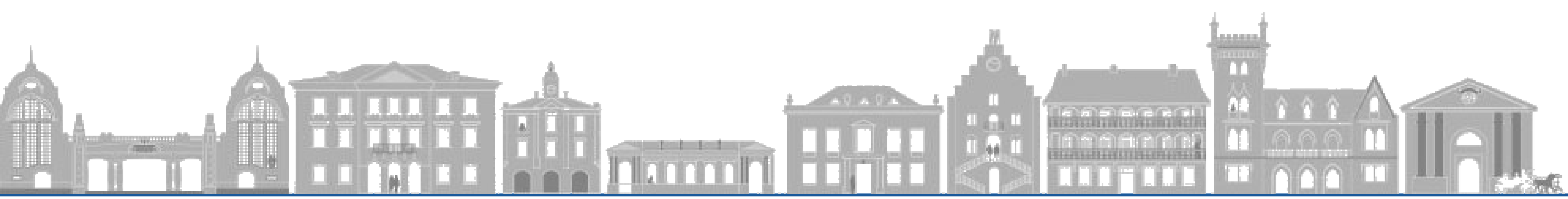
Jürgen Roth

Didaktik der Geometrie

Modul 5: Fachdidaktische Bereiche



Didaktik der Geometrie

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)

Didaktik der Geometrie

Kapitel 4: Argumentieren und Beweisen

Kapitel 4: Argumentieren und Beweisen

Kapitel 4: Argumentieren und Beweisen

4.1 Beweisen?

Was ist ein Beweis?

- **Ein Beweis …**
  - ist eine „logische Operation, die unter Zuhilfenahme von allgemein akzeptierten Gedankengängen aus schon gegebenen Voraussetzungen neue Erkenntnisse gewinnt.“
    Lexikon der Mathematik
  - eines mathematischen Satzes S ist dessen logische Zurückführung auf andere mathematische Sätze $S_1, S_2, \ldots, S_n$.
  - Ist S mit Hilfe von $S_1, S_2, \ldots, S_n$ bewiesen, so folgt die Gültigkeit des Satzes S aus der Gültigkeit der Sätze $S_1, S_2, \ldots, S_n$.
  - Das bedeutet:
    - Wenn $S_1, S_2, \ldots, S_n$ wahre Aussagen sind, dann ist auch S eine wahre Aussage.
    - Wenn man die Gültigkeit der Sätze $S_1, S_2, \ldots, S_n$ anerkennt, dann kann man die Gültigkeit von S nicht bestreiten.

Holland, G. (2001). Geometrie in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, S. 33

Warum Beweisen?

Anwendungsaspekt

Ist die Allgemeingültigkeit einer *Aussage*

- *nicht anschaulich klar*, so dient ein Beweis dieser Aussage dazu *ein*zu*sehen, dass*
- *anschaulich klar*, dann kann ein Beweis dazu dienen, zu *verstehen, warum*

die Aussage *allgemeingültig* ist.

Struktureller Aspekt

- Spielt in der Sek. I praktisch keine Rolle

Deduktiver Aspekt

- Kann man den Satz mit Hilfe bereits bekannter Sätze herleiten? (Prozessziel des Beweisens)

Aspekt des Problemlösens

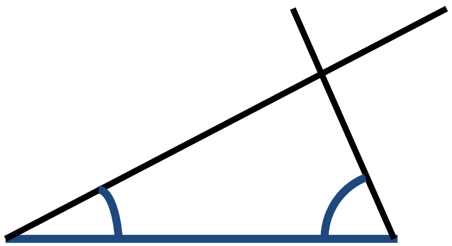
- Beweisfindung – nicht Beweisdarstellung – steht im Vordergrund
- Ziel des Beweisens: Beitrag zu Prozesszielen des Problemlösens

Kapitel 4: Argumentieren und Beweisen

4.2 Niveaustufen des Beweisens

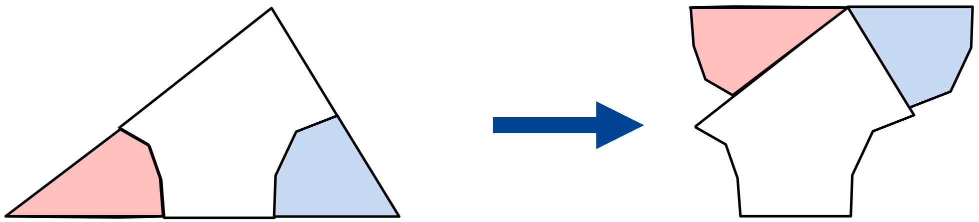
Verschiedene Begründungsweisen

- **Erfahren von Handlungsspielräumen und Sachzwängen**



Konstruiere ein Dreieck mit folgenden Innenwinkelgrößen:
$\alpha = 40°, \beta = 55°, \gamma = 100°$

- **Probieren**

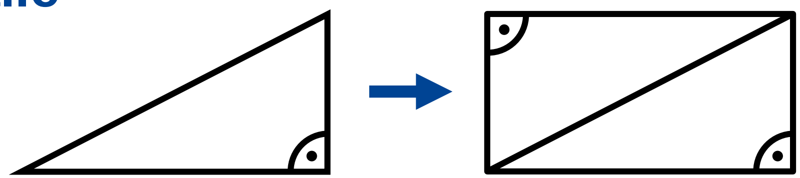


- **Messen**

α	β	γ	$\alpha + \beta + \gamma$
31°	44,5°	105°	180,5°
51°	92°	36°	179°

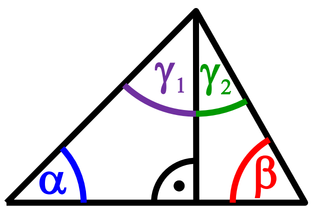
Verschiedene Begründungsweisen

Sonderfälle



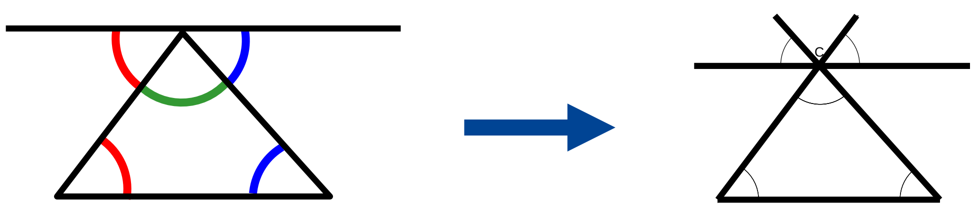
Innenwinkelsumme im Rechteck: $4 \cdot 90° = 360°$

Innenwinkelsumme im rechtw. Dreieck: $\frac{360°}{2} = 180°$



$$
\begin{aligned}
&180° + 180° \\
&= (\alpha + 90° + \gamma_1) + (90° + \beta + \gamma_2) \\
&= \alpha + 90° + \gamma_1 + 90° + \beta + \gamma_2 \\
&= \alpha + \beta + \underbrace{(\gamma_1 + \gamma_2)}_{=\gamma} + 180° \\
&\Rightarrow 180° = \alpha + \beta + \gamma
\end{aligned}
$$

Klassischer Beweis



Winkel-verschiebung

http://www.juergen-roth.de/dynageo/winkelverschiebung/innenwinkelsumme_dreieck.html

Niveaustufen des Beweisens

- **Stufe des Argumentierens**
  - Nur mündliche Argumentation
  - Bezugnahme auf die Beweisfigur
  - Veranschaulichende Hilfsmittel
  - Beweisverständnis wird nicht angestrebt
  - *Ziel*
    - Unterschied zwischen einer Vermutung und der Einsicht in das „Warum“ erfahren
  - *Tätigkeiten*
    - Argumente angeben
    - Argumente aufgreifen und weiterführen oder widerlegen
    - Beweisgedanken verstehen & in eigenen Worten wiedergeben

präformale, anschauliche Beweise

Niveaustufen des Beweisens

- **Stufe des inhaltlichen Schließens**

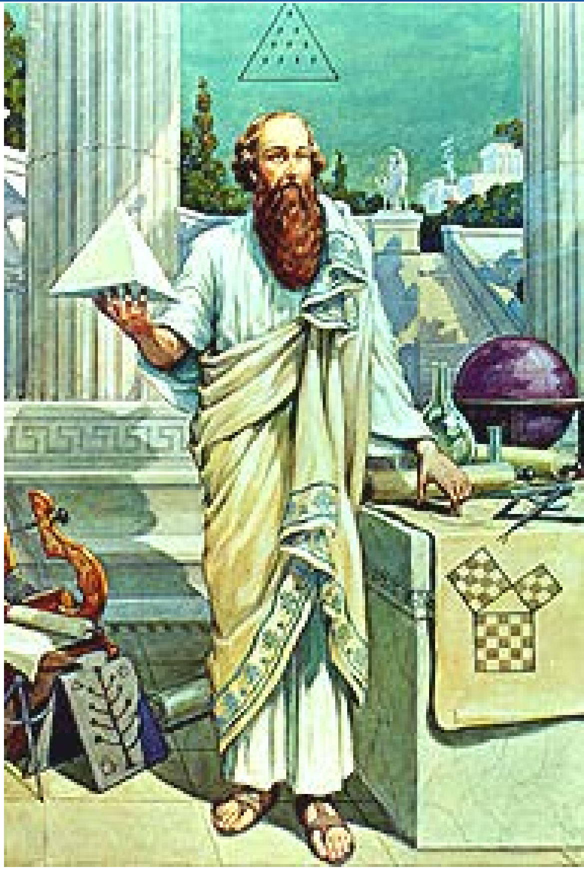
formale Beweise

  - Notation als Sequenz von Beweisschritten
  - Die Schülertätigkeit beschreibende Darstellung
  - keine lückenlose Angabe der benutzten Sätze
  - Bezug auf die Beweisfigur bei Aussagen zur Anordnung erlaubt
  - *Ziel*
    - Sicherung und/oder Verständnis der Allgemeingültigkeit
  - *Tätigkeiten*
    - Die zum Beweis benutzten Sätze angeben
    - Einen Beweis schriftlich reproduzieren
    - Fallunterscheidungen durchführen
    - einfache Beweise selbst finden

