieren:
  $$\overrightarrow{k_2} = A \cdot \overrightarrow{k_1} = A \cdot \left(A \cdot \overrightarrow{k_0}\right) = A^2 \cdot \overrightarrow{k_0}$$
- Dazu muss eine Multiplikation von Matrizen definiert werden.
- Dann könnte man auch $\overrightarrow{k_n}$ direkt berechnen:
  $$\overrightarrow{k_n} = A^n \cdot \overrightarrow{k_0}$$

Berechnung der Käuferzahl

- **Berechnung von $\overrightarrow{k_2}$**
  - $\overrightarrow{k_1} = A \cdot \overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1^0 \\ k_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot k_1^0 + a_{12} \cdot k_2^0 \\ a_{21} \cdot k_1^0 + a_{22} \cdot k_2^0 \end{pmatrix}$
  - $\overrightarrow{k_2} = A \cdot A \cdot \overrightarrow{k_0} = A \cdot \overrightarrow{k_1}$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \cdot k_1^0 + a_{12} \cdot k_2^0 \\ a_{21} \cdot k_1^0 + a_{22} \cdot k_2^0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} \cdot k_1^0 + a_{11}a_{12} \cdot k_2^0 + a_{12}a_{21} \cdot k_1^0 + a_{12}a_{22} \cdot k_2^0 \\ a_{21}a_{11} \cdot k_1^0 + a_{21}a_{12} \cdot k_2^0 + a_{22}a_{21} \cdot k_1^0 + a_{22}a_{22} \cdot k_2^0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21}) \cdot k_1^0 + (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}) \cdot k_2^0 \\ (a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21}) \cdot k_1^0 + (a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22}) \cdot k_2^0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} \end{pmatrix}}_{= A \cdot A =: A^2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} k_1^0 \\ k_2^0 \end{pmatrix}}_{= \overrightarrow{k_0}}$$

Matrizenmultiplikation

Definition

- Die Multiplikation von einer (2×2)-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit sich selbst ist definiert durch:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

Bemerkung

- Vorgehensweise bei der Matrizenmultiplikation:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1\;3 & 2\;4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{array} := \begin{pmatrix} \overset{1}{\boxed{a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21}}} & \overset{2}{\boxed{a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}}} \\ \underset{3}{\boxed{a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21}}} & \underset{4}{\boxed{a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22}}} \end{pmatrix}$$

- Diese Vorgehensweise lässt sich verallgemeinern.

Entwicklung der Käuferzahl

http://www.geogebra.org/wiki/de/CAS-Ansicht

- **Prognose ist nun ohne Iteration möglich**

1	k_0:={{20000},{30000}} $\rightarrow \begin{pmatrix} 20000 \\ 30000 \end{pmatrix}$
2	A:={{0.8,0.05},{0.2,0.95}} $\approx \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 \\ 0.2 & 0.95 \end{pmatrix}$
3	k_10:=A^10*k_0 $\approx \begin{pmatrix} 10563.14 \\ 39436.86 \end{pmatrix}$
4	k_20:=A^20*k_0 $\approx \begin{pmatrix} 10031.71 \\ 39968.29 \end{pmatrix}$

- ▷ $\overrightarrow{k_{10}} = A^{10} \cdot \overrightarrow{k_0}$
- ▷ $\overrightarrow{k_{20}} = A^{20} \cdot \overrightarrow{k_0}$
- ▷ $\overrightarrow{k_{30}} = A^{30} \cdot \overrightarrow{k_0}$

5	k_30:=A^30*k_0 $\approx \begin{pmatrix} 10001.79 \\ 39998.21 \end{pmatrix}$

- ▷ $\overrightarrow{k_{40}} = A^{40} \cdot \overrightarrow{k_0}$

6	k_40:=A^40*k_0 $\approx \begin{pmatrix} 10000.1 \\ 39999.9 \end{pmatrix}$

- ▷ $\overrightarrow{k_{100}} = A^{100} \cdot \overrightarrow{k_0}$

7	k_100:=A^100*k_0 $\approx \begin{pmatrix} 10000 \\ 40000 \end{pmatrix}$

Entwicklung der Käuferzahl
Maxima

- Prognose nun ohne Iteration möglich
  - ▷ $\overrightarrow{k_{10}} = A^{10} \cdot \overrightarrow{k_0}$
  - ▷ $\overrightarrow{k_{20}} = A^{20} \cdot \overrightarrow{k_0}$

```
(%i6) k0:matrix([20000],[30000]);
(%o6) [20000]
      [30000]

(%i7) A:matrix([0.8,0.05],[0.2,0.95]);
(%o7) [0.8 0.05]
      [0.2 0.95]

(%i10) k10:(A^^10).k0;
(%o10) [10563.1351470947 3]
       [39436.8648529052 6]

(%i11) k20:(A^^20).k0;
(%o11) [10031.7121193893 4]
       [39968.2878806106 4]
```

