Jürgen Roth

# Didaktik der Geometrie

## Modul 5: Fachdidaktische Bereiche

## Didaktik der Geometrie

## Didaktik der Geometrie

# Kapitel 5: Problemlösen

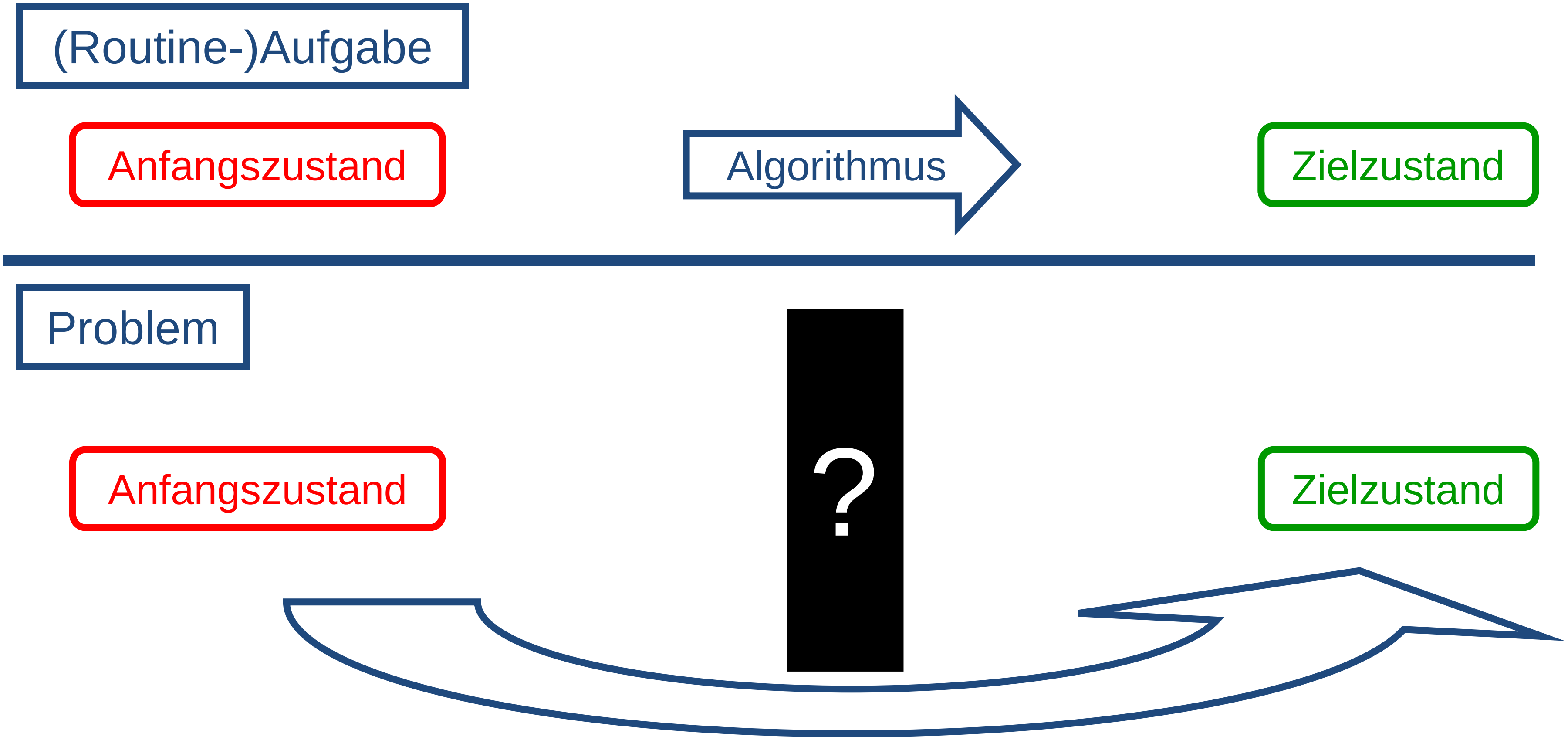
## Kapitel 5: Problemlösen

Kapitel 5: Problemlösen

# 5.1 Was ist ein Problem?

# Was ist ein Problem?

http://www.juergen-roth.de/lehre/skripte/did_grundlagen/fachdidaktische_grundlagen.pdf




Ein Problemlöser *kennt* keine Lösung der Aufgabe, also weder einen Operator noch eine Operatorkette, die den Anfangszustand in den Zielzustand überführt.