Niveaustufen des Beweisens

- **Stufe des formalen Schließens**
  - Beweisen hauptsächlich unter dem Gesichtspunkt der Geometrie als formaler Theorie
  - *Ziel:*
    - Ein in Beweiszeilen dargestellter Beweis.
    - Jede Zeile ist entweder eine Voraussetzung oder folgt aus darüber stehenden Beweiszeilen.
  - *Tätigkeiten*
    - Als Sequenz von Beweiszeilen notieren
    - Auf Schlüssigkeit und Lückenlosigkeit überprüfen
    - Beweise durch Einfügen zusätzlicher Schritte verfeinern
    - Verschiedene Beweise zum selben Sachverhalt im Hinblick auf die verwendeten Beweismittel bewerten

postformale Beweise

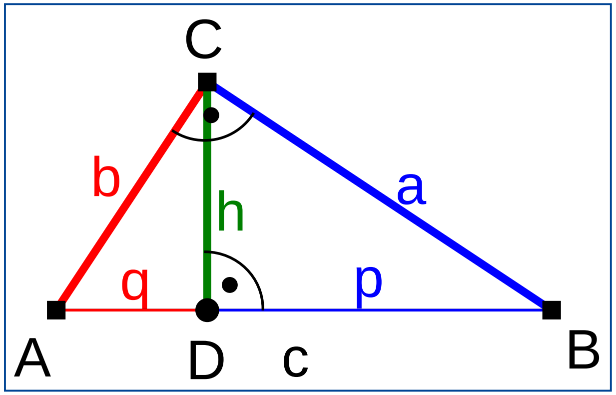


Kapitel 4: Argumentieren und Beweisen

4.3 Beispiel: Satzgruppe des Pythagoras

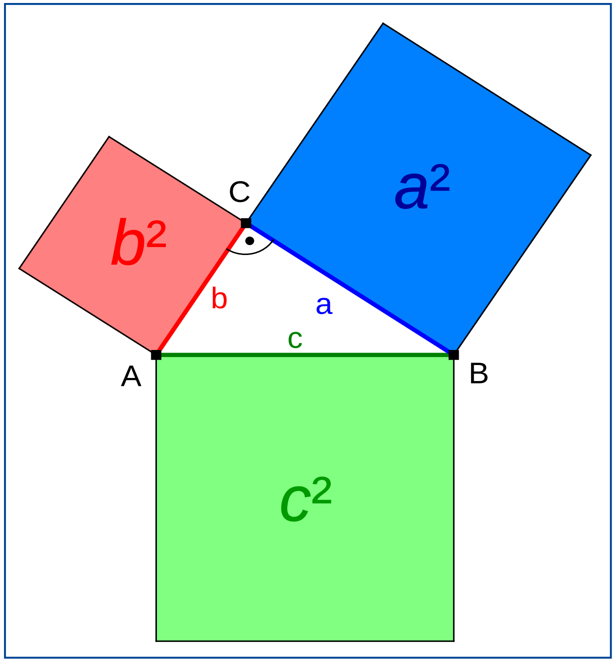
Satz des Pythagoras

- **Satzgruppe des Pythagoras**
  - Bezieht sich auf rechtwinklige Dreiecke.
  - Zu ihr gehören folgende Sätze:



- **Satz des Pythagoras**
  - Bei jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



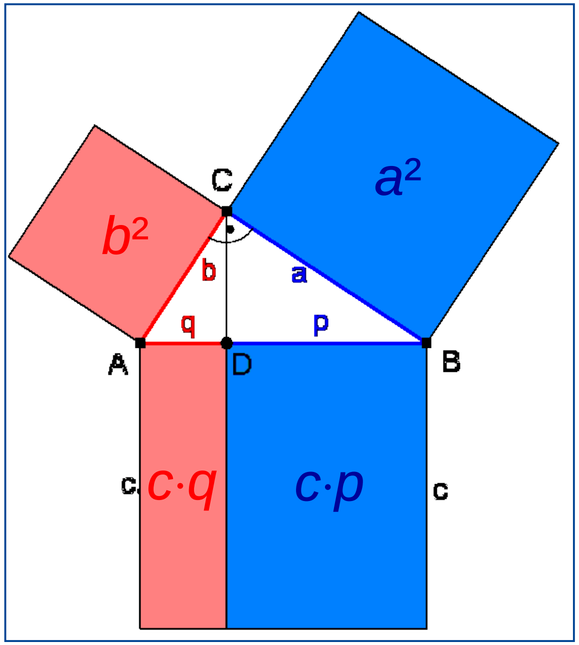
http://www.juergen-roth.de/dynageo/pythagoras/

Kathetensatz und Höhensatz

Kathetensatz

- Bei jedem rechtwinkligen Dreieck hat ein Kathetenquadrat denselben Flächeninhalt wie das Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

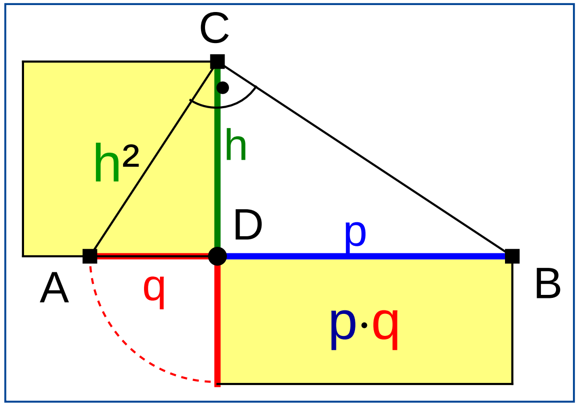
$$a^2 = c \cdot p \quad \text{und} \quad b^2 = c \cdot q$$



Höhensatz

- Bei jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Höhenquadrat denselben Flächeninhalt wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusen-abschnitten.

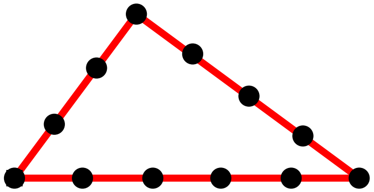
$$h^2 = p \cdot q$$



Logische Struktur der Satzgruppe

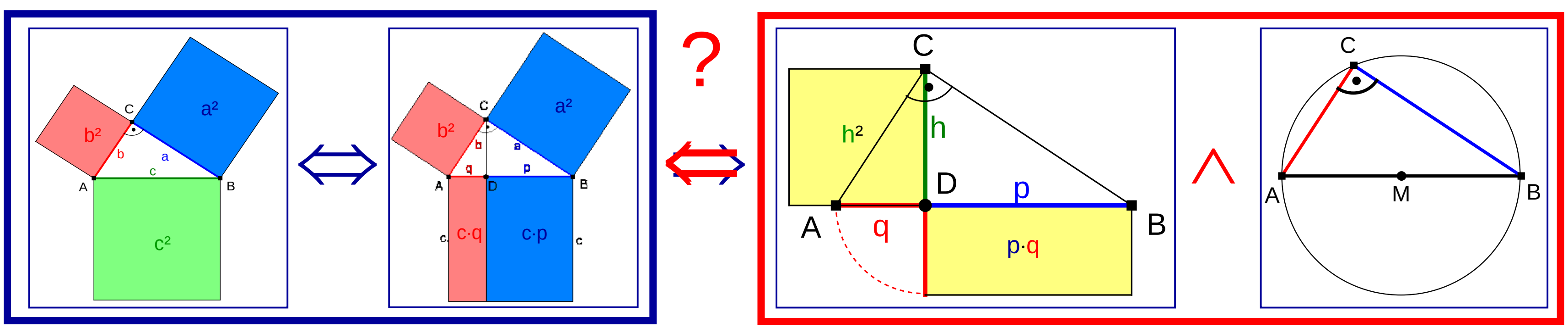
Satz ⇎ Kehrsatzproblematik!

Satz des Pythagoras ⇎ Ägyptische Seilspanner



Logische Abhängigkeit der Sätze:

- Satz des Pythagoras ⇔ Kathetensatz
- Satz des Pythagoras ⇒ Höhensatz
- Kathetensatz ⇒ Höhensatz
- Höhensatz ∧ Satz des Thales ⇒ Satz des Pythagoras
- Höhensatz ∧ Satz des Thales ⇒ Kathetensatz



Übergänge in der Satzgruppe des Pythagoras: Beweisideen

- **Pythagoras ⇒ Kathetensatz bzw. Höhensatz**
  - Anwendung des Satzes des Pythagoras auf die Teildreiecke
  - Arithmetische Umformungen
- **Höhensatz + Satz d. Thales ⇒ Satz d. Pythagoras / Kathetensatz**
  - Einzeichnen eines geeigneten Thaleskreises
  - Anwendung des Höhensatzes auf ein geeignetes Teildreieck
- **Kathetensatz ⇒ Höhensatz**
  - Mehrfache Anwendung des Kathetensatzes auf (Teil-)Dreiecke

