Jürgen Roth

Didaktik der Geometrie

Modul 5: Fachdidaktische Bereiche

Didaktik der Geometrie

Didaktik der Geometrie

Kapitel 5: Problemlösen

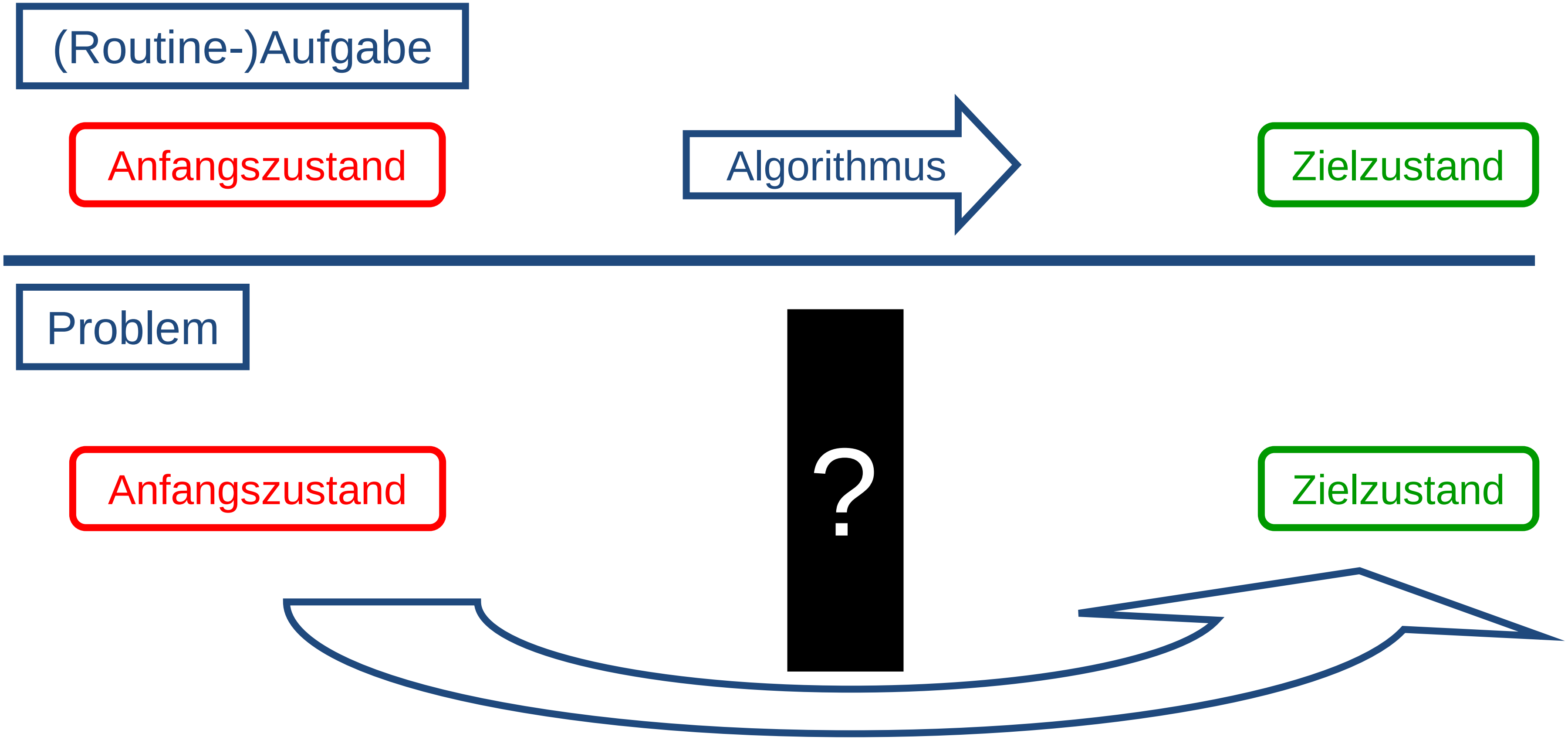
Kapitel 5: Problemlösen

Kapitel 5: Problemlösen

5.1 Was ist ein Problem?

Was ist ein Problem?

http://www.juergen-roth.de/lehre/skripte/did_grundlagen/fachdidaktische_grundlagen.pdf



Ein Problemlöser *kennt* keine Lösung der Aufgabe, also weder einen Operator noch eine Operatorkette, die den Anfangszustand in den Zielzustand überführt.

Weiteres zum Problemlösen: Siehe Skript „Fachdidaktische Grundlagen"

Kapitel 5: Problemlösen

5.2 Problemtypen im Geometrieunterricht

Im Geometrieunterricht: Nur Interpolationsprobleme

Interpolationsproblem

objektiv

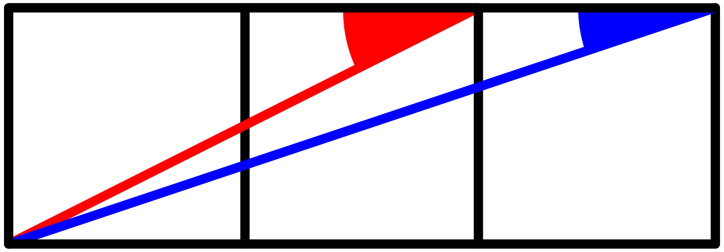
1. Anfangszustand (das Gegebene) ist genau definiert.
2. Zielzustand (das Gesuchte) ist genau definiert.

