

Jürgen Roth

# Didaktik der Geometrie

## Modul 5: Fachdidaktische Bereiche



## Didaktik der Geometrie

- 1 Ziele und Inhalte
- 2 Begriffsbildung
- 3 Konstruieren
- 4 Argumentieren und Beweisen
- 5 Problemlösen
- 6 Entdeckendes Lernen



Didaktik der Geometrie

# Kapitel 4: Argumentieren und Beweisen



## Kapitel 4: Argumentieren und Beweisen

### 4.1 Beweisen?

### 4.2 Niveaustufen des Beweisens

### 4.3 Beispiel: Satzgruppe des Pythagoras

### 4.4 Beweisen als Tätigkeit



## Kapitel 4: Argumentieren und Beweisen

# 4.1 Beweisen?



## ► Ein Beweis ...

▷ ist eine „logische Operation, die unter Zuhilfenahme von allgemein akzeptierten Gedankengängen aus schon gegebenen Voraussetzungen neue Erkenntnisse gewinnt.“

Lexikon der Mathematik

▷ eines mathematischen Satzes  $S$  ist dessen logische Zurückführung auf andere mathematische Sätze  $S_1, S_2, \dots, S_n$ .

▷ Ist  $S$  mit Hilfe von  $S_1, S_2, \dots, S_n$  bewiesen, so folgt die Gültigkeit des Satzes  $S$  aus der Gültigkeit der Sätze  $S_1, S_2, \dots, S_n$ .

▷ Das bedeutet:

► Wenn  $S_1, S_2, \dots, S_n$  wahre Aussagen sind, dann ist auch  $S$  eine wahre Aussage.

► Wenn man die Gültigkeit der Sätze  $S_1, S_2, \dots, S_n$  anerkennt, dann kann man die Gültigkeit von  $S$  nicht bestreiten.

## ► Anwendungsaspekt

Ist die Allgemeingültigkeit einer *Aussage*

▷ *nicht anschaulich klar*, so dient ein Beweis dieser Aussage dazu *einzusehen, dass*

▷ *anschaulich klar*, dann kann ein Beweis dazu dienen, zu *verstehen, warum*

die Aussage *allgemeingültig* ist.

## ► Struktureller Aspekt

▷ Spielt in der Sek. I praktisch keine Rolle

## ► Deduktiver Aspekt

▷ Kann man den Satz mit Hilfe bereits bekannter Sätze herleiten?  
(Prozessziel des Beweisens)

## ► Aspekt des Problemlösens

▷ Beweisfindung – nicht  
Beweisdarstellung –  
steht im Vordergrund

▷ Ziel des Beweisens:  
Beitrag zu Prozesszielen  
des Problemlösens

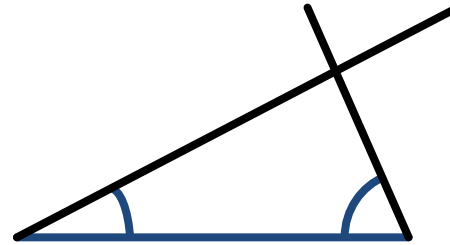
## Kapitel 4: Argumentieren und Beweisen

# 4.2 Niveaustufen des Beweisen



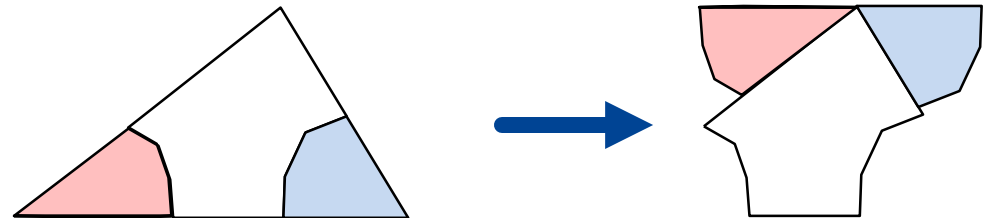


- ▶ **Erfahren von Handlungsspielräumen und Sachzwängen**



Konstruiere ein Dreieck mit folgenden Innenwinkelgrößen:  
 $\alpha = 40^\circ, \beta = 55^\circ, \gamma = 100^\circ$