http://www.dmuw.de/material/pythagoras

Satz des Pythagoras
Beweistypen bzw. -methoden

(1) Kongruenzbeweis

(2) Abbildungsbeweis

(3) Prinzip der Zerlegungsgleichheit

(4) Prinzip der Ergänzungsgleichheit

(5) Arithmetischer Beweis

(6) Ähnlichkeitsbeweis

(7) Methoden der analytischen Geometrie

http://www.juergen-roth.de/dynageo/pythagoras/

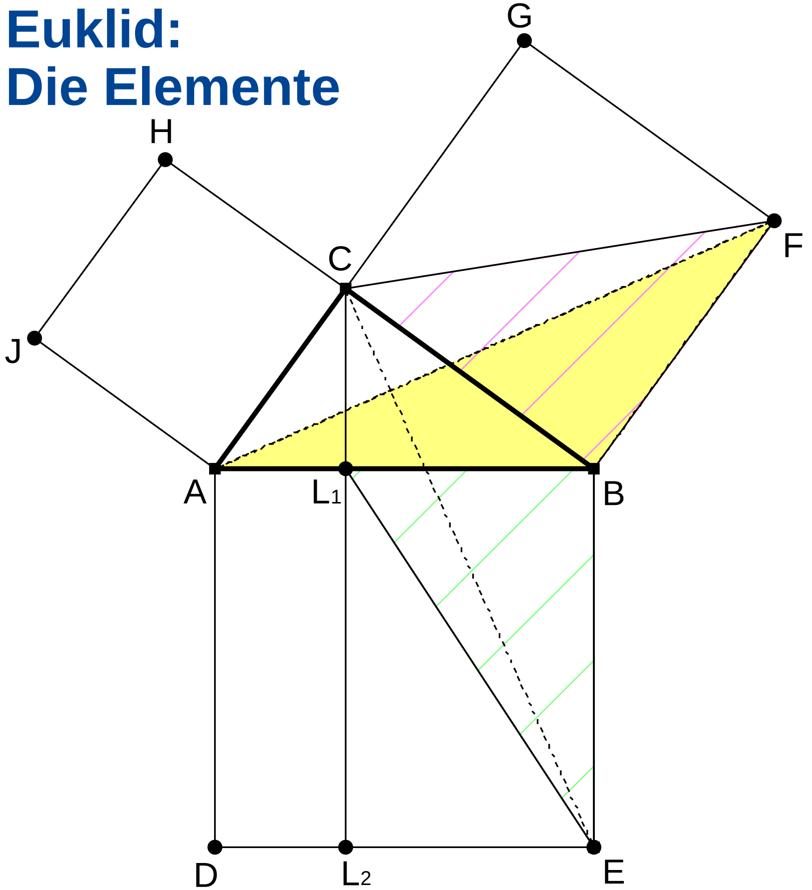
Kongruenzbeweis

Beweis:

(I) $AC \parallel BF \Rightarrow A_{\Delta CBF} = A_{\Delta ABF}$

(II) $CL_1 \parallel BE \Rightarrow A_{\Delta L_1 EB} = A_{\Delta CEB}$

Euklid: Die Elemente



(III) Zu zeigen: $\Delta ABF \cong \Delta CEB$

(1) $|AB| = |EB|$ [Hypotenuse c]

(2) $|\measuredangle FBA| = |\measuredangle CBE|$ [$90° + \beta$]

(3) $|BF| = |BC|$ [Kathete a]

$\overset{SWS}{\Longrightarrow} \Delta ABF \cong \Delta CEB$

$\Longrightarrow A_{\Delta ABF} = A_{\Delta CEB}$

Kongruenz-beweis

$\overset{(1),(2),(3)}{\Longrightarrow} A_{\Delta CBF} = A_{\Delta L_1 BE}$

$\Rightarrow a^2 = c \cdot |L_1 B|$ [Kathetensatz 1. Teil]

Analog ergibt sich:

$b^2 = c \cdot |AL_1|$ [Kathetensatz 2. Teil]

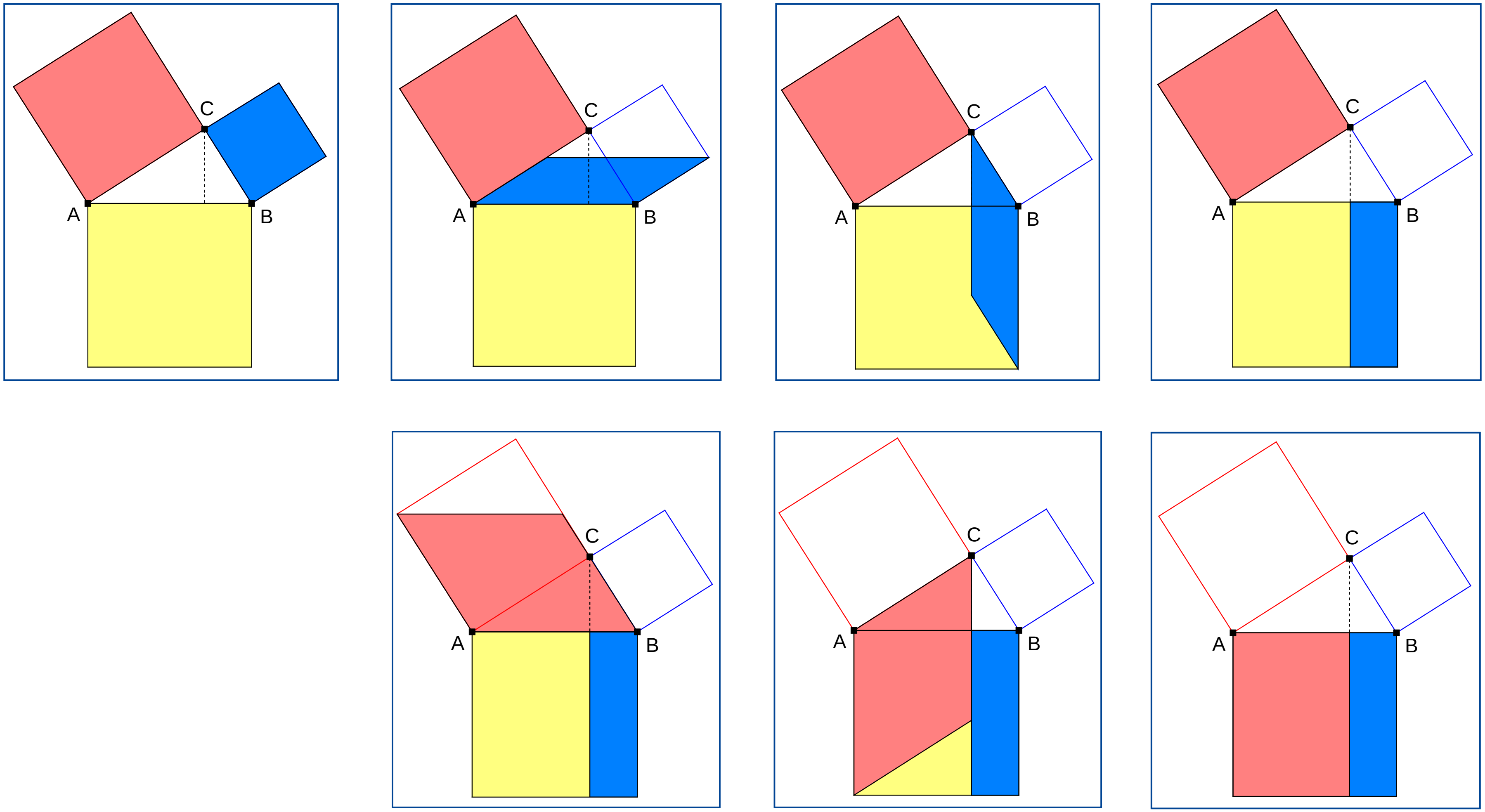
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c \cdot |L_1 B| + c \cdot |AL_1| = c \cdot (|L_1 B| + |AL_1|) = c \cdot c = c^2 \quad \blacksquare$$

http://www.juergen-roth.de/dynageo/pythagoras/pythagoras4.html

Abbildungsbeweis

(Im Unterricht über Flächeninhaltsvergleiche)