subjektiv

3. Problemlöser *verfügt* über Operationen, die eine Lösung des Problems gestatten.

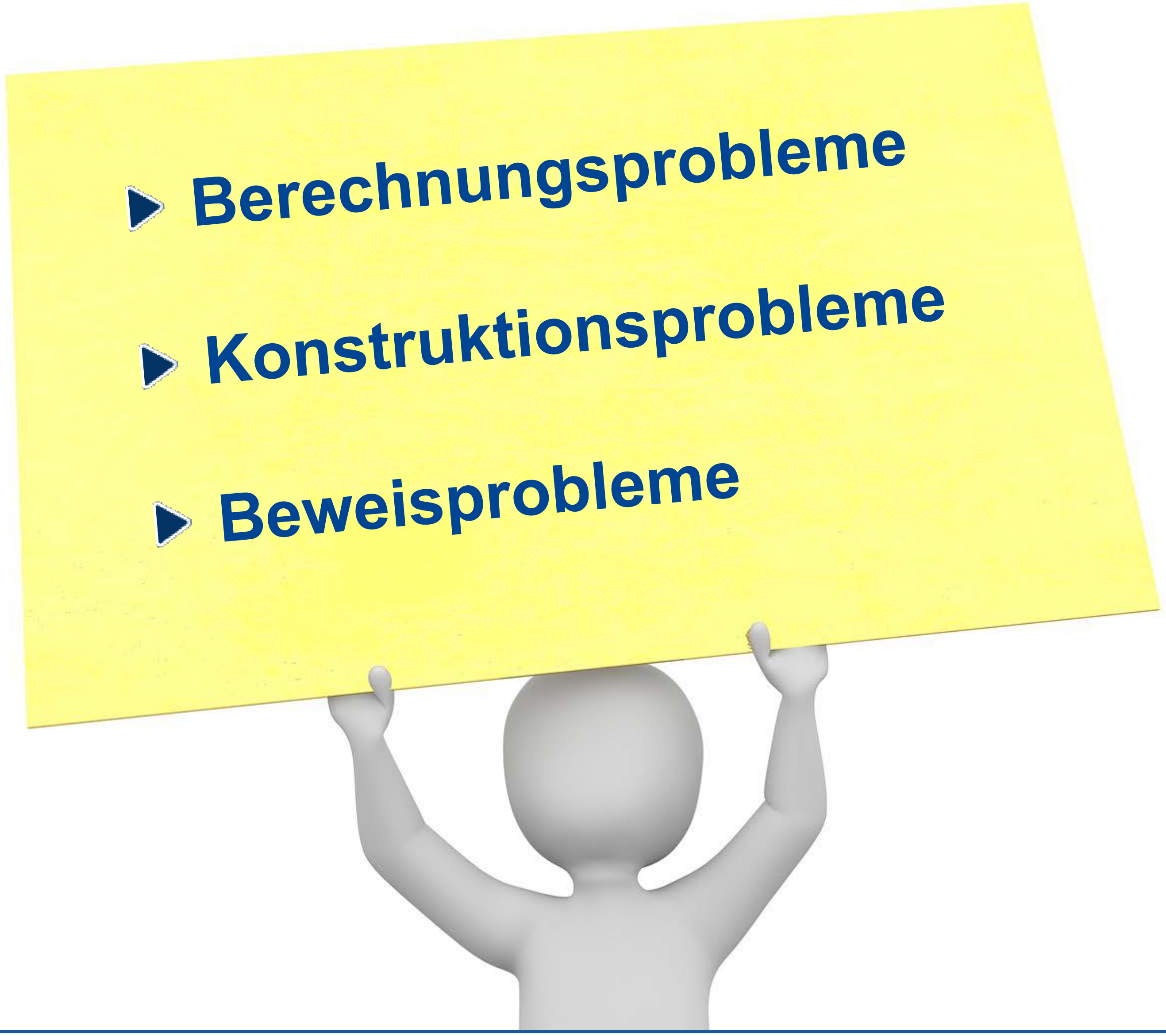
Interpolationsproblem?

Zeige: rot + blau $= 45°$



UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Interpolationsproblemtypen in der Geometrie



Berechnungsprobleme

Themenbereiche

- Winkelbeziehungen in Figuren
- Flächeninhalte von Polygonen und Kreisen
- Satzgruppe des Pythagoras
- Strahlensätze
- Trigonometrie

Schwierigkeiten

- Mangelnde Kenntnis von Operatoren
- Erkennen der Anwendbarkeit eines Operators
- Falsche Anwendung eines Operators
- Anwenden heuristischer Strategien

Lösungsfindung durch

- Vorwärtsarbeiten
- Rückwärtsarbeiten
- Lösen eines Gleichungssystems

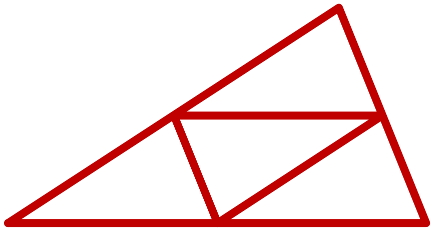
Konstruktionsprobleme

- **Themenbereiche**
  - Kongruenzabbildungen
  - Dreiecke und Vierecke
  - Zentrische Streckung
- **Problemanalyse**
  - Fallunterscheidung durchführen
    - Lösbarkeitsbedingungen untersuchen
    - verschiedene Fälle nacheinander lösen
  - Überlegungsfigur zeichnen
    - Gegebenes und Gesuchtes mit verschiedenen Farben markieren
- **Lösungsfindung (Heuristische Strategien)**
  - Weglassen einer Bedingung „$(n-1)$-Methode“
  - Konstruktion einer Teilkonfiguration
  - Reduktion auf ein Berechnungsproblem
  - Hilfslinie einzeichnen

Umgang mit Schwierigkeiten

Goldberg (1992). Beweisen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. *MU 38(6)*, S. 33-46

- **Mangelnde Operatorenkenntnis**
  - Anwenden in einfachen Übungsaufgaben mit Problemcharakter (vgl. Goldberg)
  - Liste mit benötigten Operationen anfertigen (Bilder, Formeln, …)
- **Erkennen der Anwendbarkeit eines Operators**
  - Erkennen von (Teil-)Konfigurationen üben

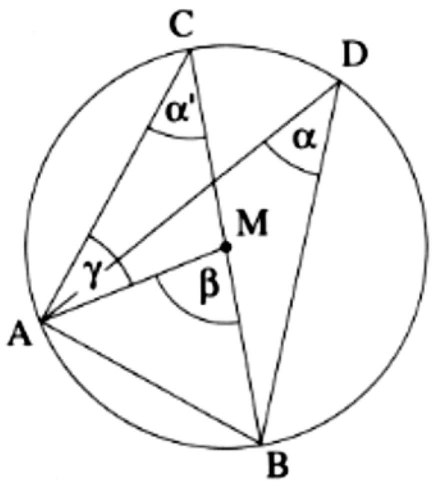


Anzahl der Trapeze?