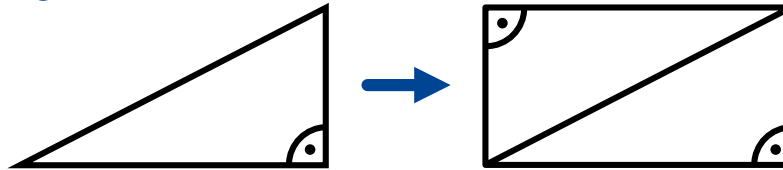
- ▶ **Probieren**



- ▶ **Messen**

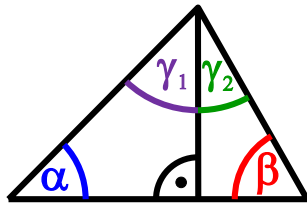
$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha + \beta + \gamma$
$31^\circ$	$44,5^\circ$	$105^\circ$	$180,5^\circ$
$51^\circ$	$92^\circ$	$36^\circ$	$179^\circ$

## ► Sonderfälle



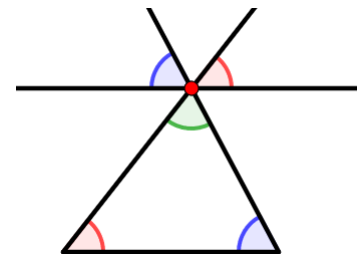
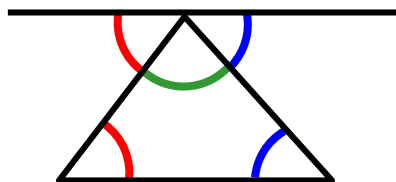
Innenwinkelsumme  
im Rechteck:  $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$

Innenwinkelsumme  
im rechth. Dreieck:  $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$



$$\begin{aligned}
 &180^\circ + 180^\circ \\
 &= (\alpha + 90^\circ + \gamma_1) + (90^\circ + \beta + \gamma_2) \\
 &= \alpha + 90^\circ + \gamma_1 + 90^\circ + \beta + \gamma_2 \\
 &= \alpha + \beta + \underbrace{(\gamma_1 + \gamma_2)}_{=\gamma} + 180^\circ \\
 &\Rightarrow 180^\circ = \alpha + \beta + \gamma
 \end{aligned}$$

## ► Klassischer Beweis



Winkel-  
verschiebung

## ▶ Stufe des Argumentierens

- ▷ Nur mündliche Argumentation
- ▷ Bezugnahme auf die Beweisfigur
- ▷ Veranschaulichende Hilfsmittel
- ▷ Beweisverständnis wird nicht angestrebt
- ▷ *Ziel*
  - ▶ Unterschied zwischen einer Vermutung und der Einsicht in das „Warum“ erfahren
- ▷ *Tätigkeiten*
  - ▶ Argumente angeben
  - ▶ Argumente aufgreifen und weiterführen oder widerlegen
  - ▶ Beweisgedanken verstehen & in eigenen Worten wiedergeben

präformale,  
anschauliche  
Beweise

## ▶ Stufe des inhaltlichen Schließens

- ▷ Notation als Sequenz von Beweisschritten
- ▷ Die Schülertätigkeit beschreibende Darstellung
- ▷ keine lückenlose Angabe der benutzten Sätze
- ▷ Bezug auf die Beweisfigur bei Aussagen zur Anordnung erlaubt
- ▷ *Ziel*
  - ▶ Sicherung und/oder Verständnis der Allgemeingültigkeit
- ▷ *Tätigkeiten*
  - ▶ Die zum Beweis benutzten Sätze angeben
  - ▶ Einen Beweis schriftlich reproduzieren
  - ▶ Fallunterscheidungen durchführen
  - ▶ einfache Beweise selbst finden

formale  
Beweise

## ▶ Stufe des formalen Schließens

▷ Beweisen hauptsächlich unter dem Gesichtspunkt der Geometrie als formaler Theorie

▷ *Ziel:*

- ▶ Ein in Beweiszeilen dargestellter Beweis.
- ▶ Jede Zeile ist entweder eine Voraussetzung oder folgt aus darüber stehenden Beweiszeilen.