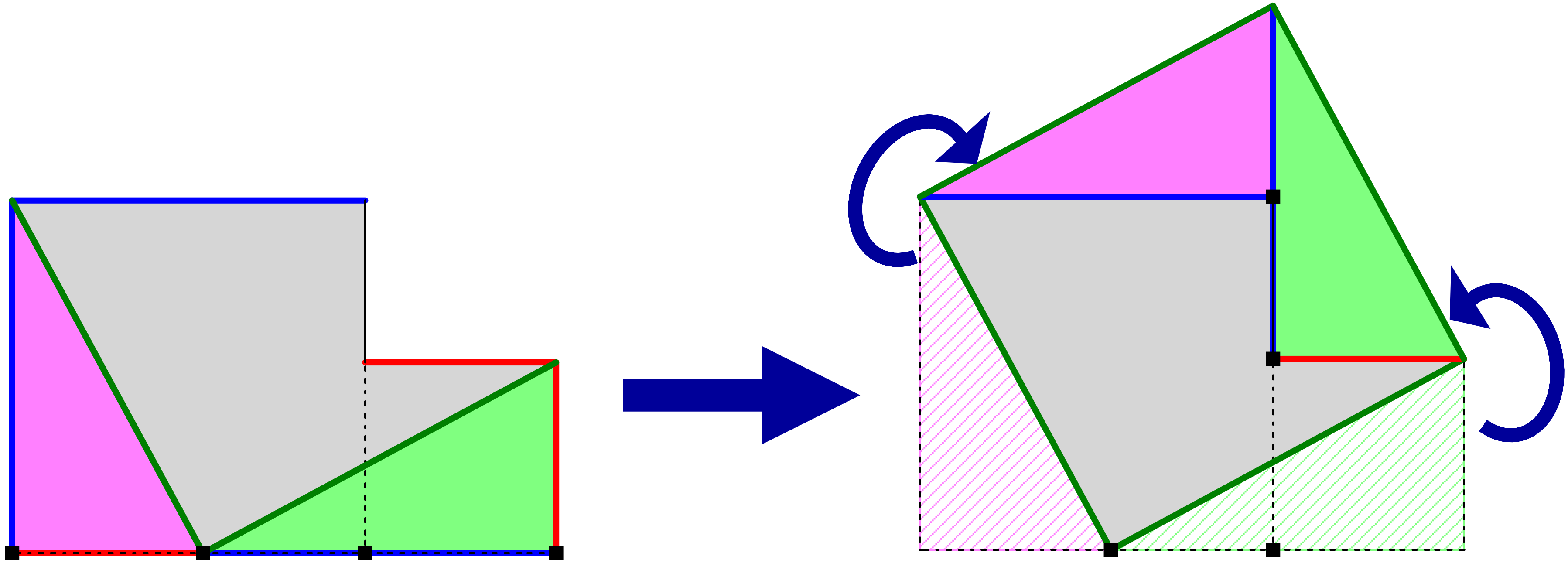
Scherung → Drehung → Scherung



http://www.juergen-roth.de/dynageo/pythagoras/pythagoras1.html

Prinzip der Zerlegungsgleichheit

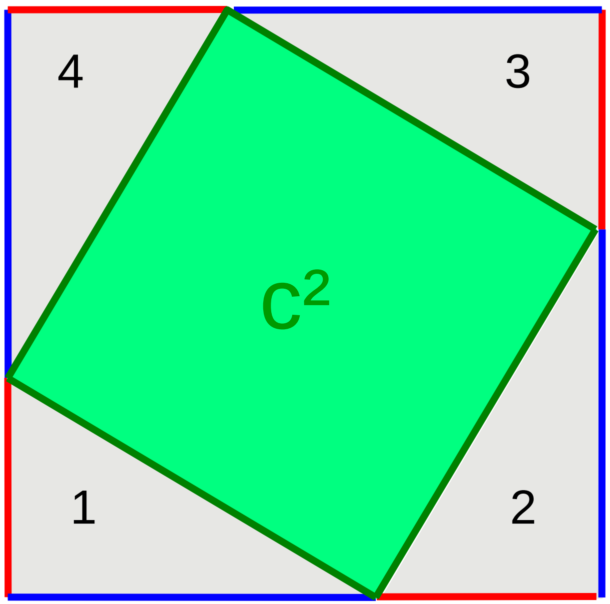
Stuhl der Braut

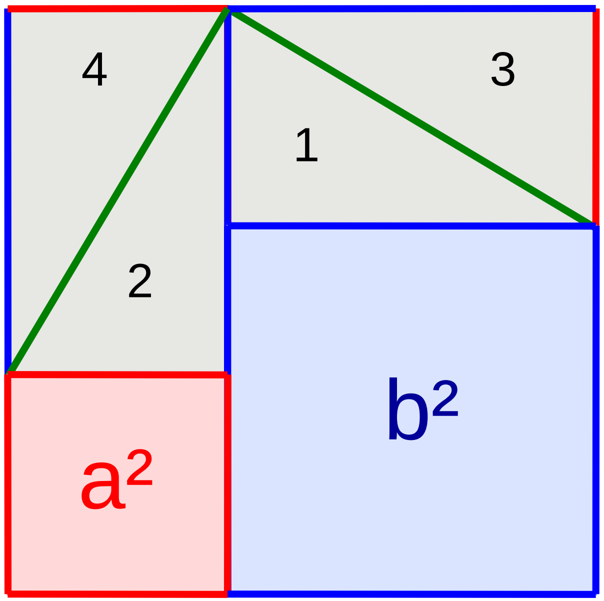


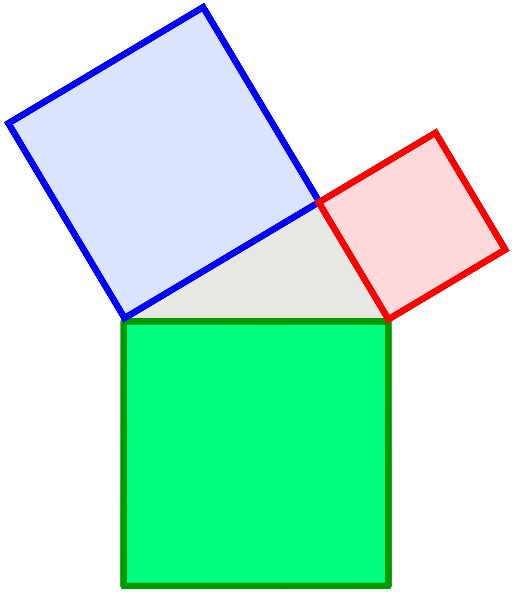
http://www.juergen-roth.de/dynageo/pythagoras/pythagoras5.html

Prinzip der Ergänzungsgleichheit

Altindischer Ergänzungsbeweis

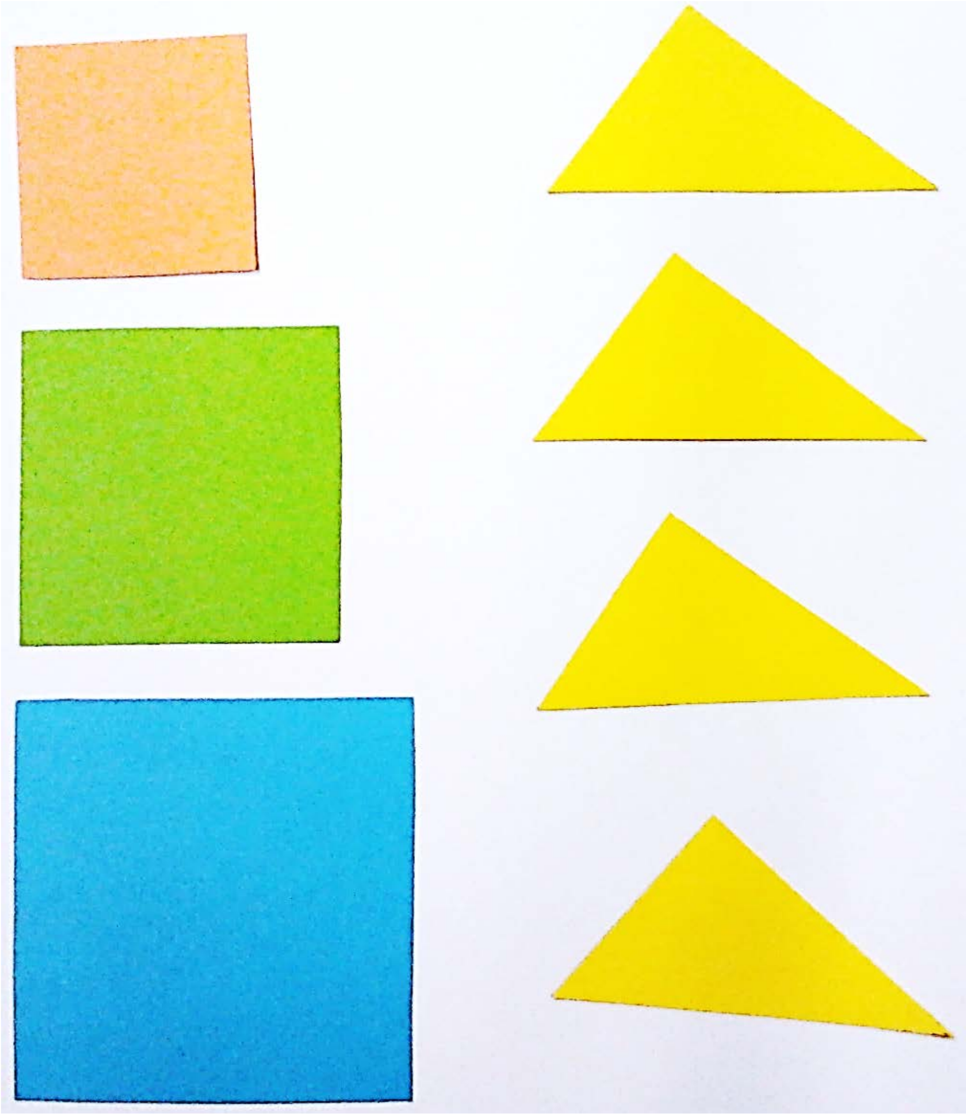






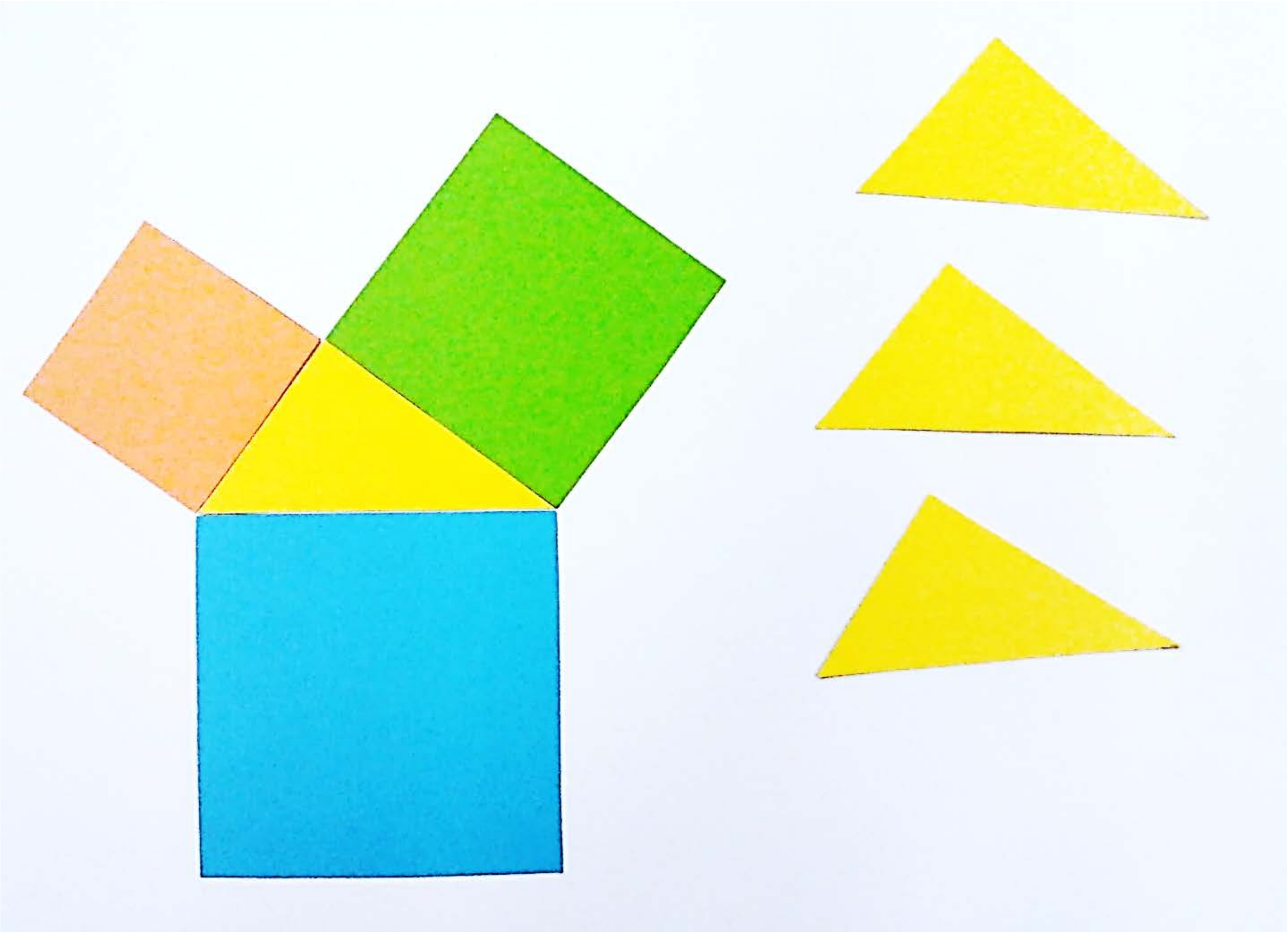
http://www.juergen-roth.de/dynageo/pythagoras/pythagoras6.html

