Didaktik der Geometrie

Inhaltsverzeichnis

Didaktik der Geometrie

Didaktik der Geometrie

Kapitel 5:
Problemlösen

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 5: Problemlösen

Kapitel 5: Problemlösen

5.1 Problem? Problemlösen?!

Was ist ein Problem?

(Routine-)Aufgabe

Anfangszustand → Algorithmus → Zielzustand

Problem

Anfangszustand ? Zielzustand

Aufgabe oder Problem?

- Subjektiv sehr verschieden
- Abhängig von Vorwissen
- Dieselbe Aufgabe kann für verschiedene Menschen einen Routineaufgabe oder ein Problem sein.
- Fehleinschätzungen bzgl. der Schwierigkeit einer Aufgabe beruhen in der Regel auf der falschen Einschätzung des Vorwissens.

Problemlösen (im weiteren Sinn)

Nach Leuders (Hrsg.): Mathematik-Didaktik, 2003

Problem finden
- Probleme in Kontexten entdecken
- Problemsituation erfassen und bewerten

entdecken-
des Lernen

Problem lösen (Problemlösen im engeren Sinn)
- Mathematische Kompetenzen in neuer Weise oder Kombination einsetzen
- Vorhandene Kompetenzen / Begriffe werden dabei gefestigt und flexibilisiert

problemorien-
tiertes Lernen

Problem weiterentwickeln
- Suche nach Problemlösungen führt auf neue mathem. Ideen oder weiterführende Probleme
- Neue math. Begriffe & Verfahren entstehen

Kapitel 5: Problemlösen

5.2 Ziele des Problemlösens im MU

Warum Problemlösen im MU?

- **Gelegenheit Mathematik individuell und aktiv zu konstruieren**
  - angemessenes Bild der Mathematik
- **Kontexte die mathematischen Konstrukten Sinn geben**
  - Behalten, Motivation, nachhaltiges Lernen
- **Schlüsselkompetenz für das lebenslange Lernen**
  - eigene Lösungsansätze und Strategien entwickeln
  - mit uneindeutigen Informationen umgehen
- **emotionale Erlebnisse**
  - Durchhaltevermögen, Aushalten von Widerständen
  - Durchbrüche, Aha-Erlebnisse
- **Transfer**
  - Umgang mit unbekannten Situationen
  - Sammeln und strukturieren von Informationen

Kriterien für ein „gutes“ Problem

- **führt auf allgemeine mathematische Ideen**
  - macht übergreifende Zusammenhänge verständlich
  - neue Begriffsbildungen werden nötig und einsichtig
- **bietet Anlass zu divergentem Arbeiten & individuellem Erkunden**
  - erlaubt verschiedene Ansätze auf unterschiedlichen Niveaus
- **bietet einen inner- oder außermathematischen Kontext für eine mathematisches Konzept**
  - ist leicht zugänglich und unmittelbar verständlich
- **macht die Selbstentwicklung einer Strategie notwendig**
  - führt zur Nutzung und neuen Kombination von vorhandenen Kenntnissen

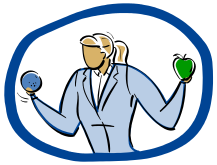
Kapitel 5: Problemlösen

5.3 Heuristische Strategien und Hilfsmittel

Heuristische Strategien

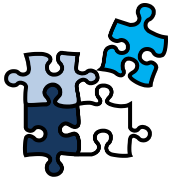
- **Vorwärtsarbeiten**
  - Was ist gegeben?
  - Was weiß ich über das Gegebene?
  - Was kann ich daraus ermitteln?

- **Rückwärtsarbeiten**
  - Was ist gesucht?
  - Was weiß ich über das Gesuchte?
  - Was benötige ich, um das Gesuchte zu ermitteln?



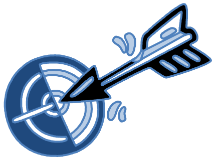
- **Analogiebildung**
  - Hast du schon einmal etwas Ähnliches gelöst?
  - Lassen sich Lösungsschritte übernehmen?

Heuristische Strategien



- **Zerlegungsprinzip**
  - Welche Teilfragen sind zu lösen?
  - Zerlegen in überschaubare Portionen
  - Abarbeiten der Teilprobleme

- **Suchraumeingrenzung**
  - In welchen Grenzen liegt das Ergebnis?
  - Systematisches Probieren



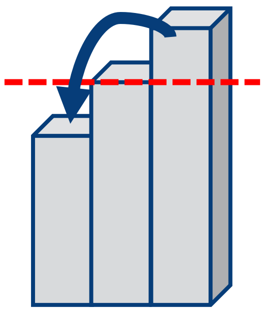
- **Ziel-Mittel-Analyse**
  - Welche (heuristischen) Hilfsmittel können auf dem Weg zum Ziel hilfreich sein
- **Spezialisieren, Konkretisieren**

Heuristische Hilfsmittel

Beispiel: Was gilt für die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen?

n	$n+1$	$n+2$	Summe
1	2	3	6
5	6	7	18
9	10	11	30

- **Tabelle**
  - Ausprobieren!
  - Welche Werte sollen in die Tabelle eingetragen werden?