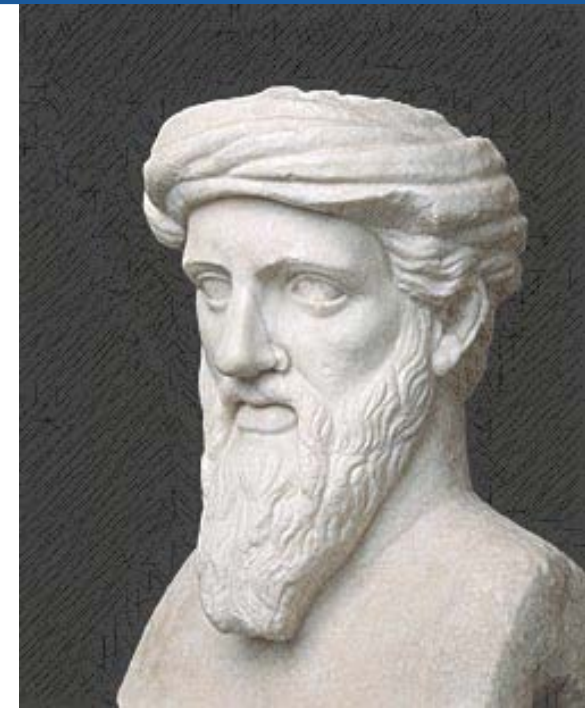
▷ *Tätigkeiten*

- ▶ Als Sequenz von Beweiszeilen notieren
- ▶ Auf Schlüssigkeit und Lückenlosigkeit überprüfen
- ▶ Beweise durch Einfügen zusätzlicher Schritte verfeinern
- ▶ Verschiedene Beweise zum selben Sachverhalt im Hinblick auf die verwendeten Beweismittel bewerten

postformale  
Beweise

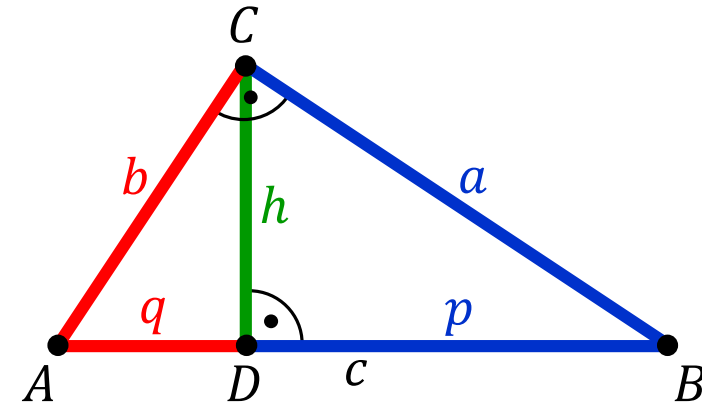
## Kapitel 4: Argumentieren und Beweisen

# 4.3 Beispiel: Satzgruppe des Pythagoras



## ► Satzgruppe des Pythagoras

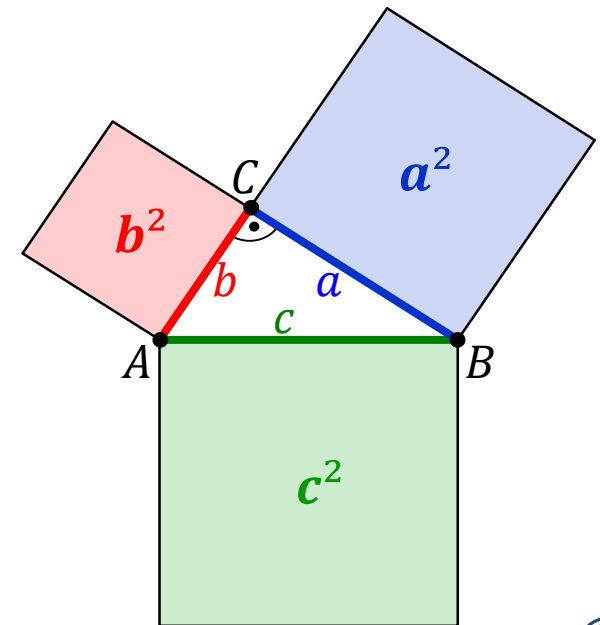
- ▷ Bezieht sich auf rechtwinklige Dreiecke.
- ▷ Zu ihr gehören folgende Sätze:



## ► Satz des Pythagoras

- ▷ Bei jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.

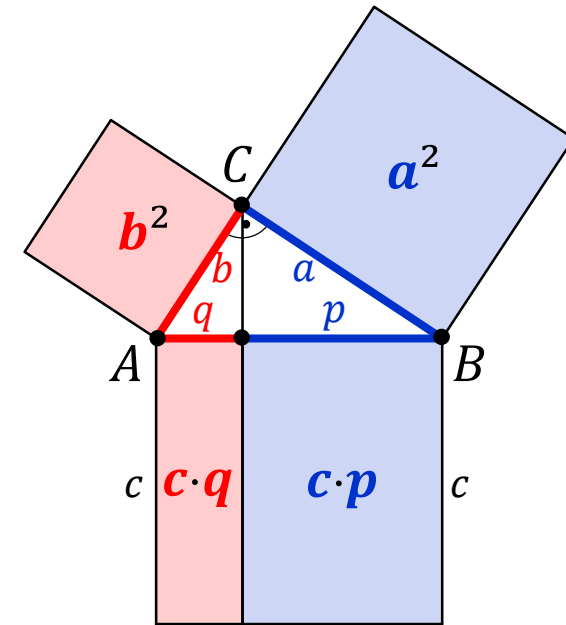
$$a^2 + b^2 = c^2$$



## ► Kathetensatz

- ▷ Bei jedem rechtwinkligen Dreieck hat ein Kathetenquadrat denselben Flächeninhalt wie das Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