Prinzip der Ergänzungsgleichheit
Puzzle-Beweis



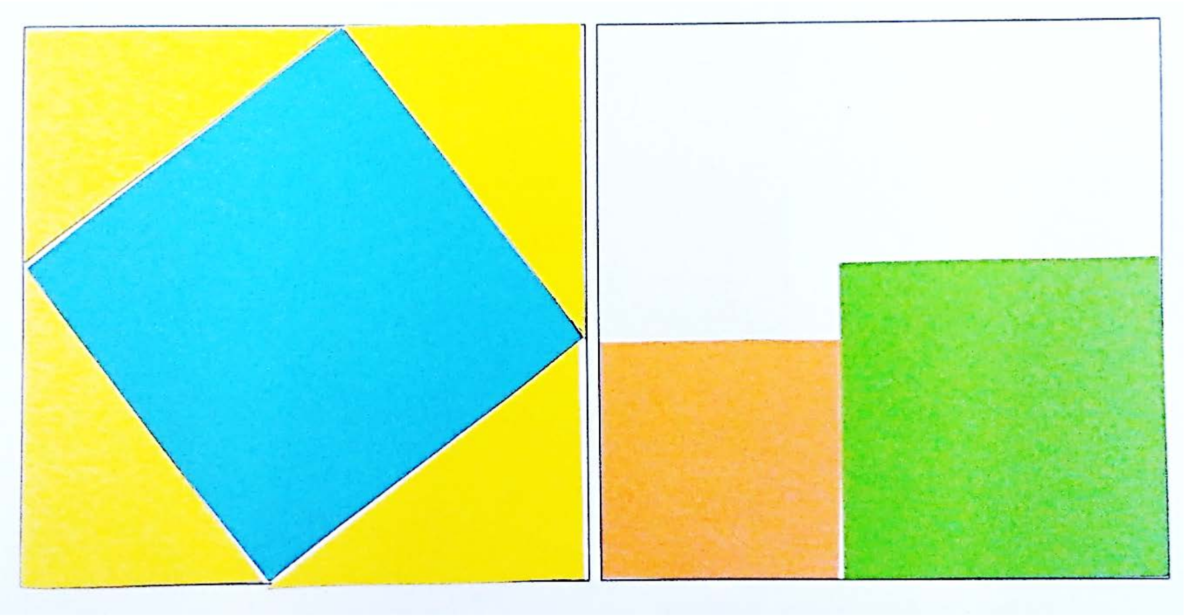
Roth: Pythagoras – Ergänzungsbeweispuzzle – Arbeitsblatt (Textdatenbank)

Prinzip der Ergänzungsgleichheit
Puzzle-Beweis



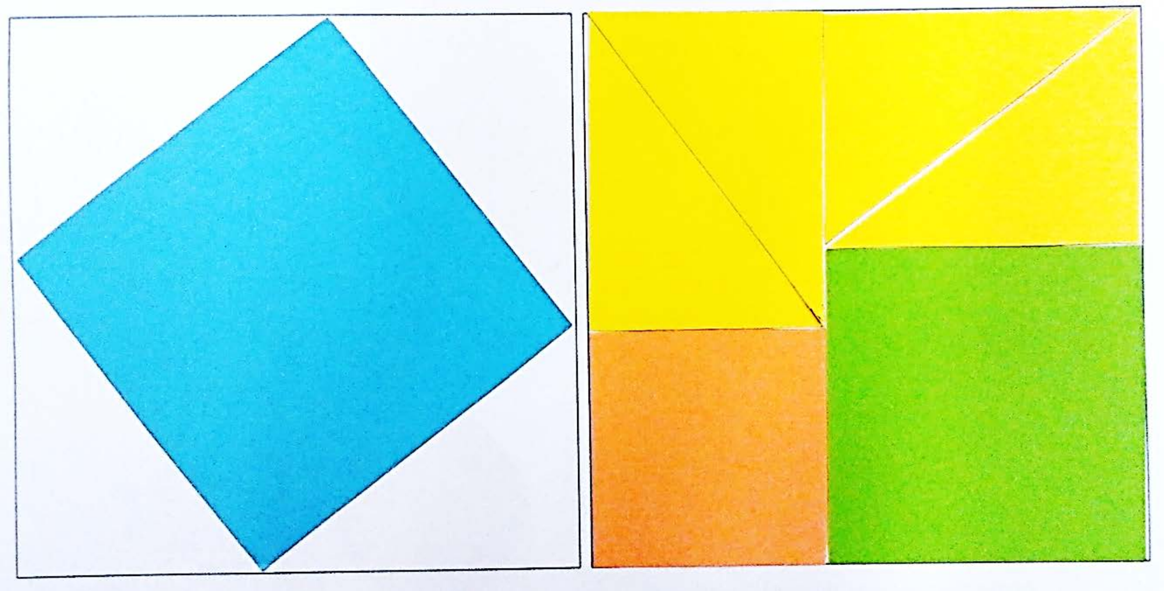
Roth: Pythagoras – Ergänzungsbeweispuzzle – Arbeitsblatt (Textdatenbank)

Prinzip der Ergänzungsgleichheit
Puzzle-Beweis



Roth: Pythagoras – Ergänzungsbeweispuzzle – Arbeitsblatt (Textdatenbank)

Prinzip der Ergänzungsgleichheit
Puzzle-Beweis



Roth: Pythagoras – Ergänzungsbeweispuzzle – Arbeitsblatt (Textdatenbank)

Arithmetischer Beweis

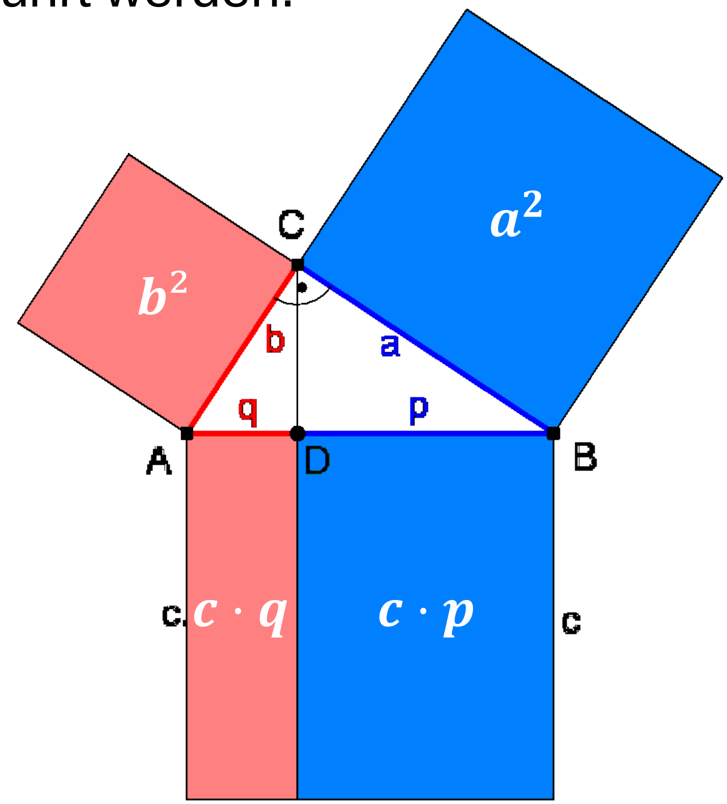
- **Hinweis**
  - Ein Beweis wird hier „arithmetisch“ genannt, wenn (evtl. anhand einer vorliegenden Figur) ausschließlich algebraische Umformungen durchgeführt werden.

- **Beispiel**

Kathetensatz $\Longrightarrow$ Satz des Pythagoras

Vor: $\quad \boldsymbol{a}^2 = c \cdot \boldsymbol{p} \quad und \quad \boldsymbol{b}^2 = c \cdot \boldsymbol{q}$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 &= c \cdot \boldsymbol{p} + c \cdot \boldsymbol{q} \\
&= c \cdot (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}) \\
&= c \cdot c \\
&= c^2 \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$



Algebraischer Beweis

Beweis von J.A. Garfield (1881 Präsident der U.S.A.)