- **Informative Figur**
  - Hilft beim Verständnis des Problems.
  - Beim Zeichnen wird deutlich, welche Informationen zur Lösung benötigt werden.

$$\begin{aligned} &n+(n+1)+(n+2)\\ &\quad = 3n+3\\ &\quad = 3\cdot(n+1) \end{aligned}$$

- **Gleichung / Term**
  - Beziehungen der Informationen werden verknüpft dargestellt.
  - Nicht immer notwendig!

Kapitel 5: Problemlösen

5.4 Beispiel: Problem- lösestunde aus Japan

Beispielstunde Japan

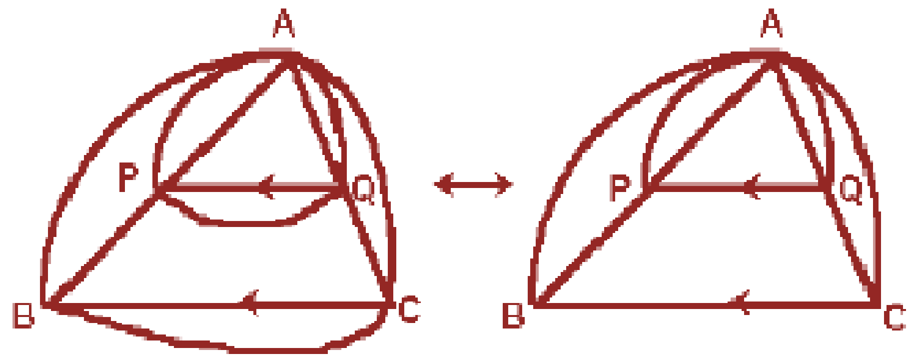
- **Thema: Ähnlichkeit**
  Die Stunde ist Teil einer Unterrichtssequenz zur Ähnlichkeit geometrischer Figuren.

- **Einstieg**
  Wiederholung der Strahlensätze im Lehrervortrag

  (Keine Hausaufgabenbesprechung)

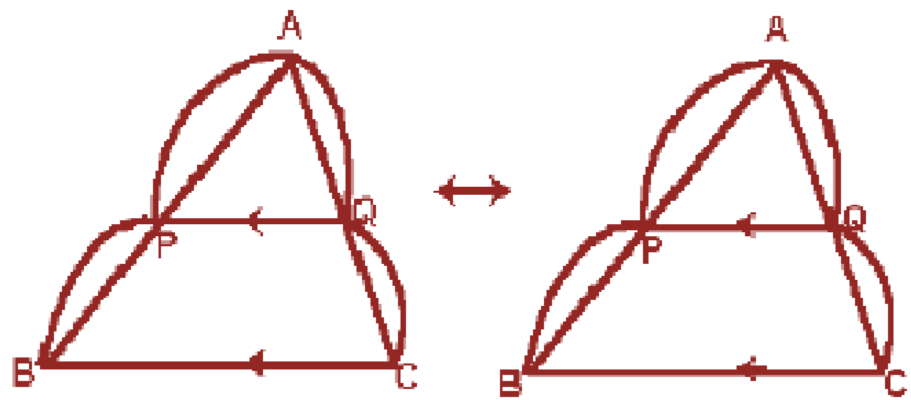
$PQ \parallel BC$
$\Rightarrow |AP| : |AB| = |AQ| : |AC| = |PQ| : |BC|$

$|AP| : |AB| = |AQ| : |AC|$
$\Rightarrow PQ \parallel BC$



$PQ \parallel BC$
$\Rightarrow |AP| : |PB| = |AQ| : |QC|$

$|AP| : |PB| = |AQ| : |QC|$
$\Rightarrow PQ \parallel BC$



Beispielstunde Japan

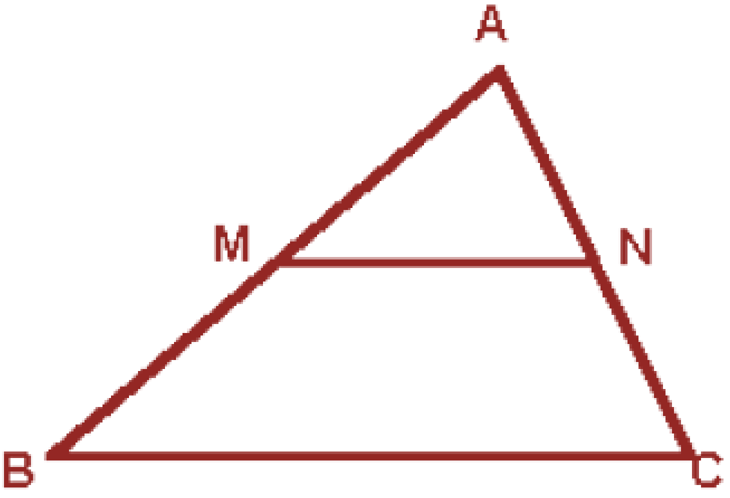
- **Erarbeitung**
  Anschließend wird ein Spezialfall eingeführt und durch zwei Schüler bewiesen.