- **Falsche Anwendung eines Operators**
  - Vereinbarung: Eigenschaften von Teilfiguren dürfen nicht der Anschauung entnommen werden
- **Anwenden heuristischer Strategien**
  - Zunächst nur Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten einsetzen

Umgang mit mangelnder Operatorkenntnis

Beweis: Mittelpunktswinkel-Umfangswinkel-Satz



Vor.: α ist Umfangswinkel über AB
β ist Mittelpunktswinkel über AB

Beh.: $\beta = 2\alpha$

Bew.:

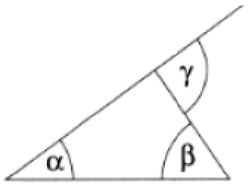
(1)	$\alpha' = \gamma$	(Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)
(2)	$\beta = \alpha' + \gamma$	(Außenwinkelsatz)
(3)	$\beta = \alpha' + \alpha'$	(1) und (2)
(4)	$\beta = 2\alpha'$	
(5)	$\beta = 2\alpha$	(Umfangswinkelsatz)

■

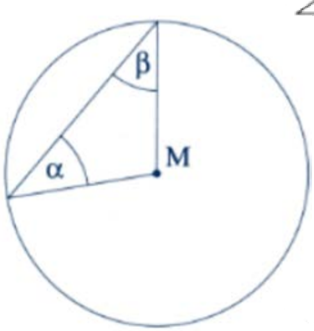
Goldberg (1992). Beweisen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. *MU 38(6)*, S. 33-46

Umgang mit mangelnder Operatorkenntnis

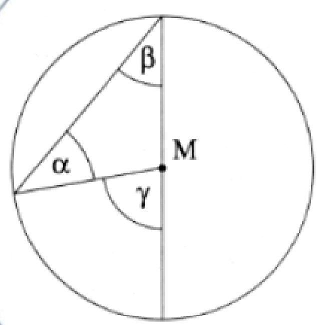
▶ Vorbereitungsaufgaben



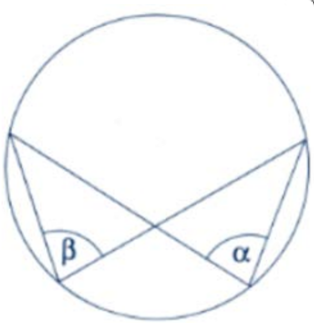
- Geg.: $\alpha = 20°; \beta = 40°$
  Ges.: γ
  Lös.: $\gamma = 20° + 40° = 60°$ (Außenwinkelsatz)



- Geg.: $\alpha = 15°$
  Ges.: β
  Lös.: $\beta = \alpha = 15°$ (Basiswinkelsatz)



- Geg.: $\alpha = 30°$
  Ges.: γ
  Lös.: (1) $\beta = \alpha = 30°$ (Basiswinkelsatz)
  (2) $\gamma = 30° + 30° = 60°$ (Außenwinkelsatz)



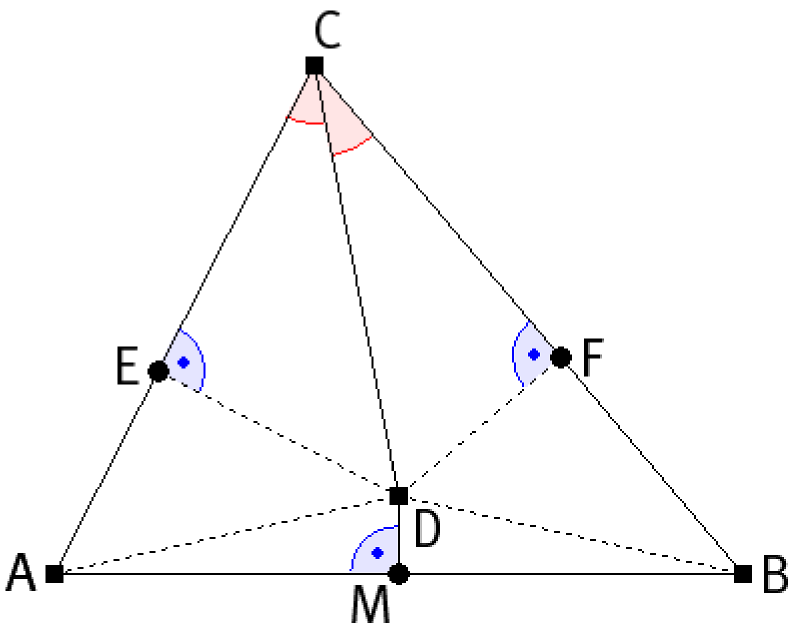
- Geg.: $\beta = 27°$
  Ges.: α
  Lös.: $\alpha = \beta = 27°$ (Umfangswinkelsatz)

Goldberg (1992). Beweisen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. *MU 38(6)*, S. 33-46

Wo steckt der Fehler?

Ein Beweis?