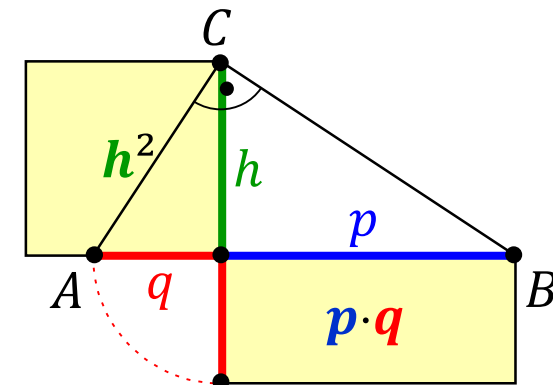
$$a^2 = c \cdot p \quad \text{und} \quad b^2 = c \cdot q$$



## ► Höhensatz

- ▷ Bei jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Höhenquadrat denselben Flächeninhalt wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

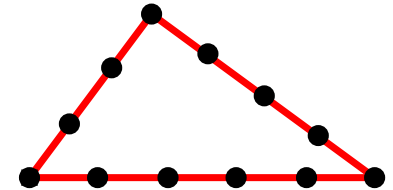
$$h^2 = p \cdot q$$





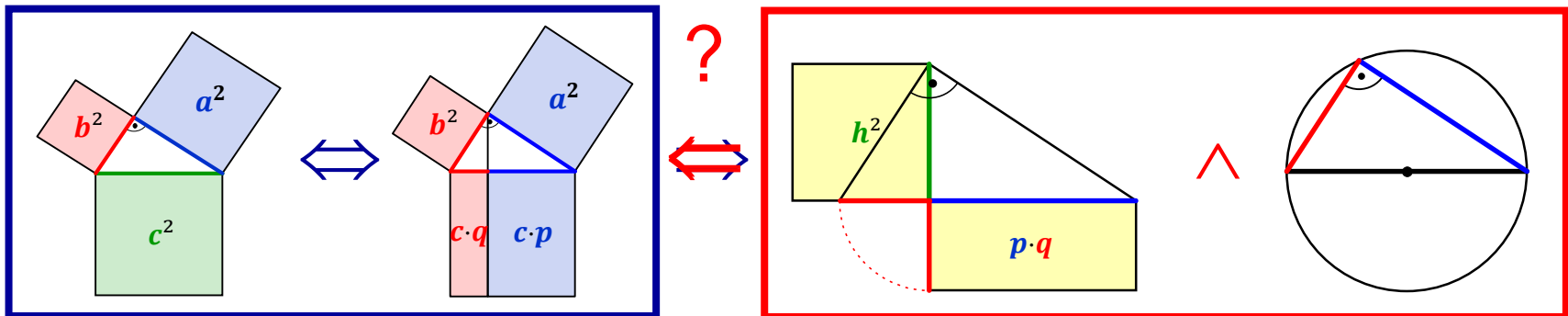
## Satz $\Leftrightarrow$ Kehrsatzproblematik!

Satz des Pythagoras  $\Leftrightarrow$  Ägyptische Seilspanner



## Logische Abhängigkeit der Sätze:

- Satz des Pythagoras  $\Leftrightarrow$  Kathetensatz
- Satz des Pythagoras  $\Rightarrow$  Höhensatz
- Kathetensatz  $\Rightarrow$  Höhensatz
- Höhensatz  $\wedge$  Satz des Thales  $\Rightarrow$  Satz des Pythagoras
- Höhensatz  $\wedge$  Satz des Thales  $\Rightarrow$  Kathetensatz



- ▶ **Pythagoras  $\Rightarrow$  Kathetensatz bzw. Höhensatz**
  - ▷ Anwendung des Satzes des Pythagoras auf die Teildreiecke
  - ▷ Arithmetische Umformungen
  
- ▶ **Höhensatz + Satz d. Thales  $\Rightarrow$  Satz d. Pythagoras / Kathetensatz**
  - ▷ Einzeichnen eines geeigneten Thaleskreises
  - ▷ Anwendung des Höhensatzes auf ein geeignetes Teildreieck
  
- ▶ **Kathetensatz  $\Rightarrow$  Höhensatz**
  - ▷ Mehrfache Anwendung des Kathetensatzes auf (Teil-)Dreiecke