Weiteres zum Problemlösen: Siehe Skript „Fachdidaktische Grundlagen“

Kapitel 5: Problemlösen

# 5.2 Problemtypen im Geometrieunterricht

# Im Geometrieunterricht: Nur Interpolationsprobleme

Interpolationsproblem

1. Anfangszustand (das Gegebene) ist genau definiert.
2. Zielzustand (das Gesuchte) ist genau definiert.

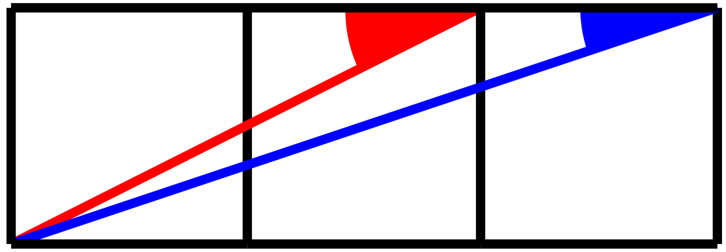
objektiv

3. Problemlöser *verfügt* über Operationen, die eine Lösung des Problems gestatten.

subjektiv

# Interpolationsproblem?

Zeige: rot + blau $= 45°$



# Interpolationsproblemtypen in der Geometrie

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

# Berechnungsprobleme

- **Themenbereiche der Geometrie**
  - Winkelbeziehungen in Figuren
  - Flächeninhalte von Polygonen und Kreisen
  - Satzgruppe des Pythagoras
  - Strahlensätze
  - Trigonometrie
- **Schwierigkeiten**
  - Mangelnde Kenntnis von Operatoren
  - Erkennen der Anwendbarkeit eines Operators
  - Falsche Anwendung eines Operators
  - Anwenden heuristischer Strategien
- **Lösungsfindung durch**
  - Vorwärtsarbeiten
  - Rückwärtsarbeiten
  - Lösen eines Gleichungssystems

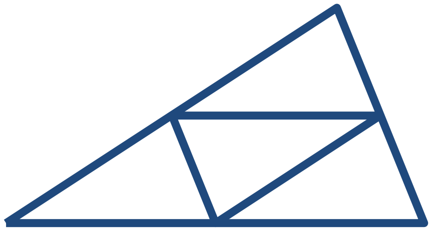
# Konstruktionsprobleme

- **Themenbereiche der Geometrie**
  - Kongruenzabbildungen
  - Dreiecke und Vierecke
  - Zentrische Streckung
- **Problemanalyse**
  - Fallunterscheidung durchführen
    - Lösbarkeitsbedingungen untersuchen
    - verschiedene Fälle nacheinander lösen
  - Überlegungsfigur zeichnen
    - Gegebenes und Gesuchtes mit verschiedenen Farben markieren
- **Lösungsfindung (Heuristische Strategien)**
  - Weglassen einer Bedingung „(n-1)-Methode“
  - Konstruktion einer Teilkonfiguration
  - Reduktion auf ein Berechnungsproblem
  - Hilfslinie einzeichnen

# Umgang mit Schwierigkeiten

Goldberg (1992). Beweisen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. *MU 38(6)*, S. 33-46

- **Mangelnde Operatorenkenntnis**
  - Anwenden in einfachen Übungsaufgaben mit Problemcharakter (vgl. Goldberg)
  - Liste mit benötigten Operationen anfertigen (Bilder, Formeln, …)
- **Erkennen der Anwendbarkeit eines Operators**
  - Erkennen von (Teil-)Konfigurationen üben

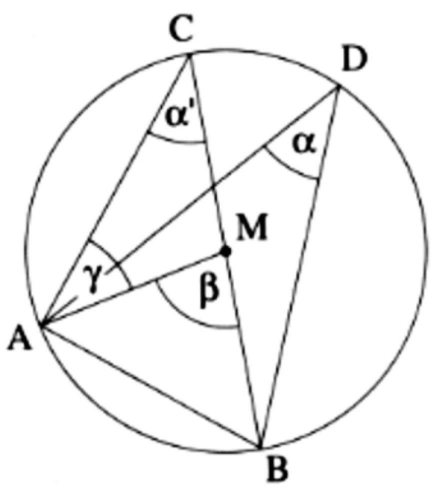


Anzahl der Trapeze?

- **Falsche Anwendung eines Operators**
  - Vereinbarung:
    Eigenschaften von Teilfiguren dürfen nicht der Anschauung entnommen werden
- **Anwenden heuristischer Strategien**
  - Zunächst nur Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten einsetzen

# Umgang mit mangelnder Operatorkenntnis

## Beweis: Mittelpunktswinkel-Umfangswinkel-Satz




**Vor.:** $\alpha$ ist Umfangswinkel über $AB$
$\beta$ ist Mittelpunktswinkel über $AB$

**Beh.:** $\beta = 2\alpha$

**Bew.:**

(1) $\alpha' = \gamma$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)

(2) $\beta = \alpha' + \gamma$ (Außenwinkelsatz)

(3) $\beta = \alpha' + \alpha'$ (1) und (2)

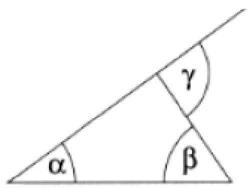
(4) $\beta = 2\alpha'$

(5) $\beta = 2\alpha$ (Umfangswinkelsatz)

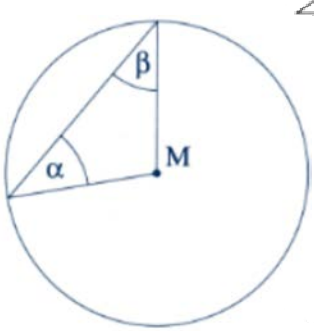
Goldberg (1992). Beweisen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. *MU 38(6)*, S. 33-46