- **Sicherung**
  Er wird zur Berechnung von Strecken genutzt, die die Schenkel gegebener Dreiecke und Trapeze halbieren.

Mittelpunktverbindungstheorem

Wenn im Dreieck ABC M der Mittelpunkt von $[AB]$ ist und N der Mittelpunkt von $[AC]$, dann gilt:

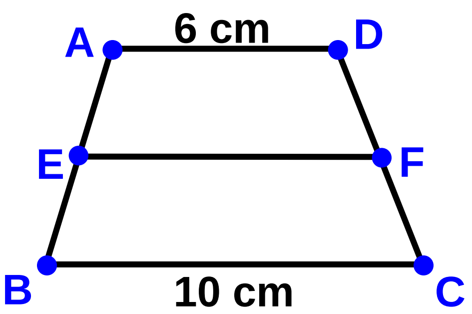
- $MN \parallel BC$ und
- $|MN| = \frac{1}{2} \cdot |BC|$



Beispielstunde Japan - Geometrie

Vertiefung

- „open-ended problem solving“
  - Zur Förderung des logischen Denkens verwenden japanische Lehrer (häufig) den methodischen Ansatz des „open-ended problem solving“, der sich durch Erarbeitung unterschiedlicher Lösungsansätze in Einzel- und Gruppenarbeit auszeichnet.
- Aufgabe für die Gruppenarbeit
  - Es soll die Länge der Mittelparallele eines Trapezes mit bekannten Längen der parallelen Seiten bestimmt werden.

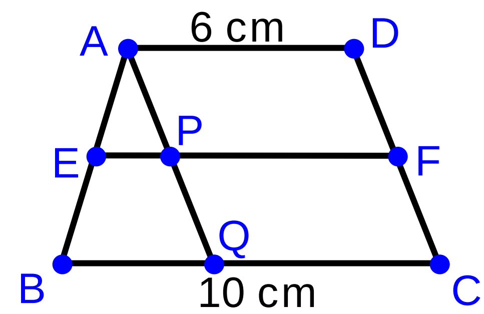


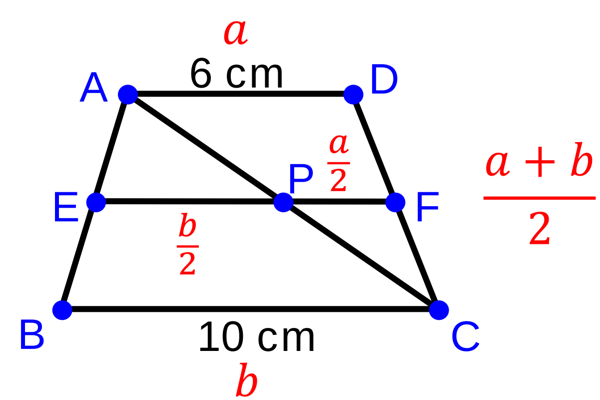
- Der Lehrer
  - klärt die Problemstellung und teilt die Klasse in Vierergruppen ein.
- Die Schülerinnen und Schüler
  - tauschen ihre Ideen aus.

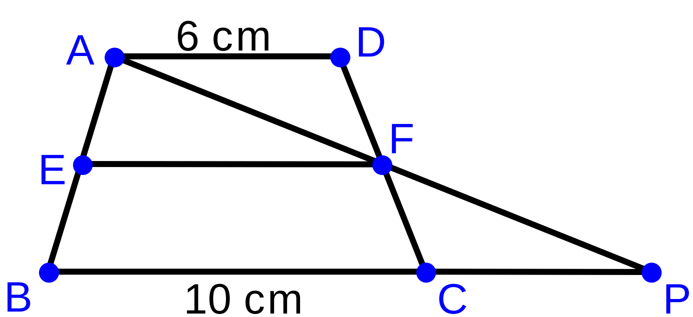
Beispielstunde Japan - Geometrie

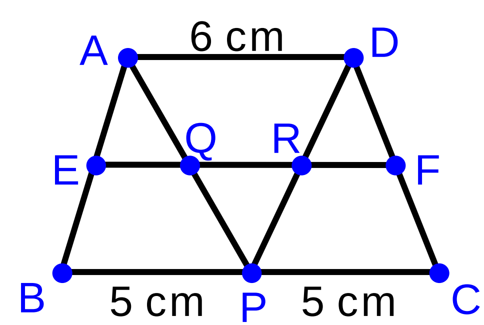
- **Lehreraktionen während der Gruppenarbeit**
  Beantwortet Fragen, rät oder hilft, merkt sich die Lösungen der Schüler und bereitet die anschließende Besprechung an der Tafel vor.