(1) $A_{\text{Trapez}} = A_{\Delta_1} + A_{\Delta_2} + A_{\Delta_3}$

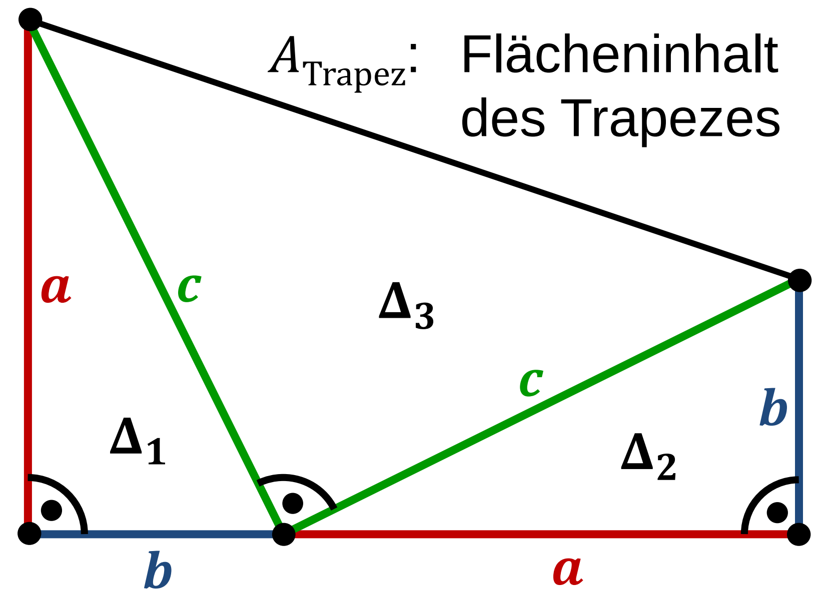
$= \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$

$= ab + \frac{1}{2}c^2$

(2) $A_{\text{Trapez}} = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot (a+b)$

$= \frac{1}{2}(a+b)^2$

$= \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2)$



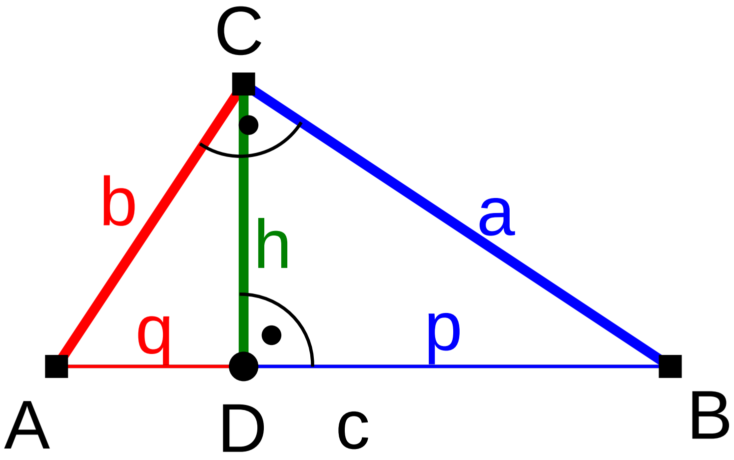
Gleichsetzen der Terme aus (1) und (2) liefert:

$$\frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2) = ab + \frac{1}{2}c^2 \qquad | \cdot 2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \qquad | -2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \blacksquare$$

Ähnlichkeitsbeweis



$$\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD \qquad (ww)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \frac{h}{p} = \frac{q}{h} & \Rightarrow & h^2 = p \cdot q \\ \frac{b}{q} = \frac{c}{b} & \Rightarrow & b^2 = c \cdot q \\ \frac{a}{p} = \frac{c}{a} & \Rightarrow & a^2 = c \cdot p \end{array} \right.$$

Höhensatz

Katheten-
satz

■

Kriterien zur Auswahl von Beweismethoden

Eigentätigkeit

- Großteil der Schüler muss in der Lage sein, durch Eigen-tätigkeit, den Beweis oder die entscheidende Beweisidee selbst zu entdecken bzw. einen wesentlichen Beitrag dazu zu leisten

Vielfalt

- Schüler sollen unterschiedliche Beweismethoden kennen lernen

Anschauen und Begreifen

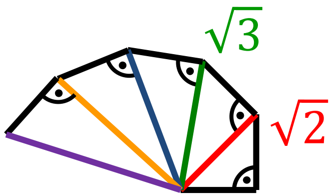
- Beweis lässt sich gut visualisieren oder enaktiv erarbeiten.

Verständnis fördern

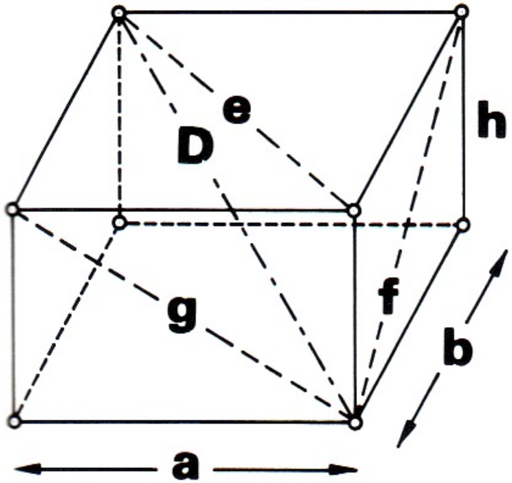
- Beweis ist leicht durchschaubar
- Beweis erleichtert eine wichtige Erkenntnis
  - **Beispiel:**
    - Satzgruppe des Pythagoras: Aussagen über Flächeninhalte
    - Sollte beim Beweis direkt erkennbar sein

Satzgruppe des Pythagoras
Anwendungen

- **Ebene Geometrie**
  - Berechnungen
    - Diagonale des Rechtecks
    - Höhe & Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks
    - Abstand zweier Punkte (im Koordinatensystem)
    - Kreistangenten und Sehnen
    - Reguläre n-Ecke
    - Kosinussatz
  - Konstruktionen
    - Flächenverwandlung
    - Strecken der Länge $\sqrt{n}$