- (1) Kongruenzbeweis
- (2) Abbildungsbeweis
- (3) Prinzip der Zerlegungsgleichheit
- (4) Prinzip der Ergänzungsgleichheit
- (5) Arithmetischer Beweis
- (6) Ähnlichkeitsbeweis
- (7) Methoden der analytischen Geometrie



**Beweis:**

(I)  $AC \parallel BF \Rightarrow A_{\Delta CBF} = A_{\Delta ABF}$

(II)  $CL_1 \parallel BE \Rightarrow A_{\Delta L_1EB} = A_{\Delta CEB}$

(III) Zu zeigen:  $\Delta ABF \cong \Delta CEB$

(1)  $|AB| = |EB|$  [Hypotenuse  $c$ ]

(2)  $|\sphericalangle FBA| = |\sphericalangle CBE|$  [ $90^\circ + \beta$ ]

(3)  $|BF| = |BC|$  [Kathete  $a$ ]

---

SWS  
 $\Rightarrow \Delta ABF \cong \Delta CEB$

$\Rightarrow A_{\Delta ABF} = A_{\Delta CEB}$

**Kongruenz-  
beweis**

$\xrightarrow{(1),(2),(3)} A_{\Delta CBF} = A_{\Delta L_1BE}$

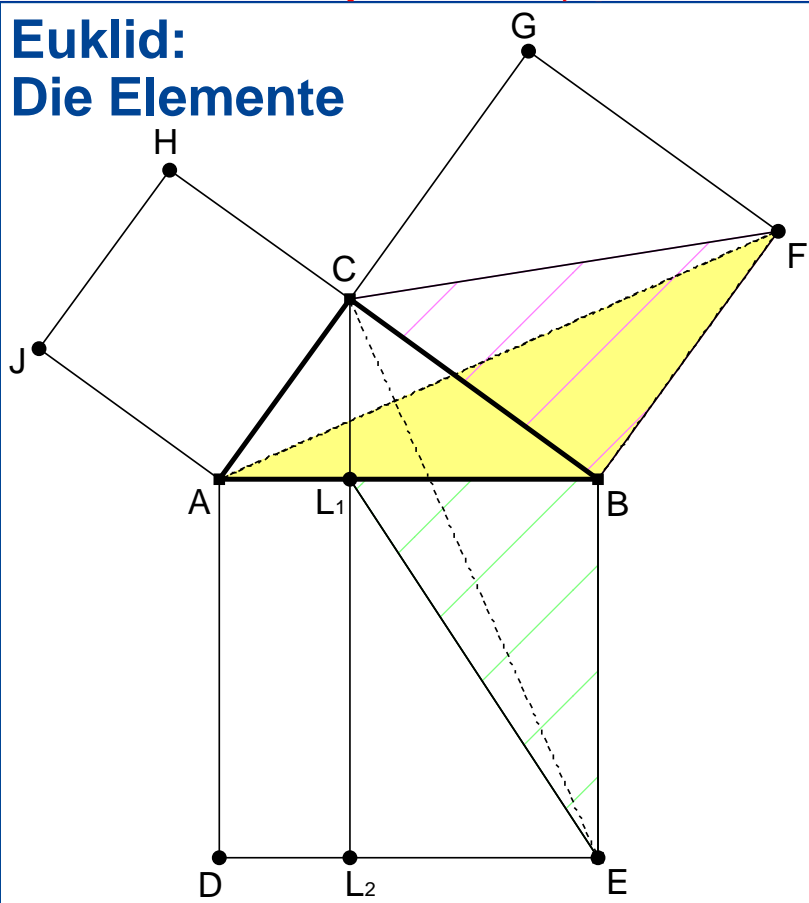
$\Rightarrow a^2 = c \cdot |L_1B|$  [Kathetensatz 1. Teil]

Analog ergibt sich:

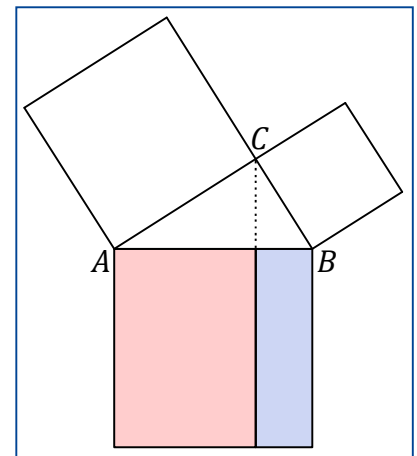
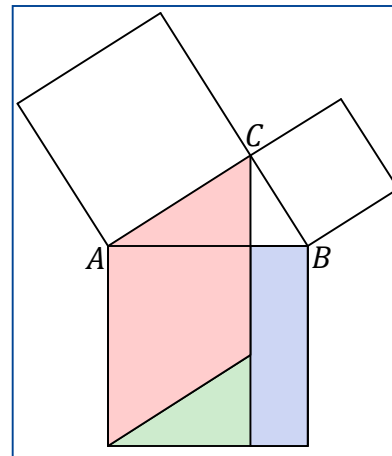
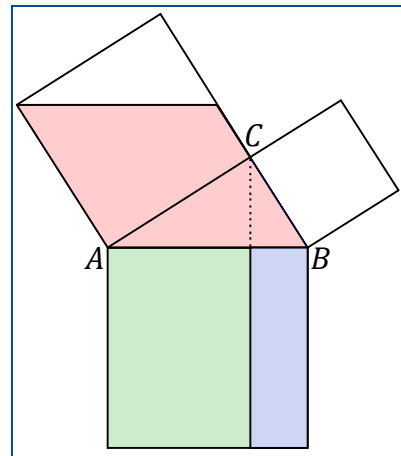
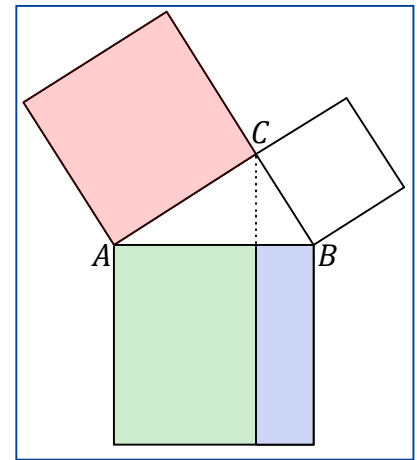
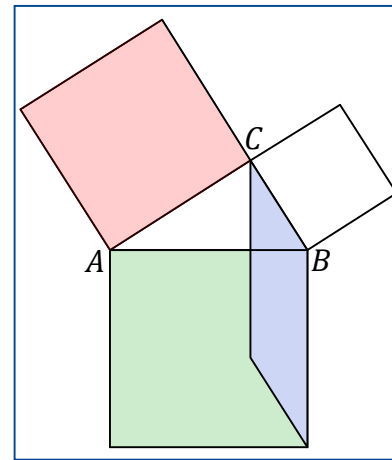
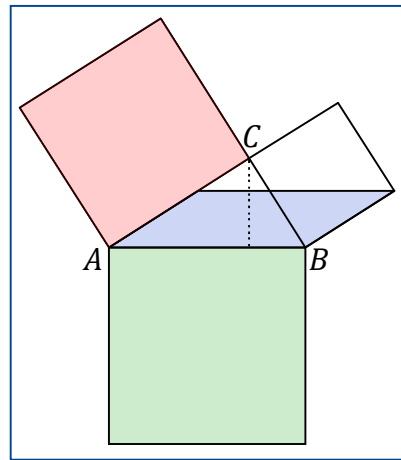
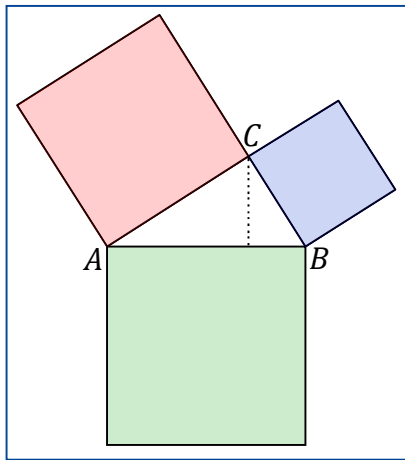
$b^2 = c \cdot |AL_1|$  [Kathetensatz 2. Teil]

$\Rightarrow a^2 + b^2 = c \cdot |L_1B| + c \cdot |AL_1| = c \cdot (|L_1B| + |AL_1|) = c \cdot c = c^2$  ■