- **Sicherung**
  Vier der sieben verschiedenen von Schülern gefunden Lösungen, werden an der Tafel dargestellt.









Kapitel 5: Problemlösen

5.5 Problemtypen im Geometrieunterricht

Interpolationsprobleme

1. Anfangszustand (das Gegebene) genau definiert
2. Zielzustand (das Gesuchte) genau definiert

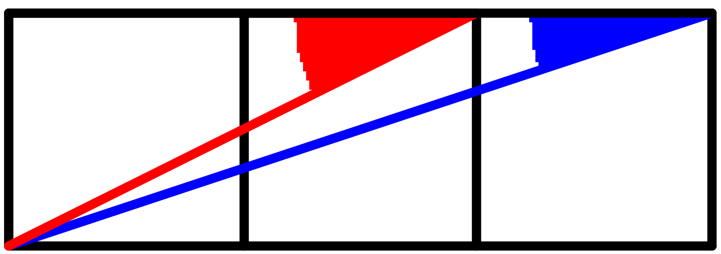
objektiv

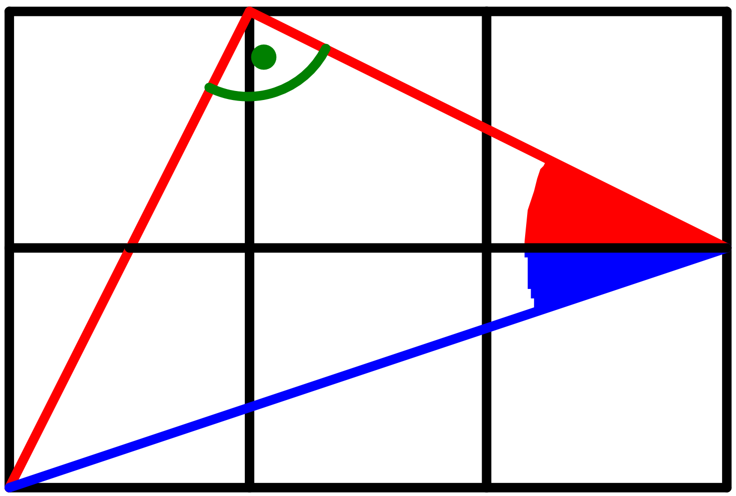
3. Problemlöser kennt keine Lösung der Aufgabe,
   also weder einen Operator noch eine Operatorkette,
   die den Anfangszustand in den Zielzustand überführt.
4. Problemlöser *verfügt* über Operationen,
   die eine Lösung des Problems gestatten.

subjektiv

Interpolationsproblem?

Zeige: rot + blau = 45°





Interpolationsproblemtypen in der Geometrie

- Berechnungsprobleme
- Konstruktionsprobleme
- Beweisprobleme

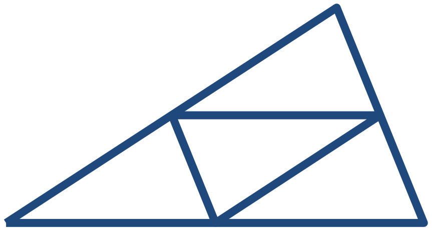
Berechnungsprobleme in der Geometrie

- **Lösungsfindung durch**
  - Vorwärtsarbeiten
  - Rückwärtsarbeiten
  - Lösen eines Gleichungssystems
- **Themenbereiche der Geometrie**
  - Winkelbeziehungen in Figuren
  - Flächeninhalte von Polygonen & Kreisen
  - Satzgruppe des Pythagoras
  - Strahlensätze
  - Trigonometrie
- **Schwierigkeiten**
  - Mangelnde Operatorenkenntnis
  - Erkennen der Anwendbarkeit eines Operators
  - Falsche Anwendung eines Operators
  - Anwenden heuristischer Strategien

Umgang mit Schwierigkeiten

Goldberg: Beweisen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. In: Der Mathematikunterricht 6, 1992, S. 33-46