Entwicklung der Käuferzahl
Maxima

- **Prognose nun ohne Iteration möglich**
  - $\overrightarrow{k_{30}} = A^{30} \cdot \overrightarrow{k_0}$
  - $\overrightarrow{k_{40}} = A^{40} \cdot \overrightarrow{k_0}$
  - $\overrightarrow{k_{50}} = A^{50} \cdot \overrightarrow{k_0}$
  - $\overrightarrow{k_{60}} = A^{60} \cdot \overrightarrow{k_0}$

```
(%i12) k30:(A^^30).k0;
(%o12) [10001.7858209017]
       [39998.21417909826]
(%i13) k40:(A^^40).k0;
(%o13) [10000.1005658516]
       [39999.8994341483]
(%i14) k50:(A^^50).k0;
(%o14) [10000.0056632165]
       [39999.9943367833]
(%i15) k60:(A^^60).k0;
(%o15) [10000.0003189156]
       [39999.9996810843]
```

Entwicklung der Käuferzahl
Maxima

- **Prognose nun ohne Iteration möglich**
  - $\overrightarrow{k_{100}} = A^{100} \cdot \overrightarrow{k_0}$
  - $\overrightarrow{k_{150}} = A^{150} \cdot \overrightarrow{k_0}$
  - $\overrightarrow{k_{1000}} = A^{1000} \cdot \overrightarrow{k_0}$
  - $\overrightarrow{k_{10000}} = A^{10000} \cdot \overrightarrow{k_0}$

```
(%i16) k100:(A^^100).k0;
(%o16) [10000.0000000319]
       [39999.9999999967]

(%i18) k150:(A^^150).k0;
(%o18) [9999.99999999978]
       [39999.9999999989]

(%i19) k1000:(A^^1000).k0;
(%o19) [9999.99999999978]
       [39999.9999999989]

(%i20) k10000:(A^^10000).k0;
(%o20) [9999.99999999978]
       [39999.9999999989]
```

Entwicklung der Käuferzahl

Stabiler Kundenvektor

- Es gibt offensichtlich nach einer bestimmten Anzahl von Wochen einen stabilen Kundenvektor $\overrightarrow{k_s} = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 40.000 \end{pmatrix}$.
- Obwohl weiterhin in jeder Woche Käufer die Fernsehzeitschrift wechseln, bleiben die Kundenzahlen der beiden Zeitschriften konstant.
- Man sagt, es stellt sich ein dynamisches Gleichgewicht ein.
- Für diesen stabilen Kundenvektor $\overrightarrow{k_s}$ muss gelten:

$$A \cdot \overrightarrow{k_s} = \overrightarrow{k_s}$$

- Aus dieser Gleichung sollte man $\overrightarrow{k_s}$ auch direkt berechnen können.

Entwicklung der Käuferzahl

- **Berechnung von $\overrightarrow{k_s}$**
  - Aus $A \cdot \overrightarrow{k_s} = \overrightarrow{k_s}$

    ergibt sich mit $\overrightarrow{k_s} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

    die Matrixgleichung $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
  - Als lineares Gleichungssystem geschrieben folgt:
    $$\begin{aligned} 0{,}8 \cdot x + 0{,}05 \cdot y &= x \\ 0{,}2 \cdot x + 0{,}95 \cdot y &= y \end{aligned}$$
  - Zusammenfassen gleichartiger Terme liefert:
    $$\begin{aligned} -0{,}2 \cdot x + 0{,}05 \cdot y &= 0 \\ 0{,}2 \cdot x - 0{,}05 \cdot y &= 0 \end{aligned}$$
  - Dieses „Gleichungssystem" ist nicht eindeutig lösbar.
    $$0{,}2 \cdot x - 0{,}05 \cdot y = 0$$
  - Es gilt aber zusätzlich:
    $$x + y = 50.000$$

Entwicklung der Käuferzahl

- **Berechnung von $\overrightarrow{k_s}$**
  - Dieses Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.
    $$\begin{aligned} 0{,}2 \cdot x - 0{,}05 \cdot y &= 0 \\ x + \quad\quad y &= 50.000 \end{aligned}$$
  - Aus der ersten Gleichung ergibt sich:
    $$x = 0{,}25 \cdot y$$
  - Einsetzen in die zweite Gleichung liefert:
    $$1{,}25 \cdot y = 50.000$$
  - Es ergibt sich und als eindeutige Lösung.
    $$y = 40.000$$
    $$x = 10.000$$
  - Stabiler Kundenvektor:
    $$\overrightarrow{k_s} = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 40.000 \end{pmatrix}$$