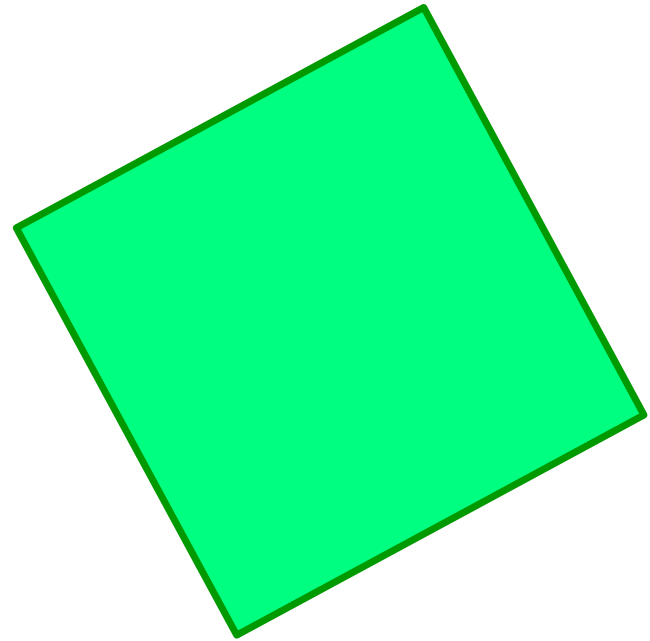
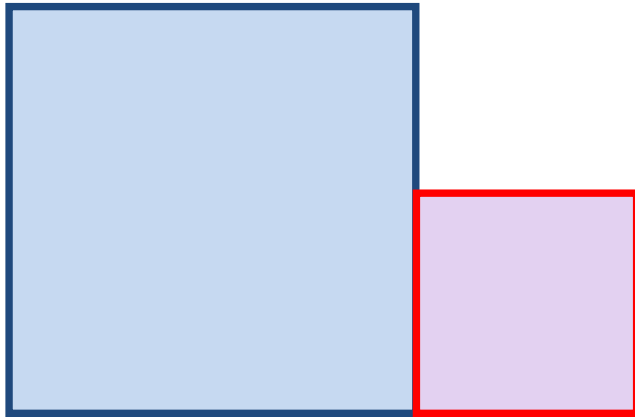
**Euklid:  
Die Elemente**



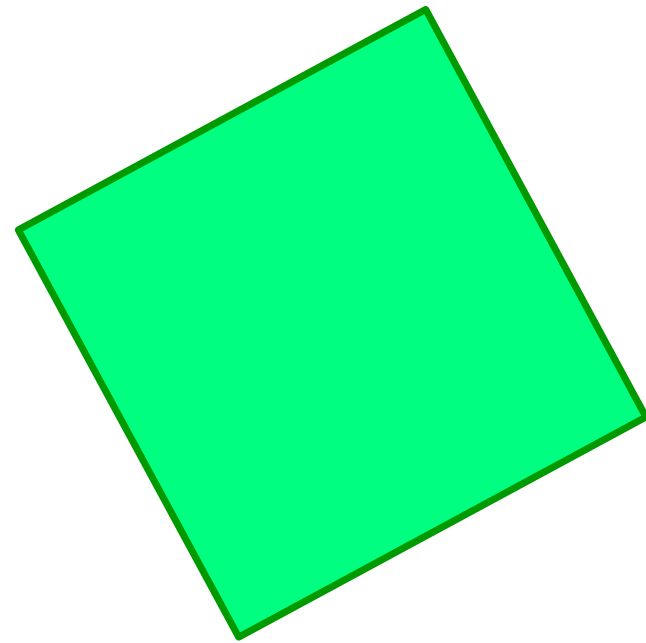
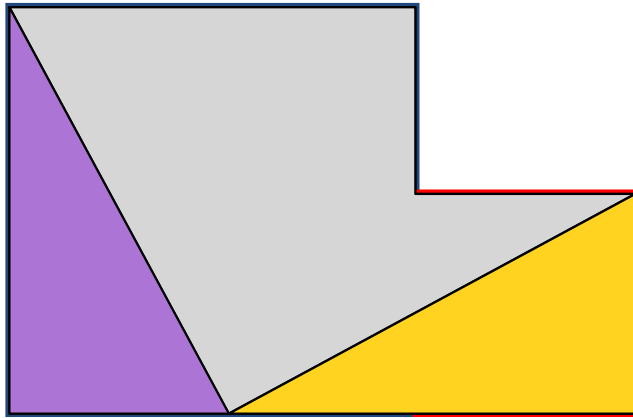
Scherung → Drehung → Scherung