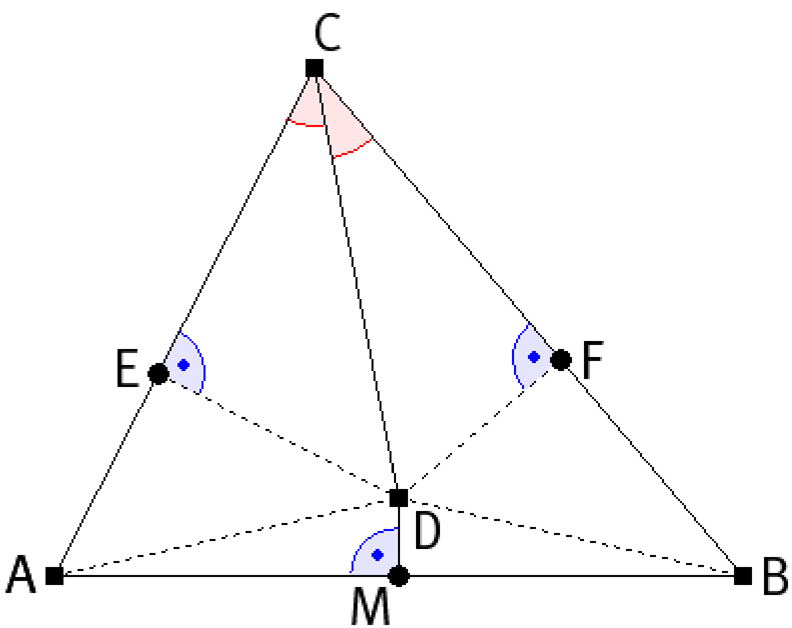
- **Mangelnde Operatorenkenntnis**
  - Anwenden in einfachen Übungsaufgaben mit Problemcharakter (vgl. Goldberg)
  - Liste mit benötigten Operationen anfertigen (Bilder, Formeln, …)
- **Erkennen der Anwendbarkeit eines Operators**
  - Erkennen von (Teil-)Konfigurationen üben
- **Falsche Anwendung eines Operators**
  - Vereinbarung:
    Eigenschaften von Teilfiguren dürfen nicht der Anschauung entnommen werden
- **Anwenden heuristischer Strategien**
  - Zunächst nur Vorwärtsarbeiten einsetzen



Anzahl der Trapeze?

Ein Beweis?

- **Paradoxon:**
  - Jedes Dreieck ist gleichschenklig.
- **Beweis:** Im Dreieck ABC
  - halbiere CD den Innenwinkel bei C und
  - sei MD Mittelsenkrechte auf AB.
  - Dann ist ΔCED ≅ ΔCFD nach Kongruenzsatz WSW.
  - ΔAMD ≅ ΔBMD nach Kongruenzsatz SWS.
  - Aus |ED| = |FD|, |AD| = |BD|, ∠AED = ∠BFD = 90° folgt mit SsW: ΔADE ≅ ΔBDF



- Also ist |AE| = |BF|.
- Damit ist |AC| = |BC|.
- Δ ABC ist gleichschenklig.

- **Wo steckt der Fehler?**

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Konstruktionsprobleme

- **Problemanalyse**
  - Fallunterscheidung durchführen
    - Lösbarkeitsbedingungen untersuchen
    - verschiedene Fälle nacheinander Lösen
  - Überlegungsfigur zeichnen
    - Gegebenes und Gesuchtes mit verschiedenen Farben markieren

- **Lösungsfindung (Heuristische Strategien)**
  - Weglassen einer Bedingung „(n-1)-Methode“
  - Konstruktion einer Teilkonfiguration
  - Reduktion auf ein Berechnungsproblem

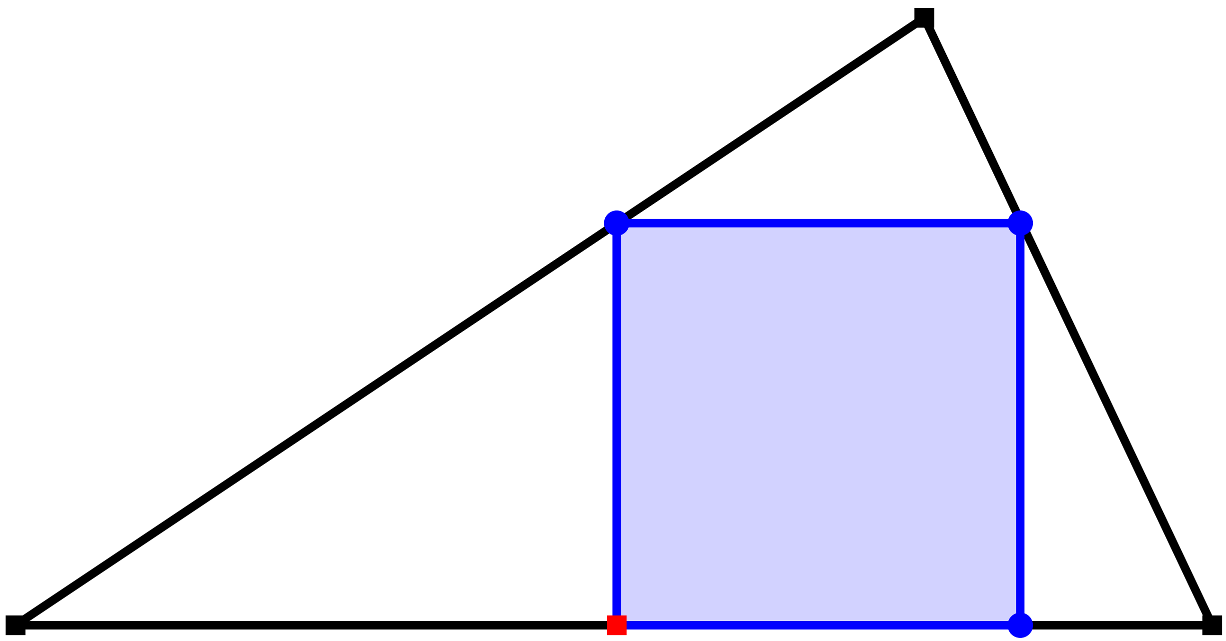
- **Themenbereiche der Geometrie**
  - Kongruenzabbildungen
  - Dreiecke und Vierecke
  - Zentrische Streckung