# Umgang mit mangelnder Operatorkenntnis

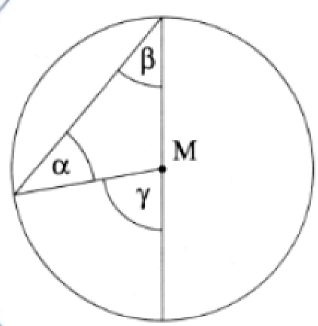
## Vorbereitungsaufgaben



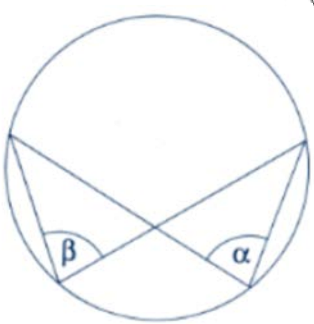

- Geg.: $\alpha = 20°; \beta = 40°$
  Ges.: $\gamma$
  Lös.: $\gamma = 20° + 40° = 60°$ (Außenwinkelsatz)




- Geg.: $\alpha = 15°$
  Ges.: $\beta$
  Lös.: $\beta = \alpha = 15°$ (Basiswinkelsatz)




- Geg.: $\alpha = 30°$
  Ges.: $\gamma$
  Lös.: (1) $\beta = \alpha = 30°$ (Basiswinkelsatz)
  (2) $\gamma = 30° + 30° = 60°$ (Außenwinkelsatz)



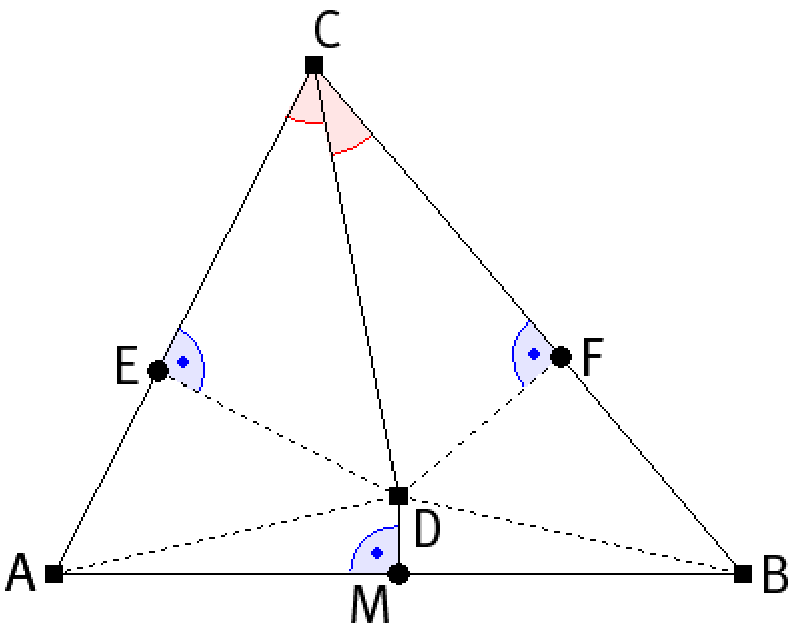

- Geg.: $\beta = 27°$
  Ges.: $\alpha$
  Lös.: $\alpha = 27°$ (Umfangswinkelsatz)

Goldberg (1992). Beweisen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. *MU 38(6)*, S. 33-46

**Wo steckt der Fehler?**

# Ein Beweis?

- **Paradoxon**
  - Jedes Dreieck ist gleichschenklig.
- **Beweis:** Im Dreieck $\Delta ABC$
  - halbiere $CD$ den Winkel bei $C$
  - und sei $MD$ Mittelsenkrechte von $[AB]$.
  - Dann ist $\Delta CED \cong \Delta CFD$ nach Kongruenzsatz WSW.
  - $\Delta AMD \cong \Delta BMD$ nach Kongruenzsatz SWS.
  - Aus $|ED| = |FD|$, $|AD| = |BD|$ und $\measuredangle AED = \measuredangle BFD = 90°$ folgt mit SsW: $\Delta ADE \cong \Delta \mathrm{BDF}$




  - Also ist $|AE| = |BF|$.
  - Damit ist $|AC| = |BC|$.
  - $\Delta ABC$ ist gleichschenklig.