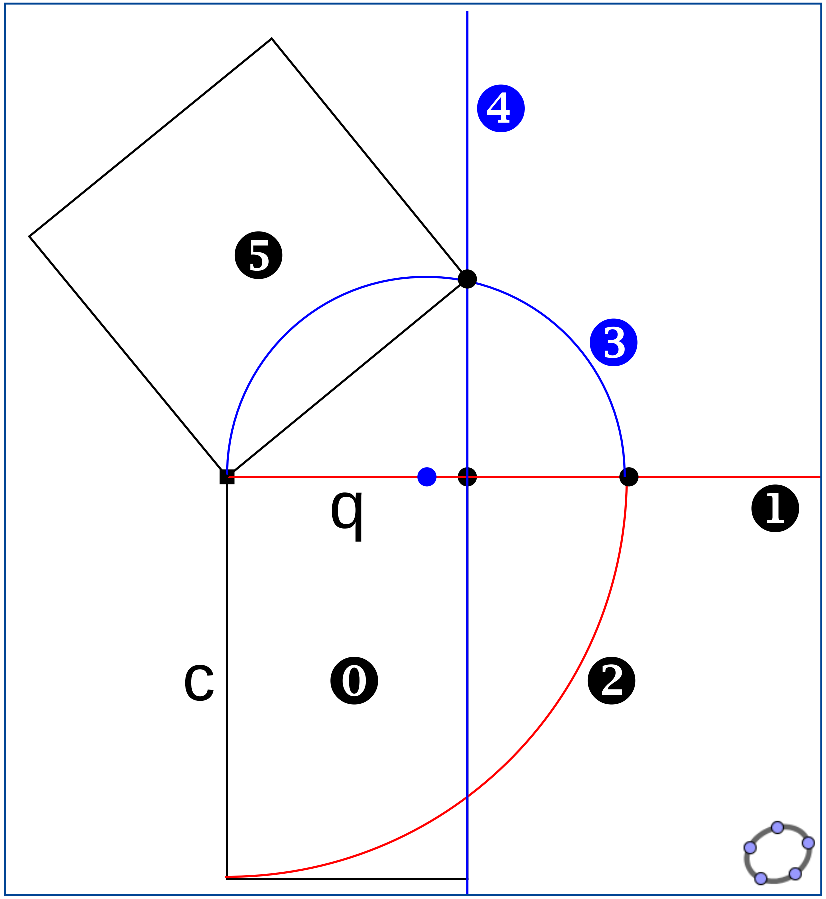


- **Raumgeometrie**
  - Berechnungen
    - Raumdiagonalen
    - Längen im Raum

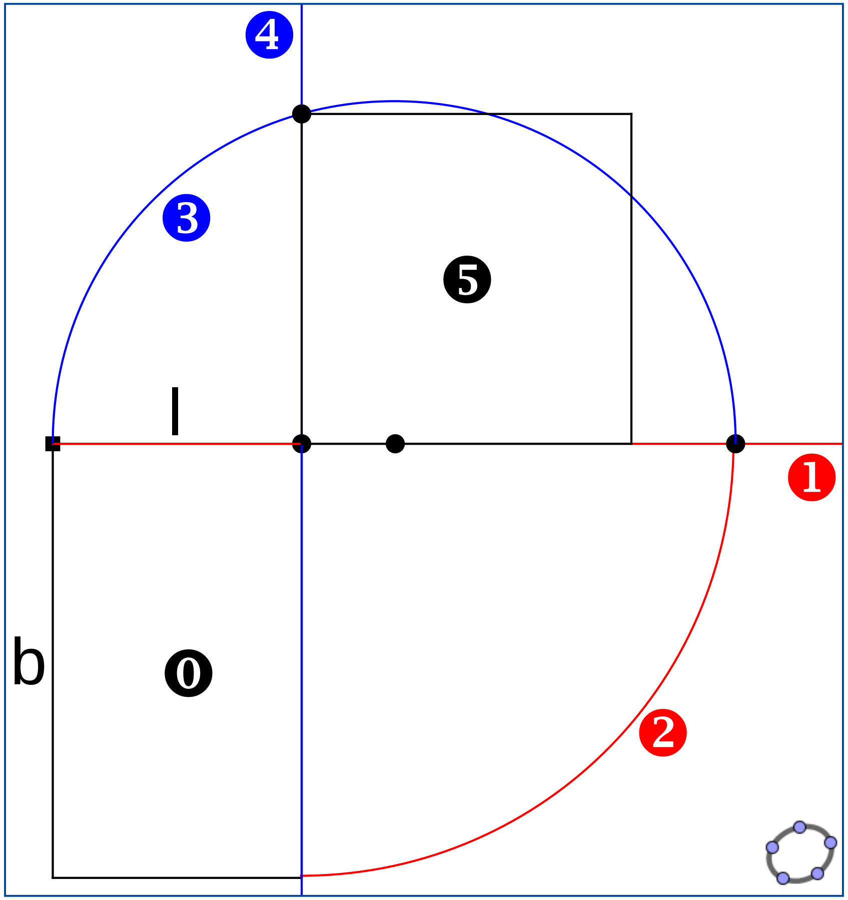


- **Verwandlung eines Rechtecks in ein inhaltsgleiches Quadrat**

Kathetensatz

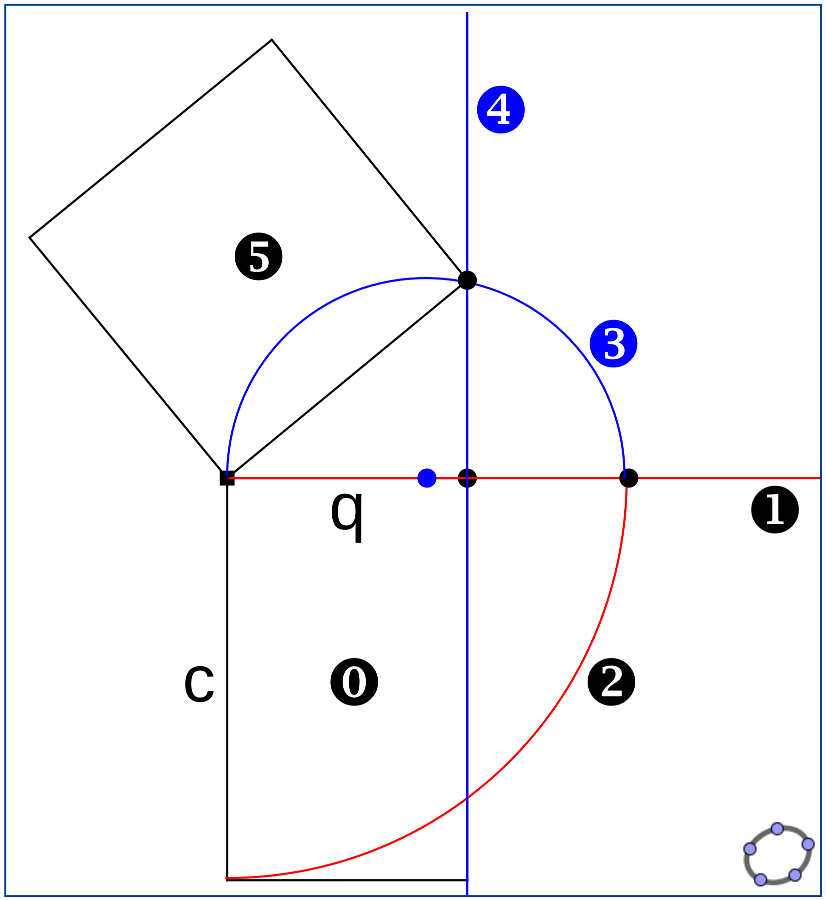


Höhensatz

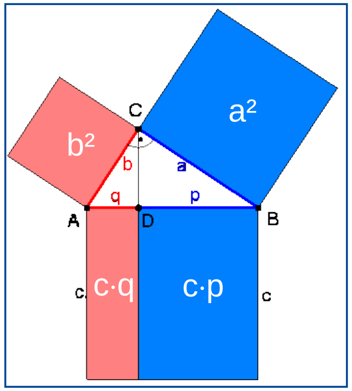


Verwandlung eines Rechtecks in ein inhaltsgleiches Quadrat

Kathetensatz



Ausgangspunkt:
Figur zum Kathetensatz



Kann man ein Quadrat der Figur konstruieren, wenn man ein Rechteck hat?

→ Konstruktion der entsprechenden Kathete.

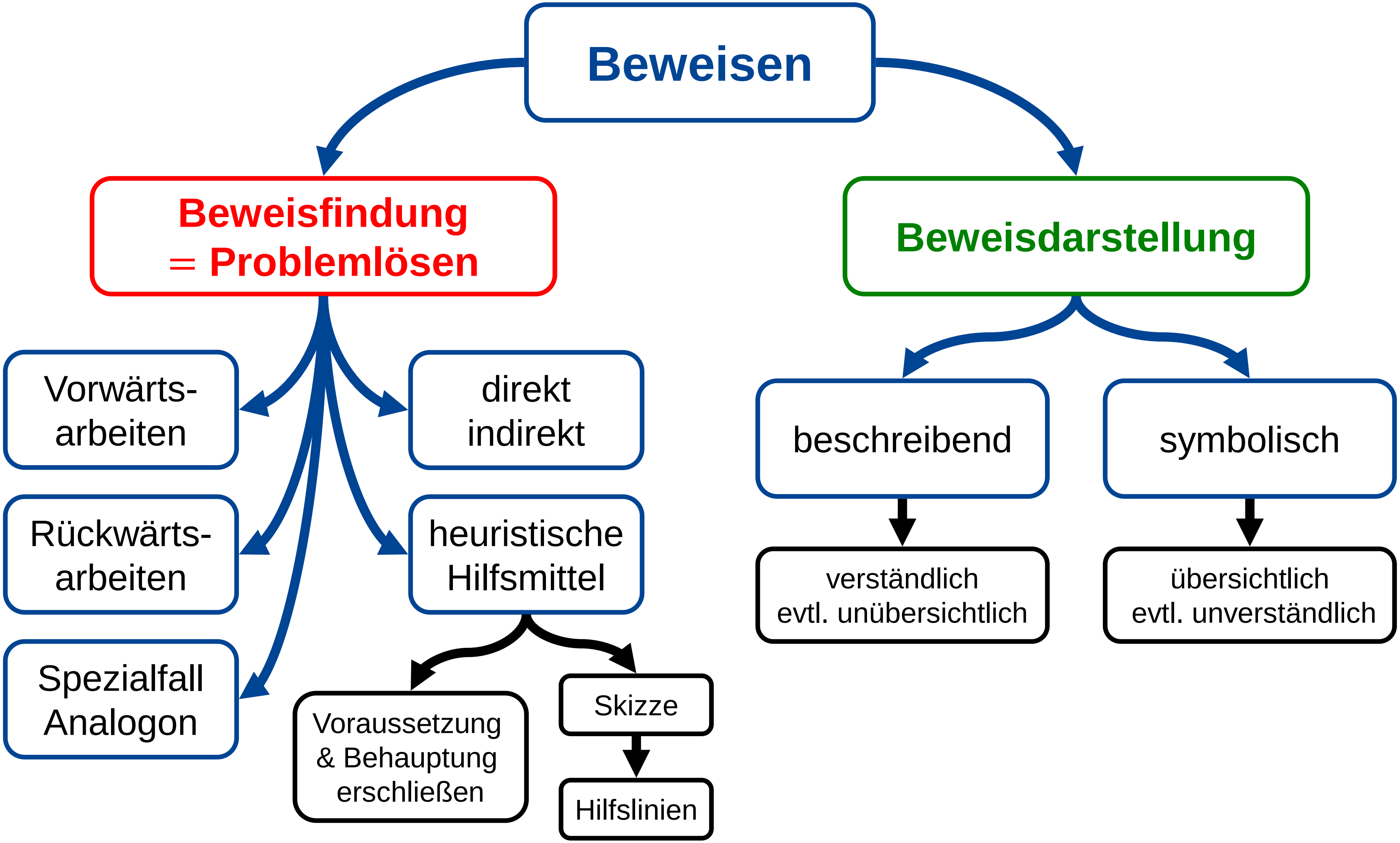
Welche Schritte sind notwendig?

…

Kapitel 4: Argumentieren und Beweisen

4.4 Beweisen als Tätigkeit

Beweisen als Tätigkeit



Beweisdarstellung

Aussage

- Jeder Punkt P der Mittelsenkrechten m einer Strecke $[AB]$ ist gleich weit von den beiden Endpunkten der Strecke entfernt.

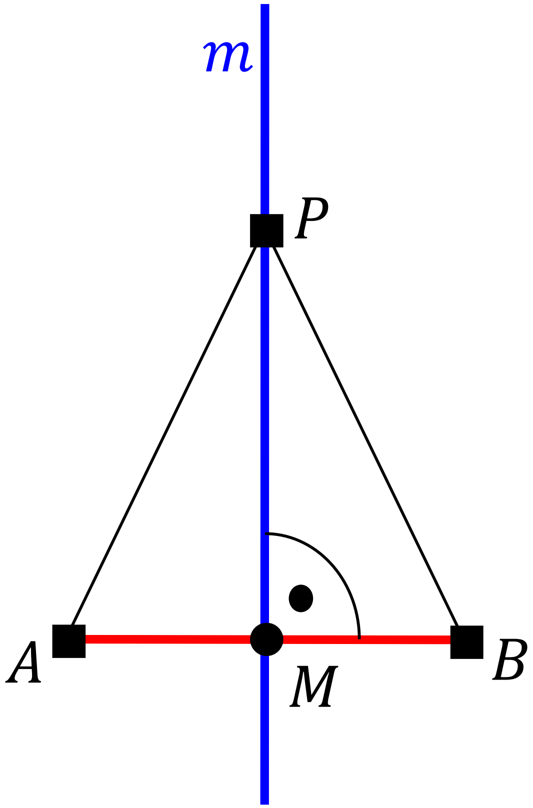
Voraussetzung

(1) $P \in m$

(2) $m \perp [AB]$

(3) $M \in m \cap [AB]$

(4) $|AM| = |BM|$



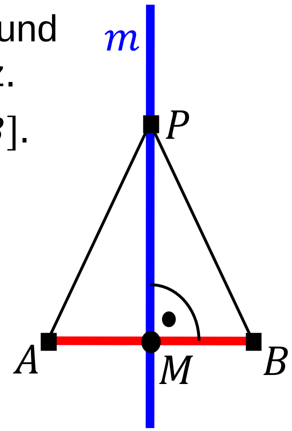
Behauptung

$|AP| = |BP|$

Beweisdarstellung

Beschreibend

Wir betrachten die Dreiecke ΔAMP und ΔMBP und zeigen deren Kongruenz.



m ist Mittelsenkrechte der Seite $[AB]$. m steht also senkrecht auf der Seite $[AB]$ und halbiert sie im Schnittpunkt M. Damit ist die Seite $[AM]$ des Dreiecks ΔAMP genau so lang wie die Seite $[MB]$ des Dreiecks ΔMBP.