Kapitel 5: Problemlösen

5.6 Beispiele für Problemaufgaben

Einem Dreieck ein Quadrat einbeschreiben

Weglassen einer Bedingung
(n-1)-Methode



Dreieckskonstruktion

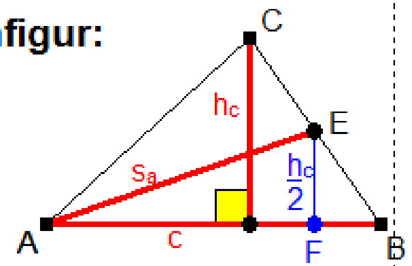
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus folgenden Längen: Seite c, Höhe h_c und Seitenhalbierende s_a

0 Länge_c=4 5

0 Länge_hc=3,5 5

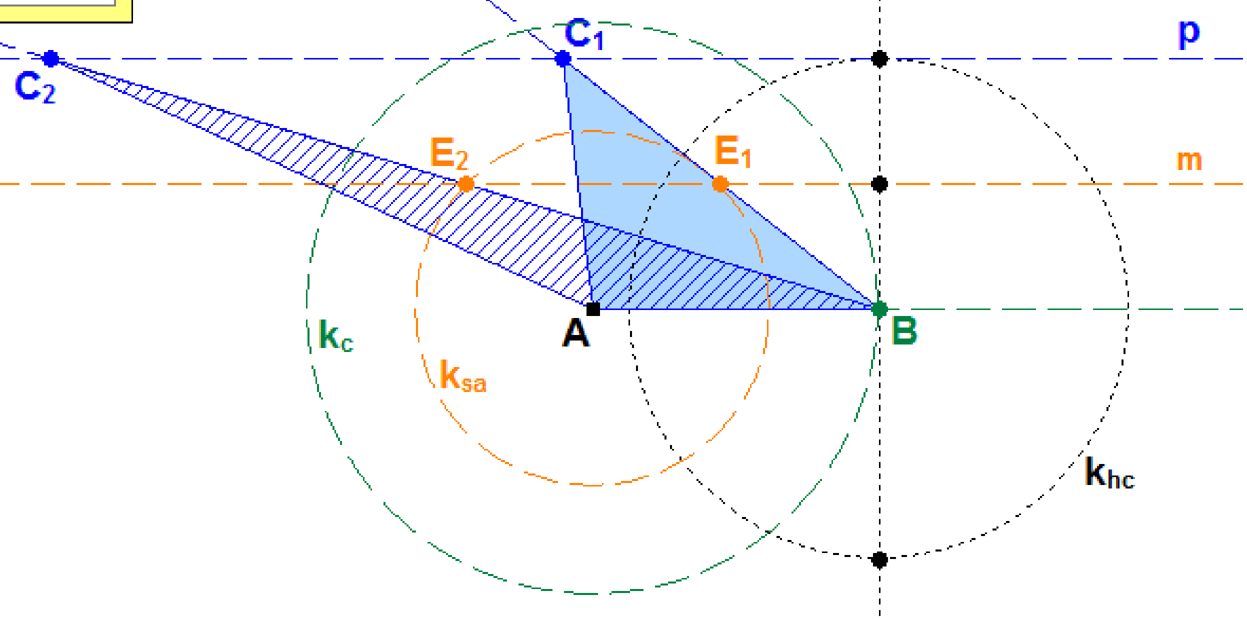
0 Länge_sa=2,5 5

Planfigur:



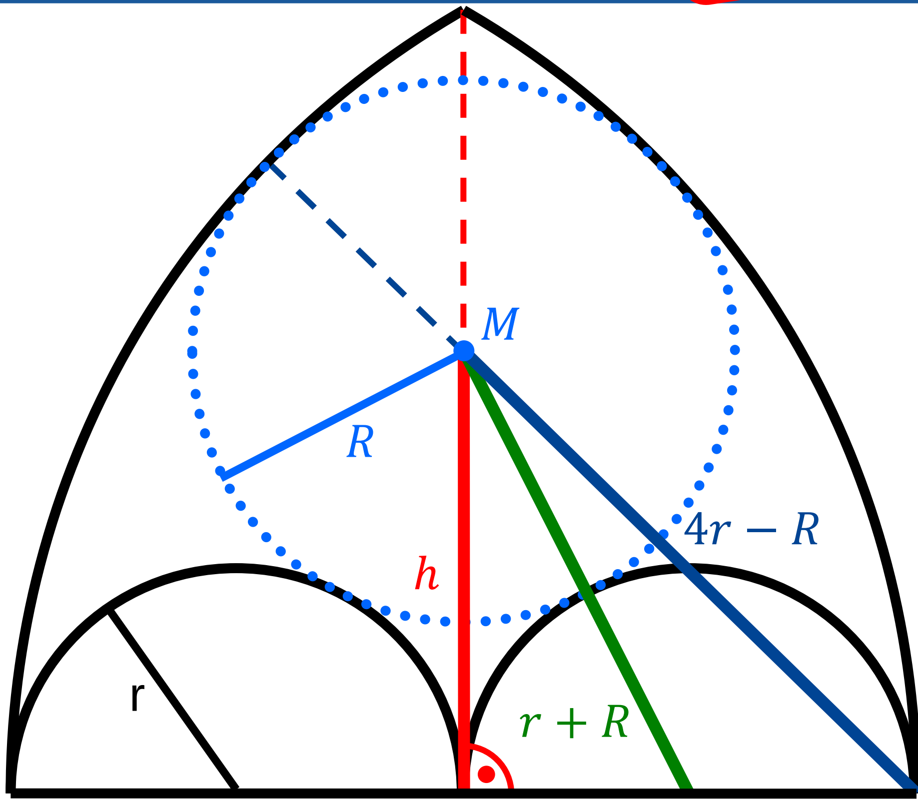
Konstruktion einer Teilfigur

- **Planfigur**
- **1. Schritt**
- **2. Schritt**
- **3. Schritt**
- **4. Schritt**



Reduktion auf ein Berechnungsproblem

Kirchenfenster



(1) $h^2 = (r + R)^2 - r^2$

(2) $(4r - R)^2 = h^2 + (2r)^2$

Einsetzen von (1) in (2) liefert:

$$(4r - R)^2 = (r + R)^2 - r^2 + (2r)^2$$

$$\Rightarrow \; \ldots \; \Rightarrow R = \frac{6}{5} \cdot r$$

1. Vorwärtsarbeiten

- ▷ Was ist bekannt? ➔ $r, 4r$
  - ➔ Symmetrie!

2. Rückwärtsarbeiten!

- ▷ Wie bekommt man den Kreis?
  - 🡐 Mittelpunkt M
- ▷ Wie bekommt man M?
  - 🡐 Radius R oder Höhe h
- ▷ Wie bekommt man R bzw. h?
  - 🡐 ???

3. Hilfslinien einzeichnen!

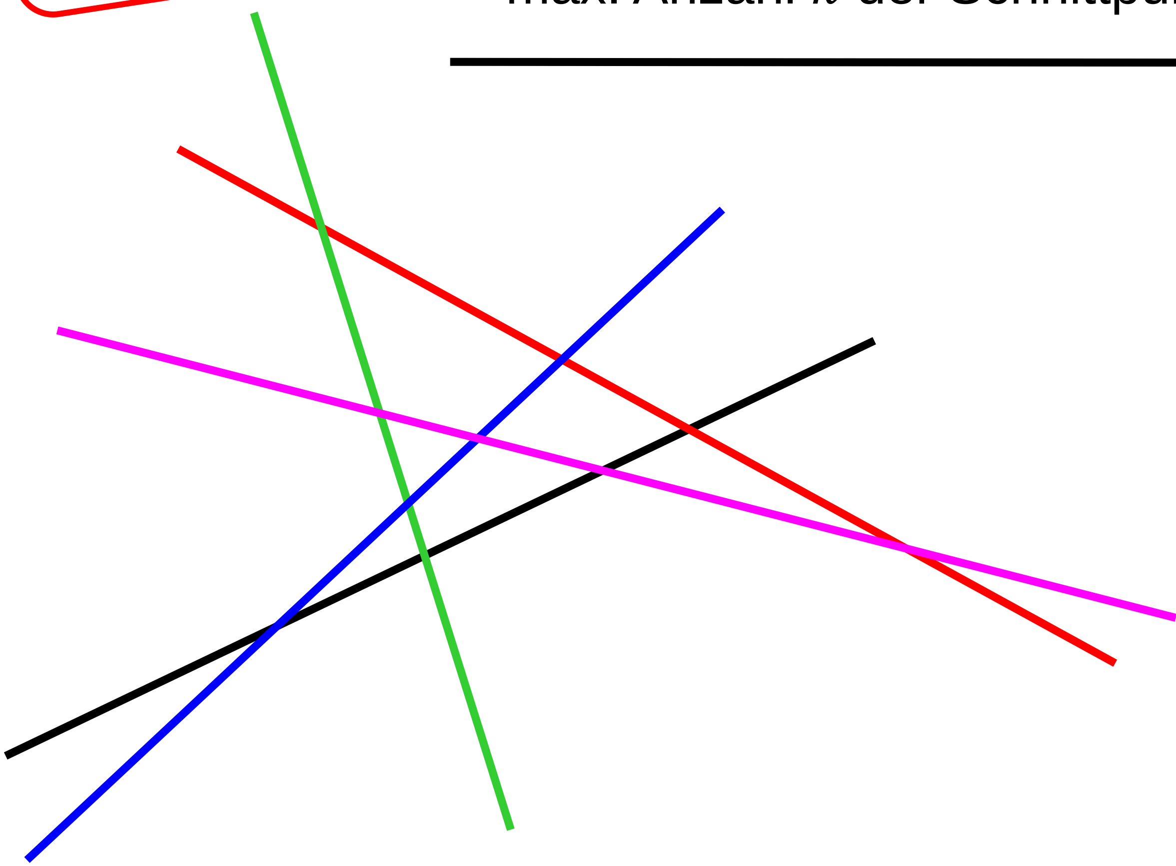
- ▷ Wie liegt der neue Kreis zu den alten? ➔ Berühren!
- ▷ Weitere Hilfslinie? ➔ Ja
- ▷ Wie bekommt man R bzw. h?