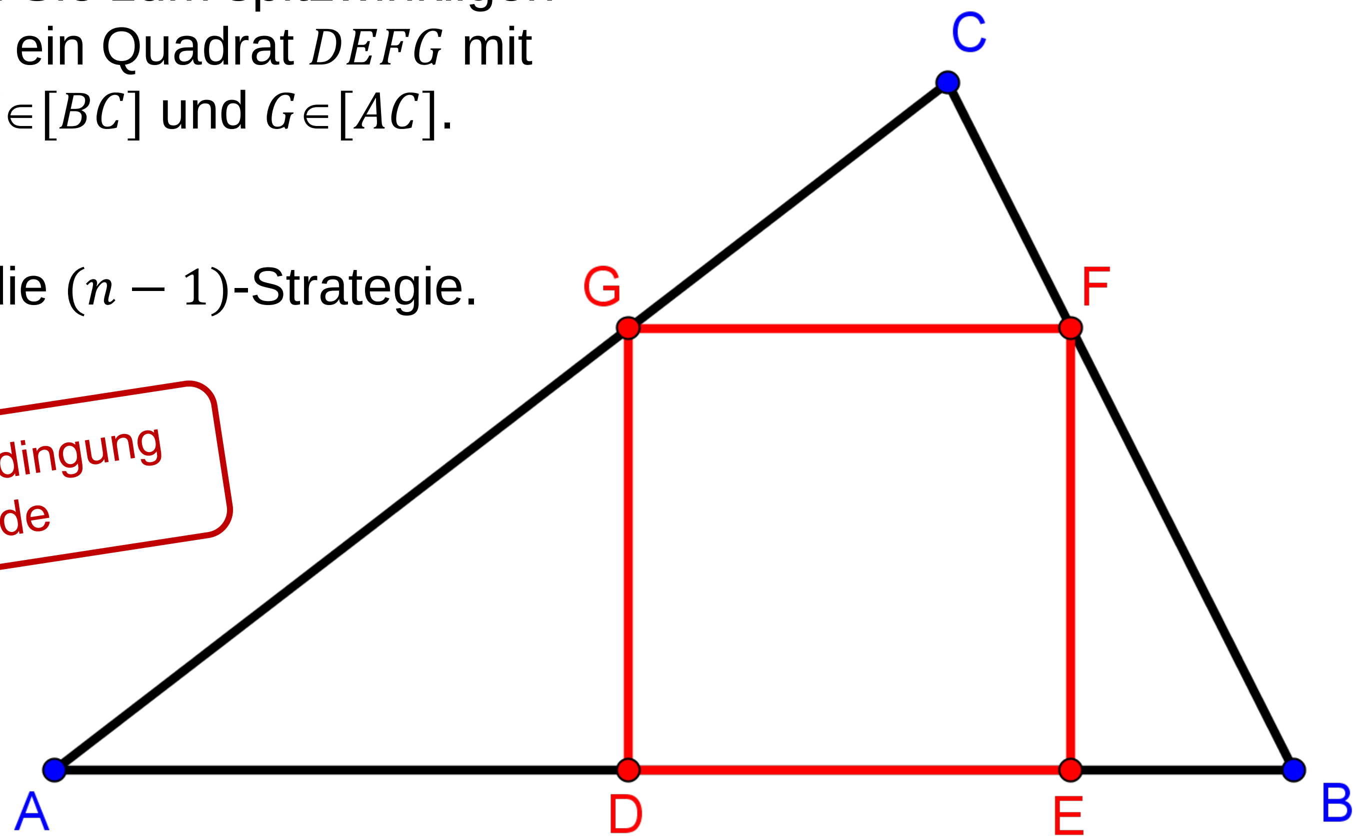
Kapitel 5: Problemlösen

# 5.3 Beispiele für Problemaufgaben

# Einem Dreieck ein Quadrat einbeschreiben

- **Aufgabe**
  - Konstruieren Sie zum spitzwinkligen Dreieck $ABC$ ein Quadrat $DEFG$ mit $D, E \in [AB]$, $F \in [BC]$ und $G \in [AC]$.
- **Hinweis**
  - Nutzen Sie die $(n-1)$-Strategie.

Weglassen einer Bedingung
$(n-1)$-Methode



# Dreieckskonstruktion

http://www.juergen-roth.de/dynageo/konstruktion/index.html

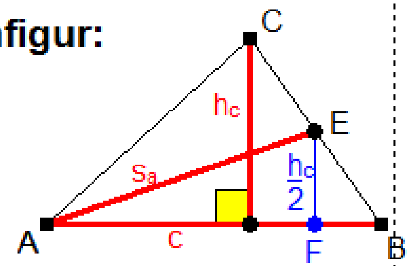
**Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus folgenden Längen: Seite c, Höhe $h_c$ und Seitenhalbierende $s_a$**