- **Paradoxon**
  - Jedes Dreieck ist gleichschenklig.
- **Beweis:** Im Dreieck ΔABC
  - halbiere CD den Winkel bei C
  - und sei MD Mittelsenkrechte von $[AB]$.
  - Dann ist $\Delta CED \cong \Delta CFD$ nach Kongruenzsatz WSW.
  - $\Delta AMD \cong \Delta BMD$ nach Kongruenzsatz SWS.
  - Aus $|ED| = |FD|$, $|AD| = |BD|$ und $\measuredangle AED = \measuredangle BFD = 90°$ folgt mit SsW: $\Delta ADE \cong \Delta\mathrm{BDF}$



- Also ist $|AE| = |BF|$.
- Damit ist $|AC| = |BC|$.
- ΔABC ist gleichschenklig.

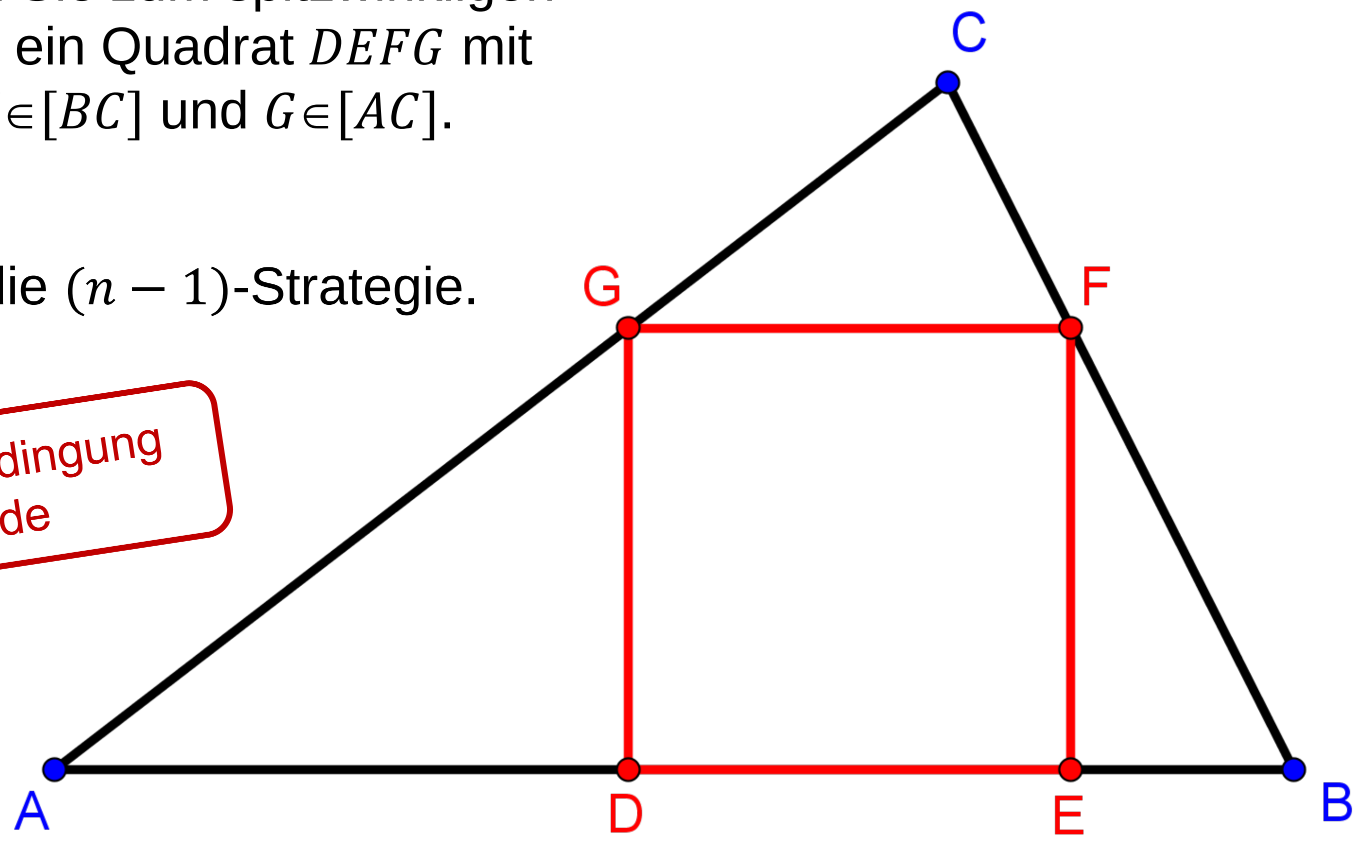
Kapitel 5: Problemlösen

5.3 Beispiele für Problemaufgaben

Einem Dreieck ein Quadrat einbeschreiben

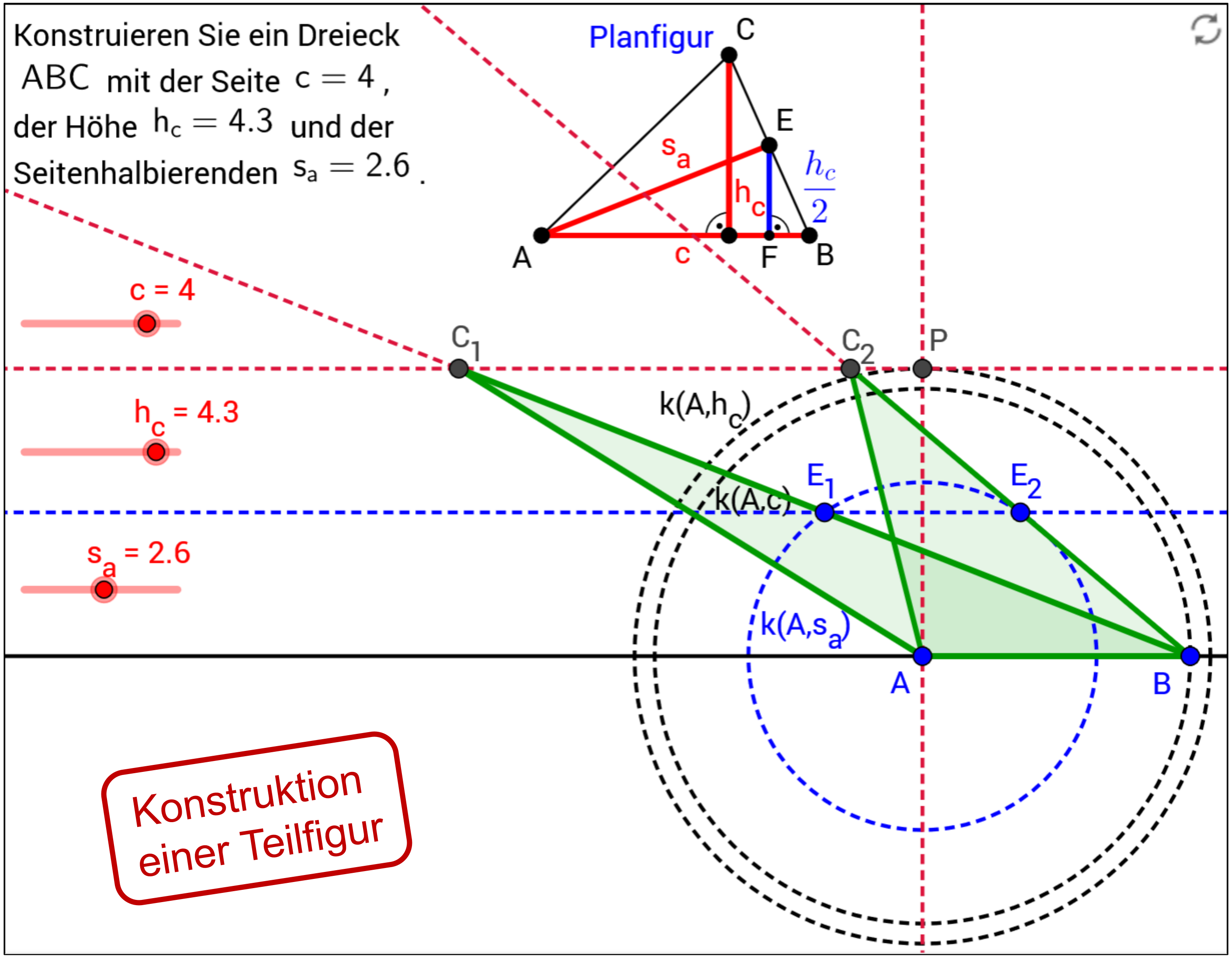
- **Aufgabe**