Die bei M liegenden Innenwinkel der beiden Dreiecke sind jeweils rechte Winkel und damit gleich groß.

Schließlich ist die Seite $[MP]$ beiden Dreiecken gemeinsam.

Damit stimmen die beiden Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind also nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent.

Da kongruente Dreiecke in allen sich entsprechenden Teilen kongruent sind, stimmen auch die dritten Seiten überein, d. h. die Strecken $[AP]$ und $[BP]$ sind gleich lang. ■

Symbolisch

Vor.: a) $P \in m$

b) $m \perp [AB]$

c) $|AM| = |BM|$

Beh.: $|AP| = |BP|$

Bew.: (Beweisidee: $\Delta AMP \cong \Delta MBP$)

(1) $|AM| = |BM|$ Vor. c)

(2) $|\sphericalangle PMA| = |\sphericalangle BMP| = 90°$ Vor. b)

(3) $|PM| = |PM|$ Identität

$\Rightarrow \Delta AMP \cong \Delta MBP$ (1);(2);(3);SWS

$\Rightarrow |AP| = |BP|$ entspr. Seiten in kongruenten Δ

■

Beweistechniken

direkter Beweis

$$p \Rightarrow q$$

indirekter Beweis

(Beweis durch Kontraposition)

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

Widerspruchsbeweis

$$p \wedge \neg q$$

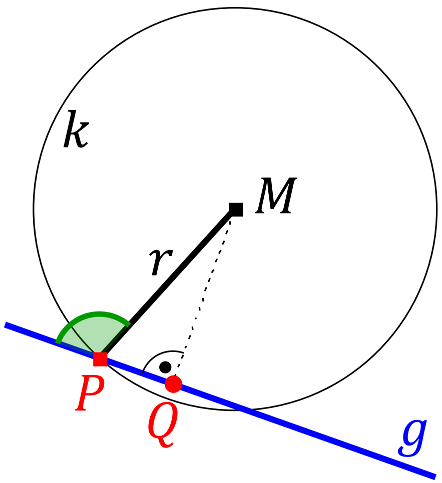
Abkürzungen:

p: Voraussetzung des Satzes

q: Behauptung des Satzes

Wiederspruchsbeweis

- **Satz**
  Eine Gerade, die mit einem Kreis genau einen Punkt gemeinsam hat, ist Lot zum Kreisradius durch diesen Punkt.
  - Vor.: $g \cap k(M;r) = \{P\}$
  - Beh.: $g \perp PM$



- **Beweis** (Widerspruchsbeweis)

  Annahme: $g \cap k(M;r) = \{P\}$ und $\angle(g, PM) \neq 90°$

  $\Rightarrow$ Der Fußpunkt Q des von M auf g gefällten Lotes ist von P verschieden.

  $\Rightarrow$ Im rechtwinkligen Dreieck ΔPQM gilt $|QM| < |PM| = r$, da dem größten Winkel die längste Seite gegenüberliegt.

  $\Rightarrow$ Der Punkt $Q \in g$ liegt, wegen $|QM| < r$ innerhalb des Kreises.

  $\Rightarrow$ Die Gerade g schneidet $k(M;r)$ in zwei Punkten. ↯ Widerspruch zur Vor.!!

  $\Rightarrow$ Die Annahme war also falsch und es gilt $\angle(g, PM) = 90°$. ■

Beweisen als lokales Ordnen

Beweisen

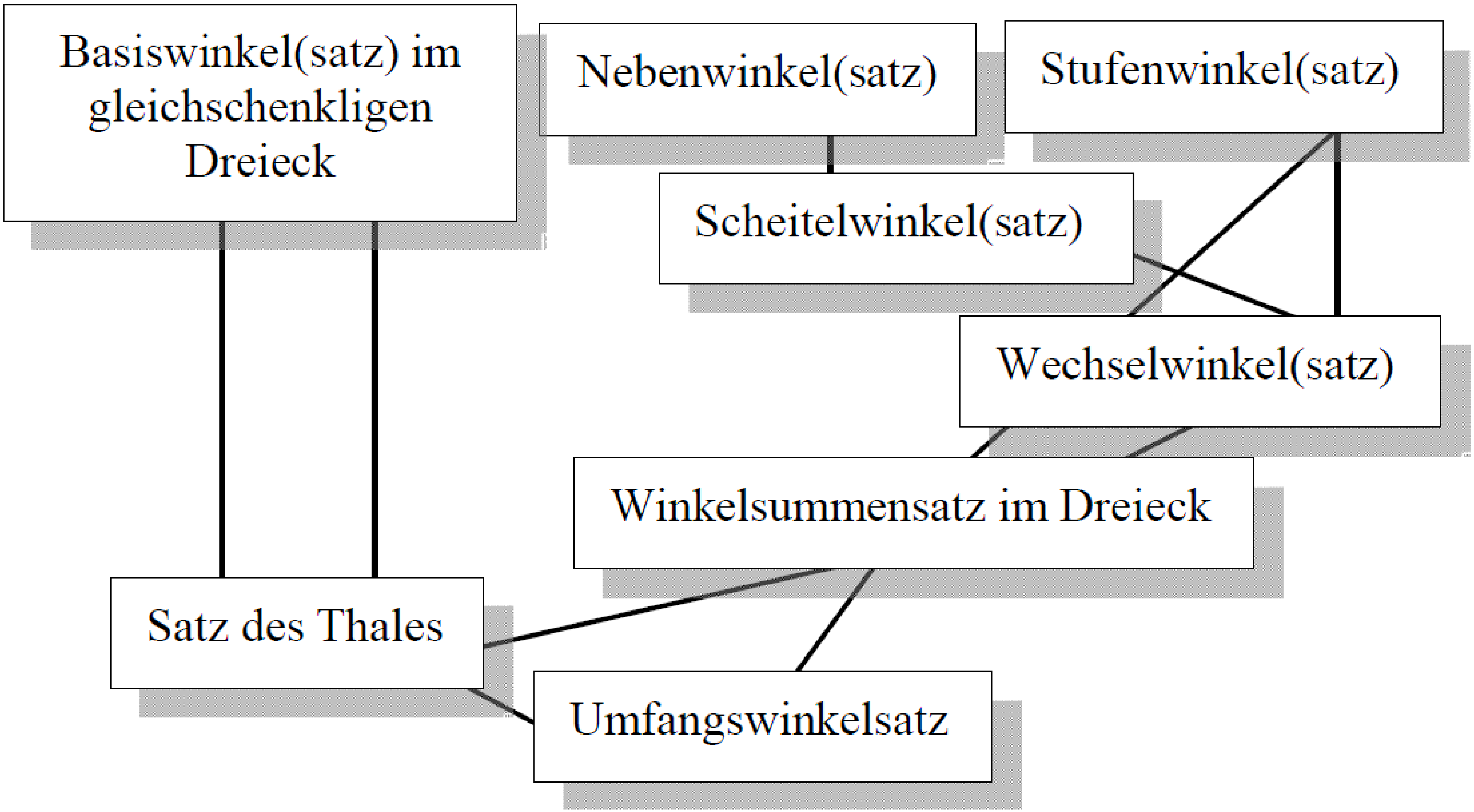
- Aufbau einer Hierarchie von Sätzen von der Voraussetzung bis hin zur Behauptung der zu beweisenden Aussage.
- Das lokale Ordnen besteht in dieser Rückführung der Behauptung auf andere Aussagen.
- Suche nach geeigneten Sätzen.
- Entschieden, ob eine untergeordnete Aussage bewiesen werden muss.
- Voraussetzung: Fähigkeit, zwischen einem Satz und einer Definition zu unterscheiden.

Beweisen als lokales Ordnen

- **Beispiel**
  - Zu zeigen: In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Basis gleich groß. (Basiswinkelsatz)
  - Aus
    - „Ein gleichschenkliges Dreieck ist ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten (die dritte Seite heißt Basis).“ (Definition)
  - folgt
    - „In gleichschenkligen Dreiecken ist die Seitenhalbierende der Basis auch deren Mittelsenkrechte.“ (Beweisen!)
  - folgt
    - „Ein gleichschenkliges Dreieck ist achsensymmetrisch bzgl. der Mittelsenkrechten der Basis.“ (Beweisen!)
  - folgt
    - die Behauptung des Basiswinkelsatzes.

Beweise hängen u.a. von Definitionen ab!

Lokales Ordnen



Weigand et al. (2014): Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I. Heidelberg: Springer Spektrum, S. 27f

Argumente für das Argumentieren und Beweisen

- **Beweisen bedingt die Entwicklung vieler für den Alltag wichtiger Fähigkeiten:**
  - Notwendigkeit einer gemeinsamen Argumentationsgrundlage erkennen
  - Schlüssigkeit und Wahrheitsgehalt von Aussagen beurteilen
  - vollständig und richtig argumentieren
  - generalisieren, spezialisieren, analogisieren
  - Probleme lösen
  - Phantasie und Akribie
  - individuelle Leistungsbereitschaft und kooperatives Denken
  - Bescheidenheit und Selbstbewusstsein
  - Einsicht in (mathematische) Sachverhalte gewinnen
- **Beweisen ist eine wesentliche Facette der Mathematik**

Methodische Überlegungen zum Beweisen

- **Erst Satzfindung, dann Beweisfindung!**
  - Satz ergibt sich meist aus einem Problem
  - Auffälliges entdecken
  - Besonderes ↔ Selbstverständliches
- **Phasenmodell zum Beweisen im MU**
  - Verbalisieren des Satzes
  - Einsicht in die Notwendigkeit einer Begründung
  - Beweisfindung
  - Verbalisieren des Beweises
  - Rückblick
  - Satz einordnen
  - Variieren – Weiterfragen

Stimmt das? bzw.
Warum stimmt das?