0 Länge_c=4 5

0 Länge_hc=3,5 5

0 Länge_sa=2,5 5

**Planfigur:**




Konstruktion einer Teilfigur

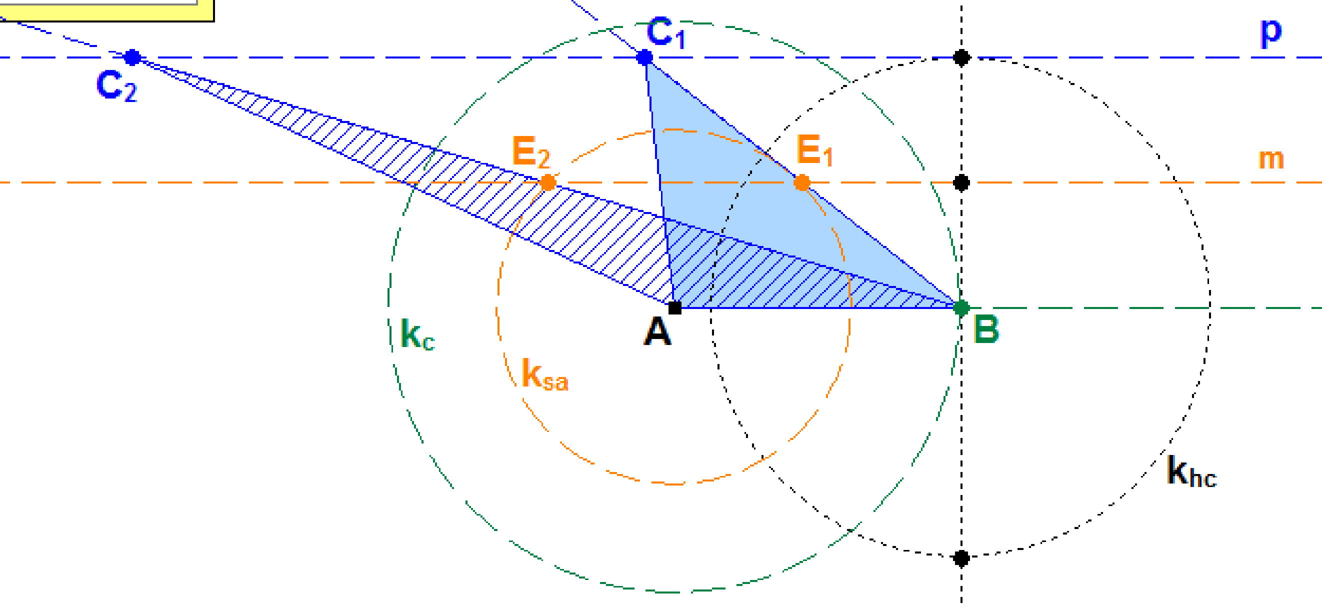
**Planfigur**

**1. Schritt**

**2. Schritt**

**3. Schritt**

**4. Schritt**



Reduktion auf ein Berechnungsproblem

# Kirchenfenster

## 1. Vorwärtsarbeiten

- ▷ Was ist bekannt? $\Rightarrow r, 4r$
  - $\Rightarrow$ Symmetrie!

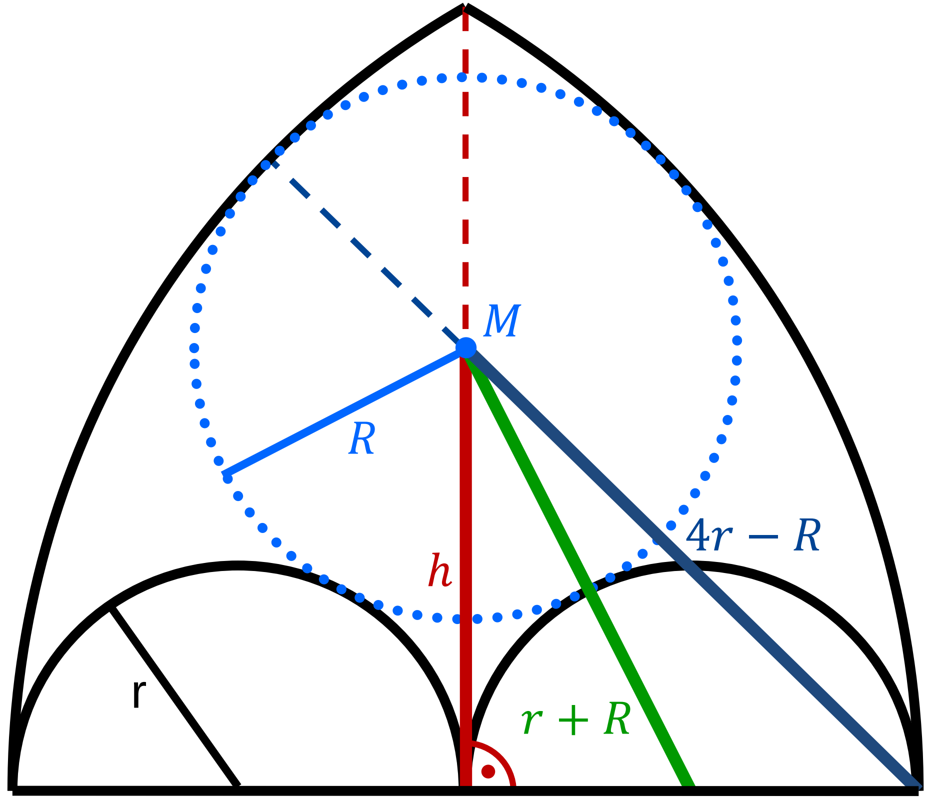
## 2. Rückwärtsarbeiten!

- ▷ Wie bekommt man den Kreis?
  - $\Leftarrow$ Mittelpunkt $M$
- ▷ Wie bekommt man $M$?
  - $\Leftarrow$ Radius $R$ oder Höhe $h$
- ▷ Wie bekommt man $R$ bzw. $h$?
  - $\Leftarrow$ ???

## 3. Hilfslinien einzeichnen!

- ▷ Wie liegt der neue Kreis zu den alten? $\Rightarrow$ Berühren!
- ▷ Weitere Hilfslinie? $\Rightarrow$ Ja
- ▷ Wie bekommt man $R$ bzw. $h$?

## 4. Berechnen!




(1) $h^2 = (r+R)^2 - r^2$

(2) $(4r-R)^2 = h^2 + (2r)^2$

Einsetzen von (1) in (2) liefert:

$$(4r-R)^2 = (r+R)^2 - r^2 + (2r)^2$$

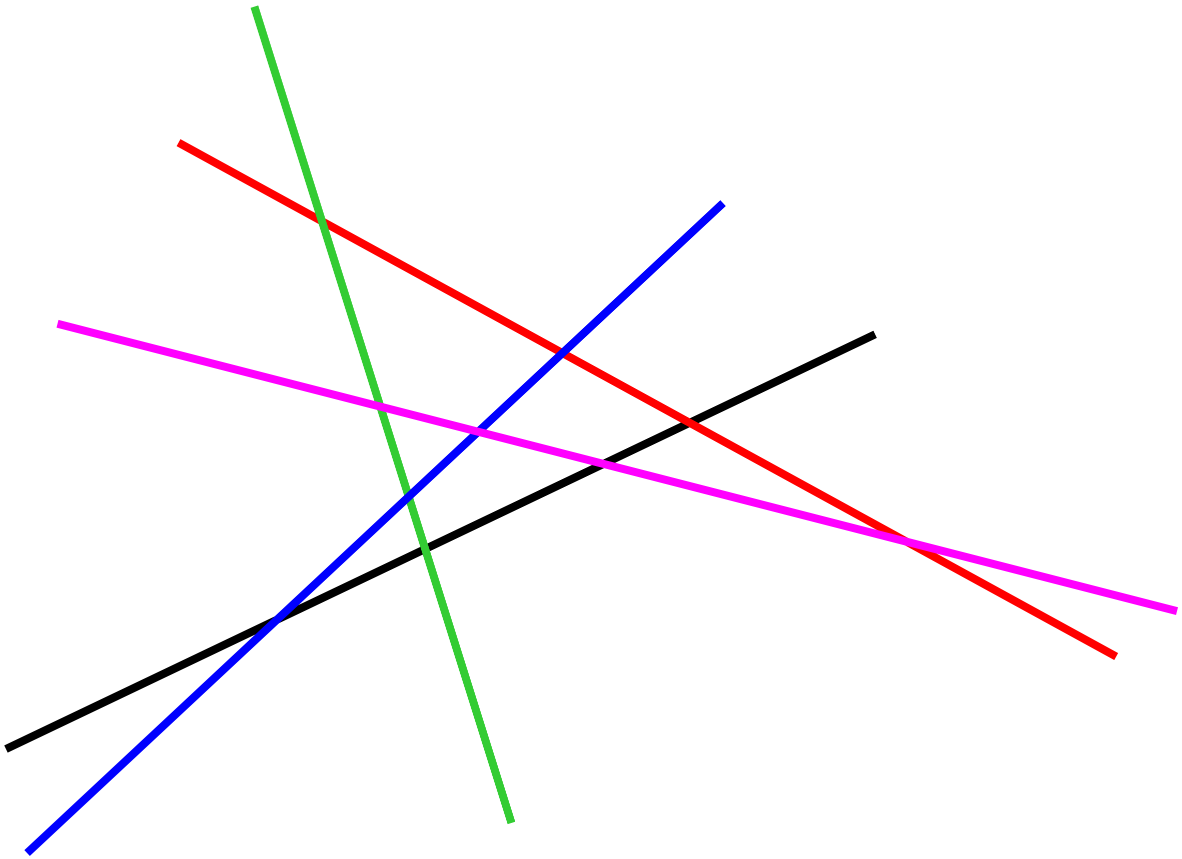
$$\Rightarrow \; \ldots \; \Rightarrow R = \tfrac{6}{5} \cdot r$$

# Maximale Anzahl $k$ von Schnittpunkten bei $n$ Geraden

heuristisches Hilfsmittel: Tabelle

| Anzahl $n$ der Geraden | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| max. Anzahl $k$ der Schnittpunkte | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 |

$= 0 + 1$ $= 1 + 2$ $= 3 + 3$ $= 6 + 4$

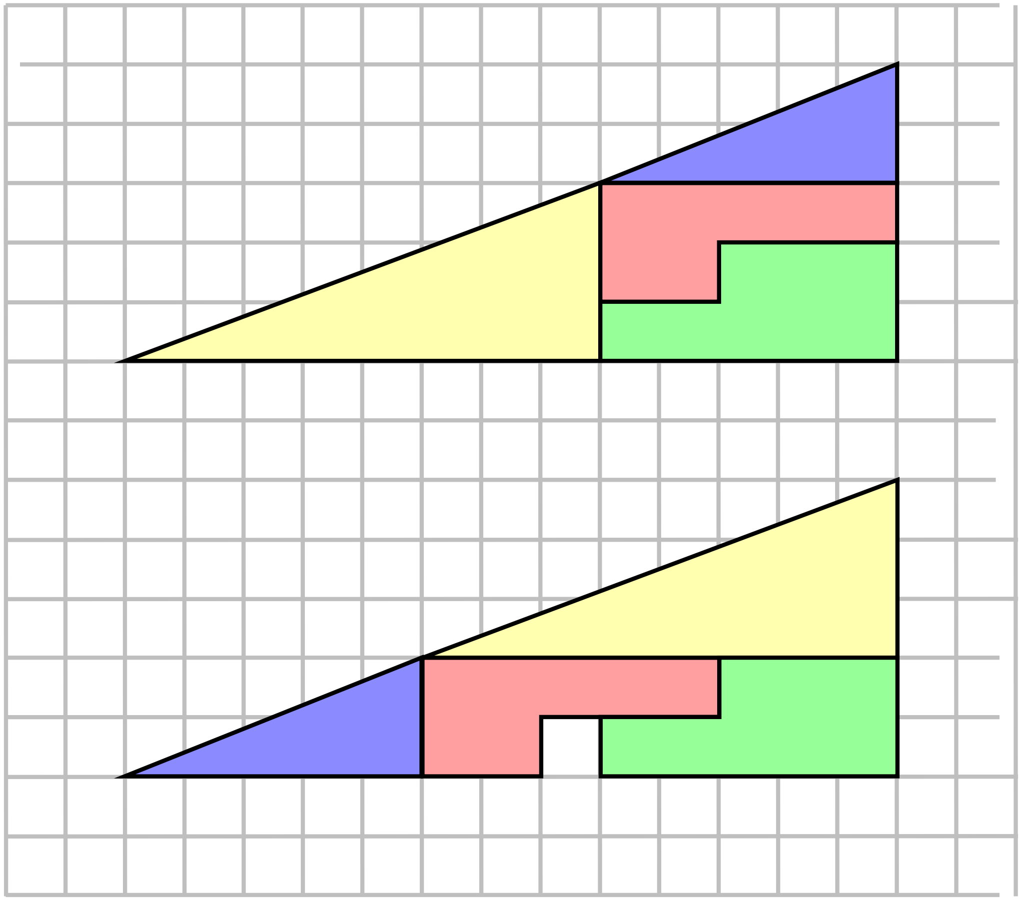


$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

Bei $n$ Geraden $(n > 1)$ kann es maximal $k = 1 + 2 + \cdots + (n-1)$ Schnittpunkte geben.