  - Konstruieren Sie zum spitzwinkligen Dreieck ABC ein Quadrat $DEFG$ mit $D, E \in [AB]$, $F \in [BC]$ und $G \in [AC]$.
- **Hinweis**
  - Nutzen Sie die $(n-1)$-Strategie.

Weglassen einer Bedingung
$(n-1)$-Methode



https://www.geogebra.org/m/CKPpUnUr

Dreieckskonstruktion



https://www.geogebra.org/m/WBMHuKW5 • https://www.geogebra.org/m/x82N6kk2

Reduktion auf ein Berechnungsproblem

Kirchenfenster

1. Vorwärtsarbeiten

- ▷ Was ist bekannt? $\Rightarrow r, 4r$

  $\Rightarrow$ Symmetrie!

2. Rückwärtsarbeiten!

- ▷ Wie bekommt man den Kreis?

  $\Leftarrow$ Mittelpunkt M
- ▷ Wie bekommt man M?

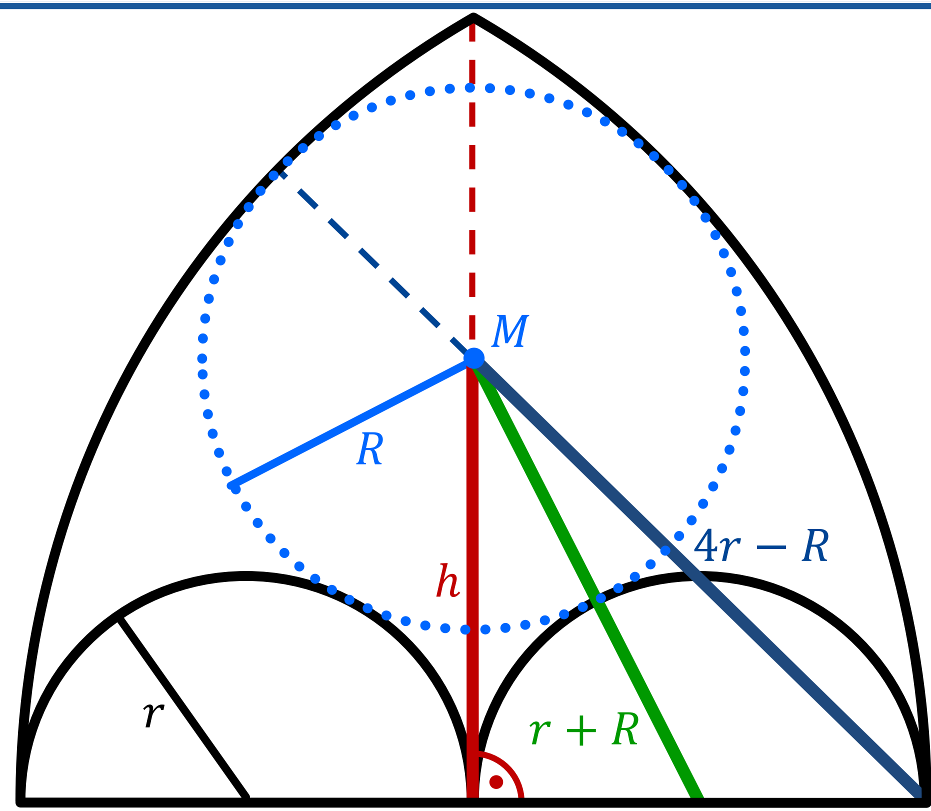
  $\Leftarrow$ Radius R oder Höhe h
- ▷ Wie bekommt man R bzw. h?