4. Berechnen!

Maximale Anzahl k von Schnittpunkten bei n Geraden

heuristisches Hilfsmittel: Tabelle

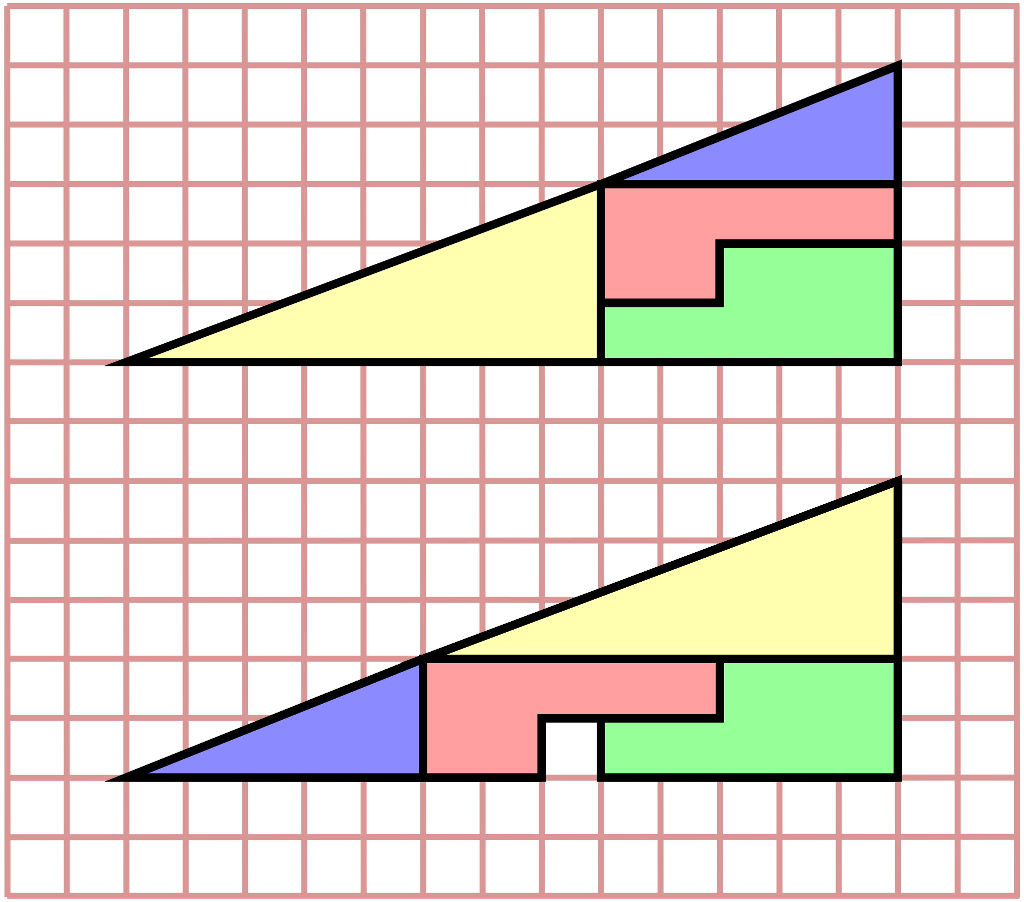
Anzahl n der Geraden	1	2	3	4	5
max. Anzahl k der Schnittpunkte	0	1	3	6	10
		0+1	1+2	3+3	6+4



Bei n Geraden $(n > 1)$ kann es maximal $k = 1 + 2 + \cdots + (n-1)$ Schnittpunkte geben.

Was stimmt hier nicht?

http://www.brefeld.homepage.t-online.de/dreieck.html



Was stimmt hier nicht?

http://www.brefeld.homepage.t-online.de/dreieck.html

heuristische Strategie: Hinterfragen