# Was stimmt hier nicht?

http://www.brefeld.homepage.t-online.de/dreieck.html

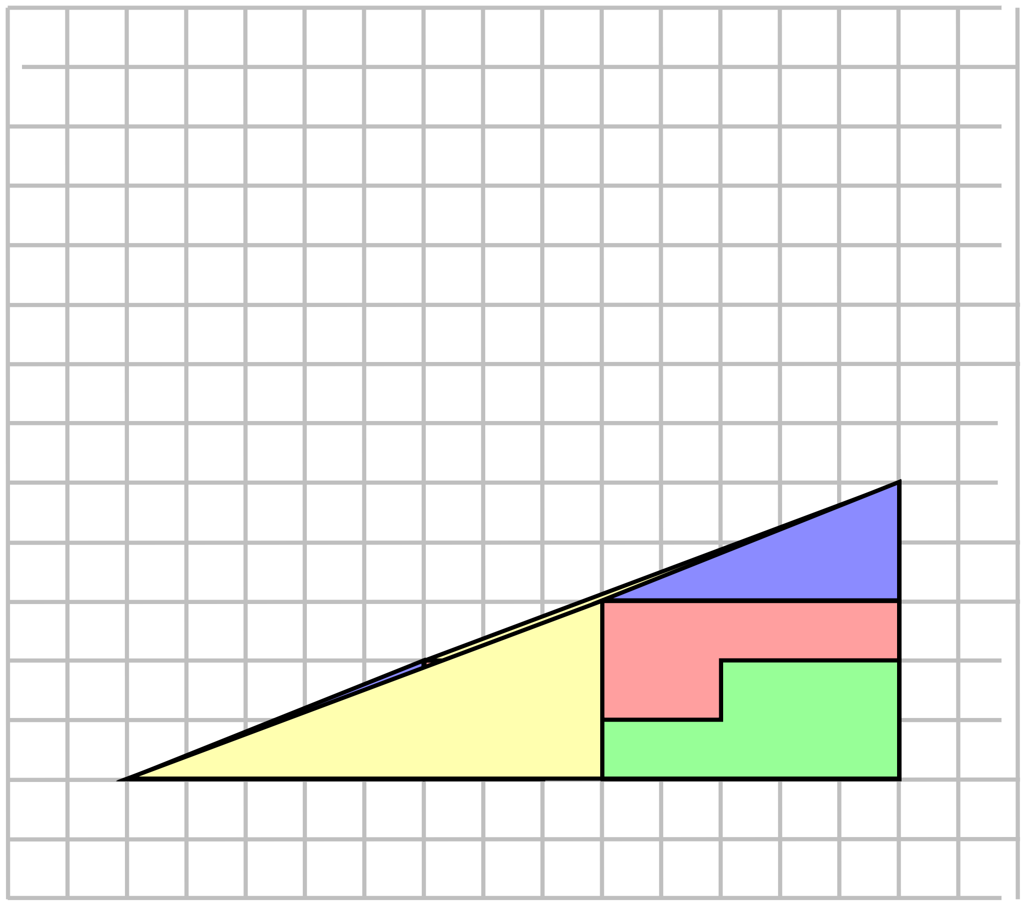


GeoGebra_Dateien\dreieck_oder.ggb

# Was stimmt hier nicht?

http://www.brefeld.homepage.t-online.de/dreieck.html

heuristische Strategie: Hinterfragen



GeoGebra_Dateien\dreieck_oder.ggb

Kapitel 5: Problemlösen

# 5.4 Beispiel: Problemlösestunde aus Japan

# Einstieg

- **Thema: Ähnlichkeit**
  Die Stunde ist Teil einer Unterrichts-sequenz zur Ähnlichkeit geometrischer Figuren.

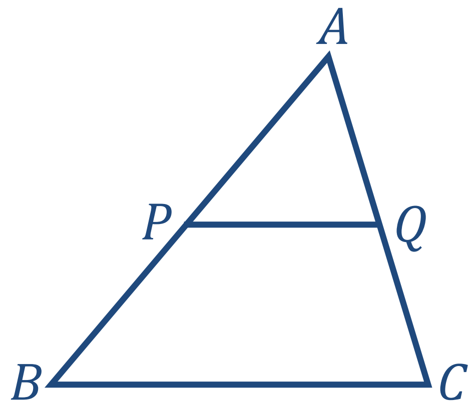
- **Einstieg**
  Wiederholung der Strahlensätze im Lehrervortrag

  (Keine Hausauf-gabenbesprechung)