  $\Leftarrow$???

3. Hilfslinien einzeichnen!

- ▷ Wie liegt der neue Kreis zu den alten? $\Rightarrow$ Berühren!
- ▷ Weitere Hilfslinie? $\Rightarrow$ Ja
- ▷ Wie bekommt man R bzw. h?

4. Berechnen!



(1) $h^2 = (r+R)^2 - r^2$

(2) $(4r-R)^2 = h^2 + (2r)^2$

Einsetzen von (1) in (2) liefert:

$$(4r-R)^2 = (r+R)^2 - r^2 + (2r)^2$$

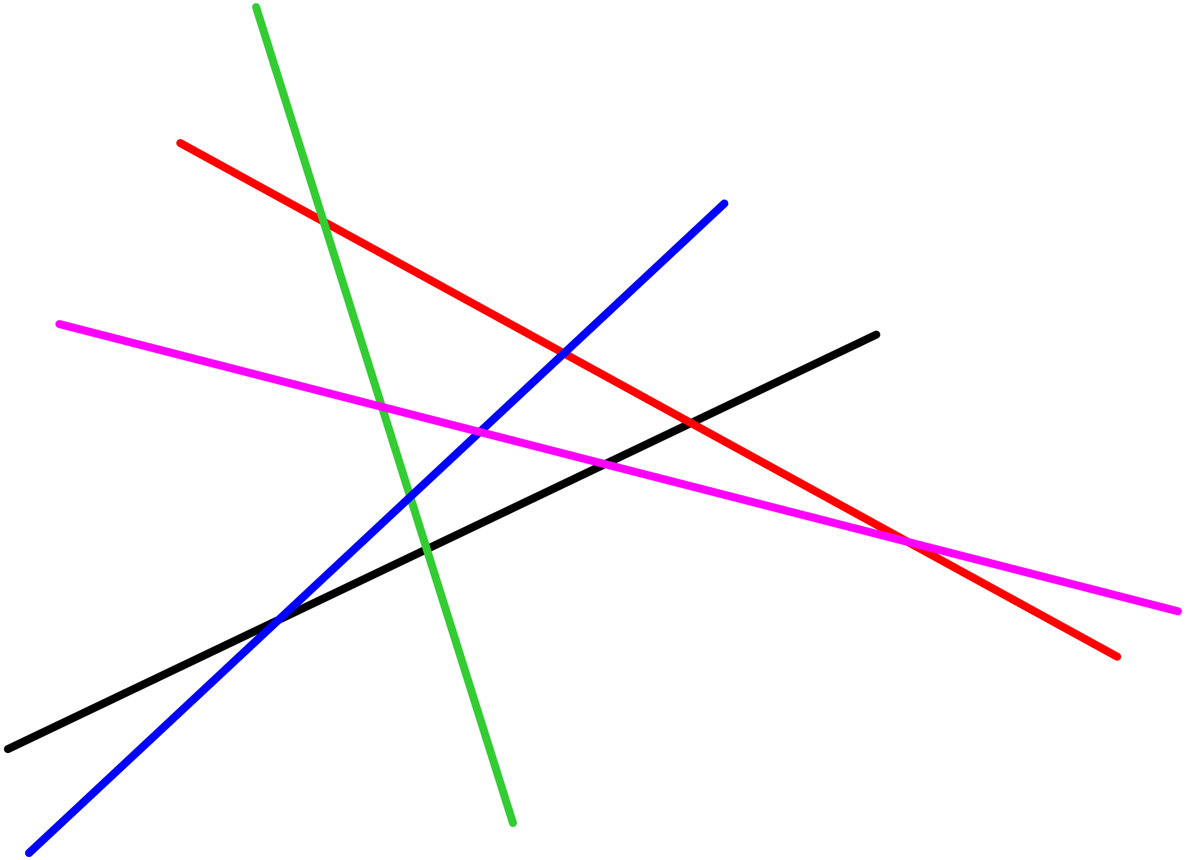
$$\Rightarrow \ \ldots \ \Rightarrow R = \tfrac{6}{5} \cdot r$$