Entwicklung der Käuferzahl

http://www.geogebra.org/wiki/de/Lösungen_(Befehl)

Berechnung von $\overrightarrow{k_s}$

- Mit einem Computeralgebra-system wie in GeoGebra kann das Gleichungssystem auch direkt gelöst werden:

$$\begin{aligned} 0{,}2 \cdot x - 0{,}05 \cdot y &= 0 \\ x + \qquad\quad y &= 50.000 \end{aligned}$$

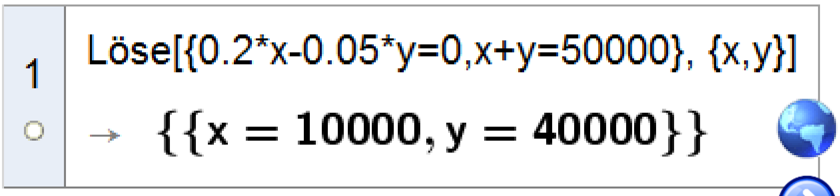
- Eingabe von

$$\text{Löse}[\{0.2 * x - 0.05 * y = 0, x + y = 50000\}, \{\text{x}, \text{y}\}]$$

liefert nach Auswahl von $\boxed{=}$

und ggf. drücken der Taste *Return*

$$\{\{x = 10000, y = 40000\}\}$$



Entwicklung der Käuferzahl
Maxima

- **Berechnung von $\overrightarrow{k_s}$**
  - Mit einem Computeralgebra-system (CAS) wie Maxima kann das Gleichungssystem auch direkt gelöst werden:

$$\begin{aligned} 0{,}2 \cdot x - 0{,}05 \cdot y &= 0 \\ x + \qquad y &= 50.000 \end{aligned}$$

  - Eingabe von

$$solve(\,[0.2 * x - 0.05 * y = 0, x + y = 50000], [x, y]\,);$$

liefert nach drücken der Tasten *Shift* + *Return*

```
(%i1) solve( [0.2*x-0.05*y=0, x+y=50000], [x,y] );
rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2
rat: replaced -0.05 by -1/20 = -0.05
(%o1) [[x=10000,y=40000]]
```

Entwicklung der Käuferzahl

- **Ergebnis**
  - Die Kundenverteilung stabilisiert sich so, dass trotz der dynamischen Entwicklung die Zeitschrift Hörzu dauerhaft 40.000 und die Zeitschrift Gong durchgängig 10.000 Käufer hat.
  - Der stabile Kundenvektor lässt sich mit Hilfe der Gleichung $A \cdot \overrightarrow{k_s} = \overrightarrow{k_s}$ und der konstanten Kundensumme berechnen.
  - Insbesondere ist das lineare Gleichungssystem nicht von einer speziellen Anfangsverteilung der Kunden abhängig.
  - Folglich ist auch der stabile Kundenvektor $\overrightarrow{k_s}$ unabhängig von der Anfangsverteilung der Kunden!

Entwicklung der Übergangsmatrix

- Wie verändert sich bei diesem Prozess die Übergangsmatrix?
- Untersuchen Sie das mit Hilfe des CAS in GeoGebra.

Ergebnis

- Offensichtlich ergibt sich eine Grenzmatrix A_G:

$$A_G := \lim_{n\to\infty} A^n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

- Wird die Grenzmatrix A_G auf den Ausgangskundenvektor $\overrightarrow{k_0}$ angewandt, dann ergibt sich direkt der stabile Kundenvektor $\overrightarrow{k_s}$:

$$A_G \cdot \overrightarrow{k_0} = \overrightarrow{k_s}$$

Ergebnisse (Fortsetzung)

- Grenzmatrix A_G und stabiler Kundenvektor $\overrightarrow{k_s}$ sind unabhängig von der Anfangsverteilung.
- Statt 50.000 Kunden kann man auch 100% bzw. 1 nutzen.
- Der Anfangsvektor lässt sich dann als $\binom{1}{0}$ oder $\binom{0}{1}$ schreiben.
- Multiplikation mit der Grenzmatrix $A_G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ liefert die erste bzw. zweite Spalte dieser Matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \binom{1}{0} = \binom{a}{c} = \overrightarrow{k_s} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \binom{0}{1} = \binom{b}{d} = \overrightarrow{k_s}$$

- Daraus folgt: $\binom{a}{c} = \binom{b}{d} = \overrightarrow{k_s}$
- In den Spalten der Grenzmatrix A_G steht jeweils der stabile Kundenvektor $\overrightarrow{k_s}$.