$PQ \parallel BC$

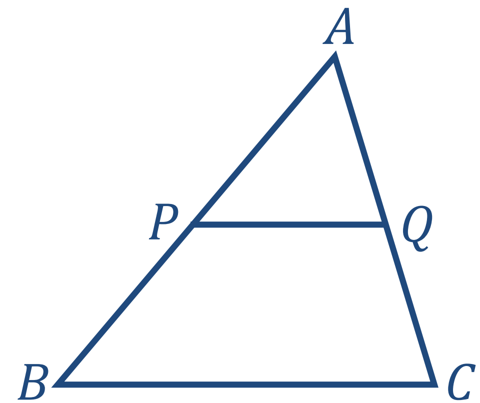
$\Rightarrow |AP| : |AB| = |AQ| : |AC|$

$= |PQ| : |BC|$



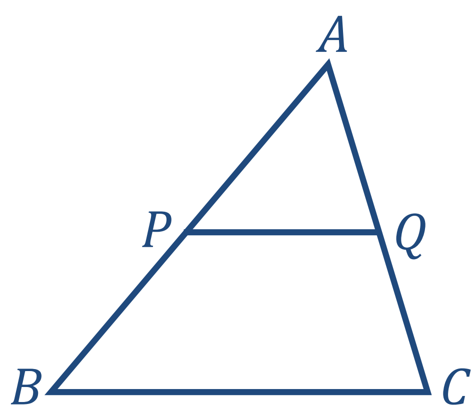

$|AP| : |AB| = |AQ| : |AC|$

$\Rightarrow PQ \parallel BC$



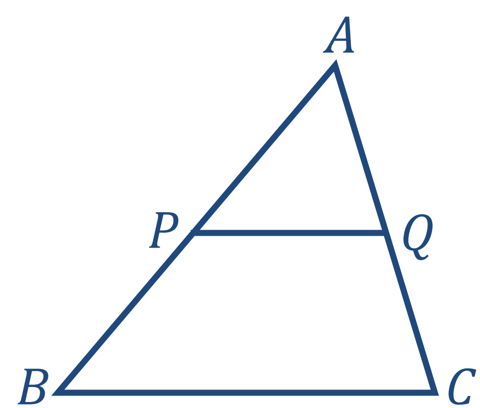

$PQ \parallel BC$

$\Rightarrow |AP| : |PB| = |AQ| : |QC|$




$|AP| : |PB| = |AQ| : |QC|$

$\Rightarrow PQ \parallel BC$



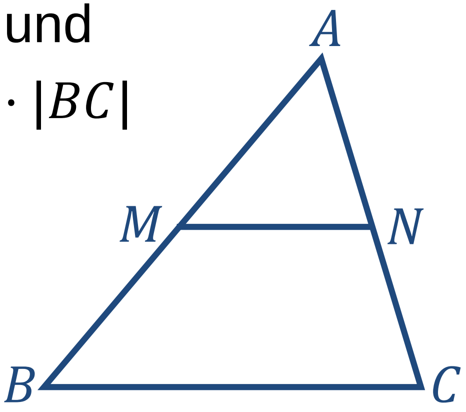
# Erarbeitung und Sicherung

- **Erarbeitung**
  Anschließend wird ein Spezialfall eingeführt und durch zwei Schüler bewiesen.

- **Sicherung**
  Das Theorem wird zur Berechnung von Strecken genutzt, die die Schenkel gegebener Dreiecke und Trapeze halbieren.

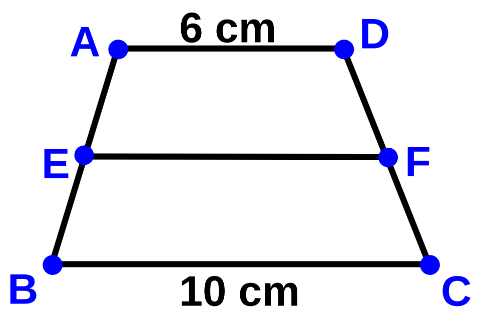
**Mittelpunktverbindungstheorem**
Wenn im Dreieck $\Delta ABC$ der Punkt $M$ der Mittelpunkt der Seite $[AB]$ und $N$ der Mittelpunkt der Seite $[AC]$ ist, dann gilt:

- $MN \parallel BC$ und
- $|MN| = \frac{1}{2} \cdot |BC|$



# Vertiefung

- **„open-ended problem solving“**
  - Zur Förderung des logischen Denkens verwenden japanische Lehrer den methodischen Ansatz des „open-ended problem solving“, der sich durch Erarbeitung unterschiedlicher Lösungsansätze in Einzel- und Gruppenarbeit auszeichnet.
- **Aufgabe für die Gruppenarbeit**
  - Es soll die Länge der Mittelparallele eines Trapezes mit bekannten Längen der parallelen Seiten bestimmt werden.




- **Der Lehrer**
  - klärt die Problemstellung und teilt die Klasse in Vierergruppen ein.
- **Die Schüler/innen**
  - tauschen ihre Ideen aus.

# Vertiefung

- **Während der Gruppenarbeit:**
  Die Lehrperson
  - beantwortet Fragen
  - berät oder hilft,
  - merkt sich die Lösungen der Schüler/innen
  - bereitet die anschließende Besprechung an der Tafel vor.

- **Sicherung**
  Vier der sieben verschiedenen von Schülern gefunden Lösungen, werden an der Tafel dargestellt.