Maximale Anzahl k von Schnittpunkten bei n Geraden

heuristisches Hilfsmittel: Tabelle

Anzahl n der Geraden	1	2	3	4	5
max. Anzahl k der Schnittpunkte	0	1	3	6	10

$= 0 + 1$ $= 1 + 2$ $= 3 + 3$ $= 6 + 4$

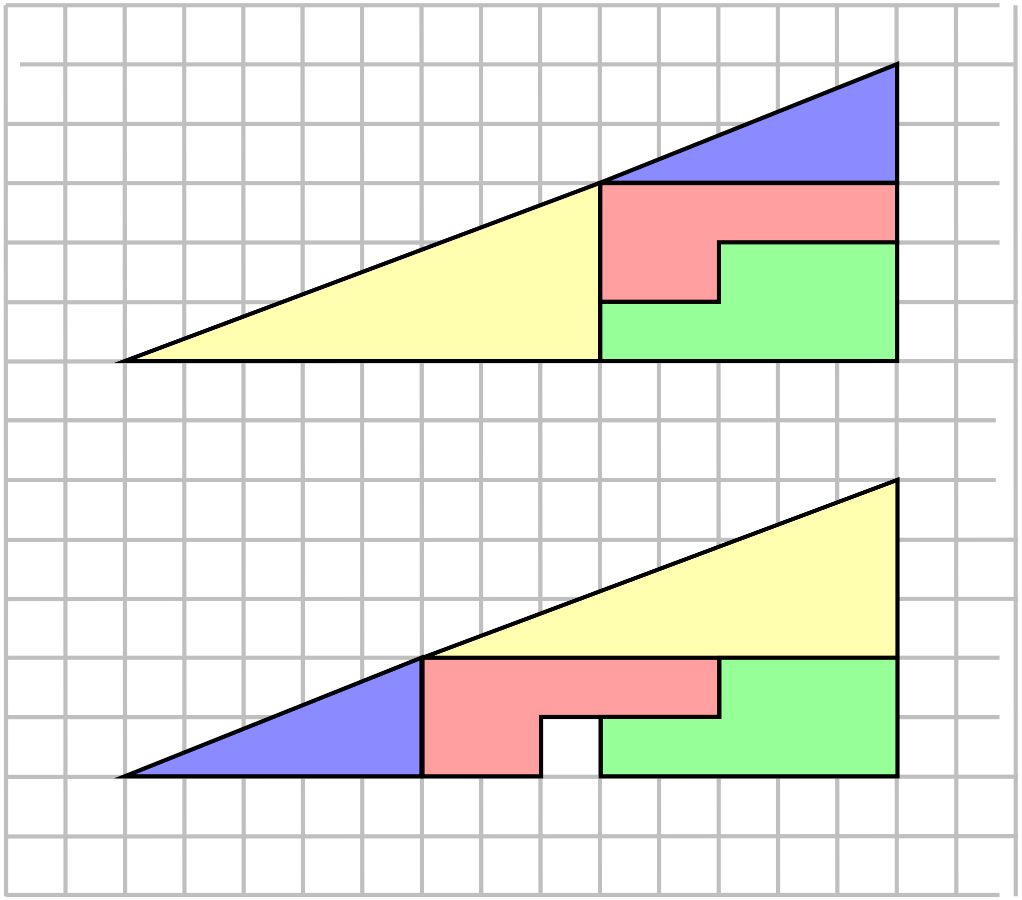


$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

Bei n Geraden $(n > 1)$ kann es maximal $k = 1 + 2 + \cdots + (n-1)$ Schnittpunkte geben.

Was stimmt hier nicht?

http://www.brefeld.homepage.t-online.de/dreieck.html

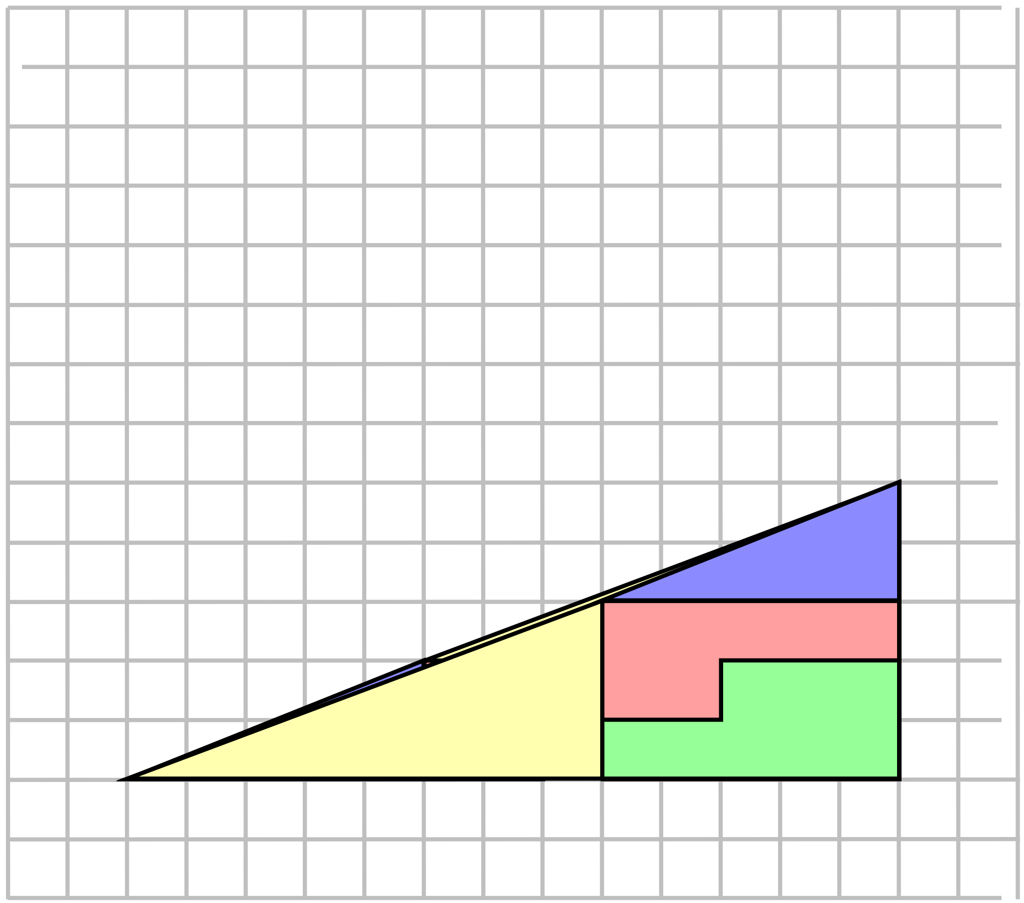


https://www.geogebra.org/m/ADWhG253

Was stimmt hier nicht?

http://www.brefeld.homepage.t-online.de/dreieck.html

heuristische Strategie: Hinterfragen



https://www.geogebra.org/m/ADWhG253

Kapitel 5: Problemlösen

5.4 Beispiel: Problemlösestunde aus Japan

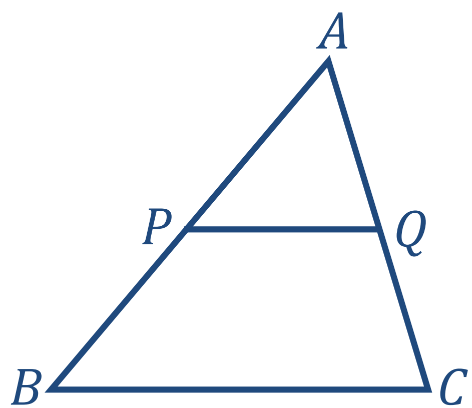
Einstieg

- **Thema: Ähnlichkeit**
  Die Stunde ist Teil einer Unterrichts-sequenz zur Ähnlichkeit geometrischer Figuren.

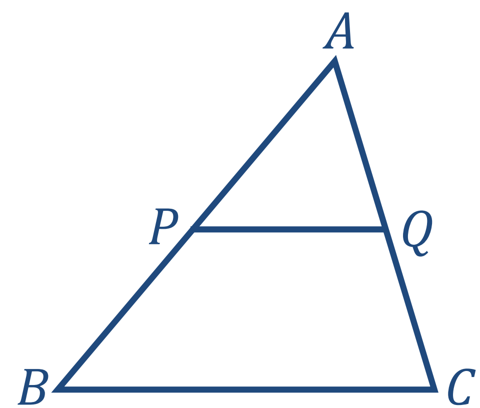
- **Einstieg**
  Wiederholung der Strahlensätze im Lehrervortrag

  (Keine Hausauf-gabenbesprechung)

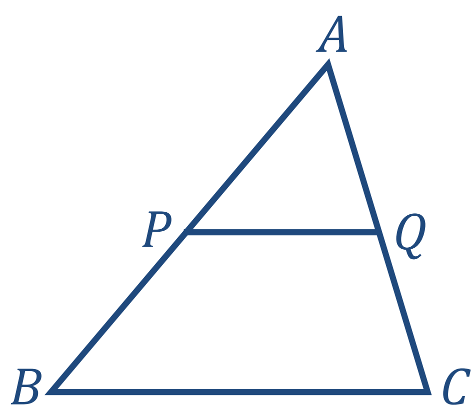
$PQ \parallel BC$
$\Rightarrow |AP| : |AB| = |AQ| : |AC|$
$= |PQ| : |BC|$



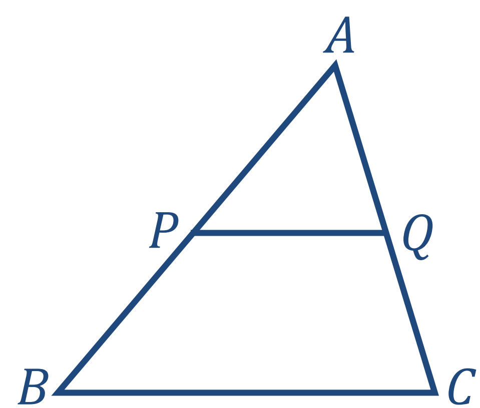
$|AP| : |AB| = |AQ| : |AC|$
$\Rightarrow PQ \parallel BC$



$PQ \parallel BC$
$\Rightarrow |AP| : |PB| = |AQ| : |QC|$



$|AP| : |PB| = |AQ| : |QC|$
$\Rightarrow PQ \parallel BC$



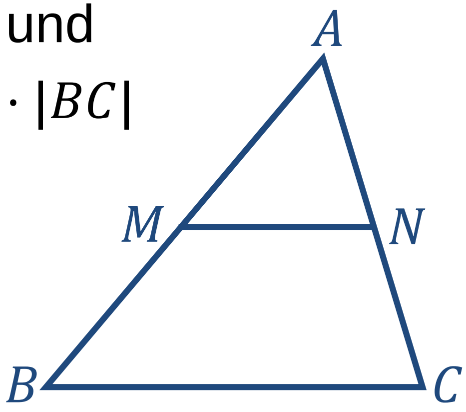
Erarbeitung und Sicherung

- **Erarbeitung**
  Anschließend wird ein Spezialfall eingeführt und durch zwei Schüler bewiesen.

- **Sicherung**
  Das Theorem wird zur Berechnung von Strecken genutzt, die die Schenkel gegebener Dreiecke und Trapeze halbieren.

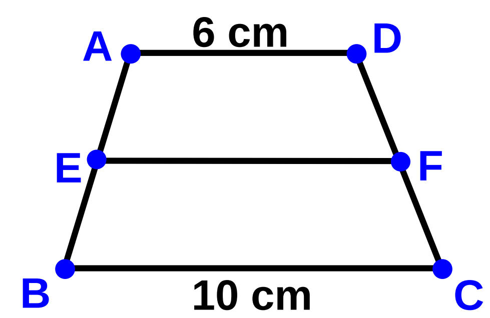
Mittelpunktverbindungstheorem
Wenn im Dreieck ΔABC der Punkt M der Mittelpunkt der Seite $[AB]$ und N der Mittelpunkt der Seite $[AC]$ ist, dann gilt:

- $MN \parallel BC$ und
- $|MN| = \frac{1}{2} \cdot |BC|$



Vertiefung

- **„open-ended problem solving“**
  - Zur Förderung des logischen Denkens verwenden japanische Lehrer den methodischen Ansatz des „open-ended problem solving“, der sich durch Erarbeitung unterschiedlicher Lösungsansätze in Einzel- und Gruppenarbeit auszeichnet.
- **Aufgabe für die Gruppenarbeit**
  - Bestimmt die Länge der Mittelparallelen eines Trapezes mit bekannten Längen der parallelen Seiten.



- **Der Lehrer**
  - klärt die Problemstellung und teilt die Klasse in Vierergruppen ein.
- **Die Schüler/innen**
  - tauschen ihre Ideen aus.

http://mste.illinois.edu/users/aki/open_ended/WhatIsOpen-ended.html

Vertiefung

- **Während der Gruppenarbeit:**
  Die Lehrperson
  - beantwortet Fragen
  - berät oder hilft,
  - merkt sich die Lösungen der Schüler/innen
  - bereitet die anschließende Besprechung an der Tafel vor.

- **Sicherung**
  Vier der sieben verschiedenen von Schülern gefundenen Lösungen, werden an der Tafel dargestellt.