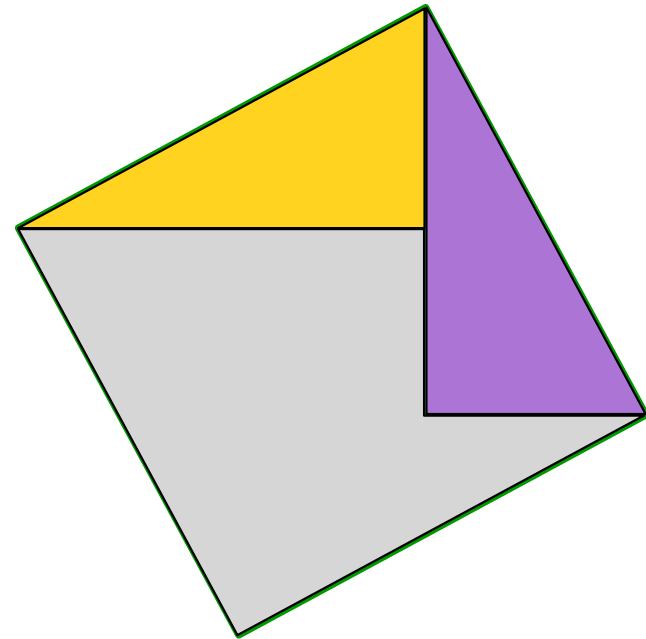
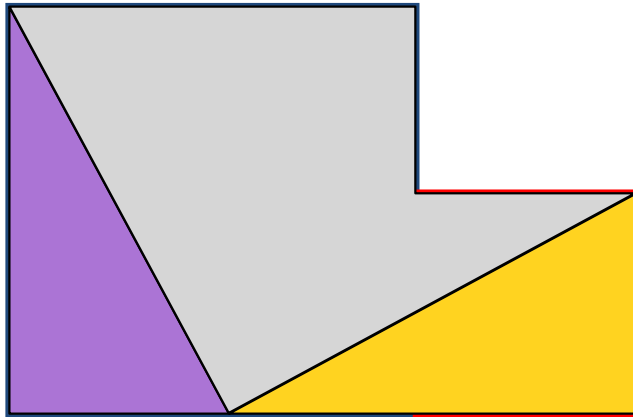
Stuhl der Braut



Stuhl der Braut

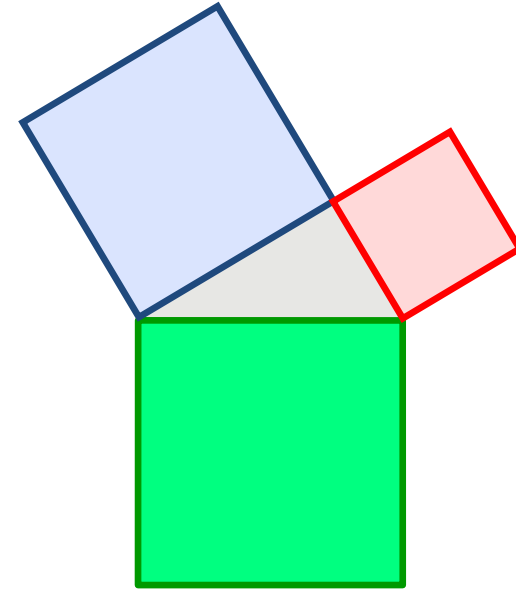
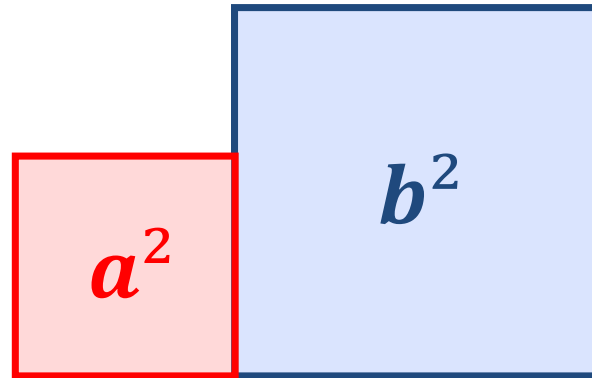
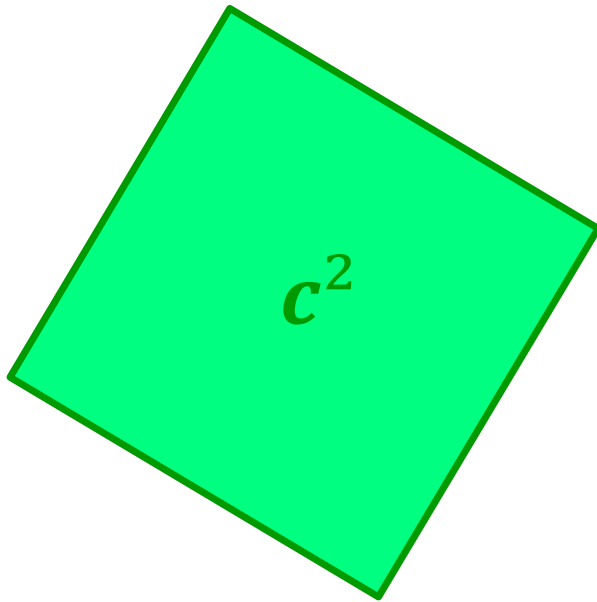


## Stuhl der Braut

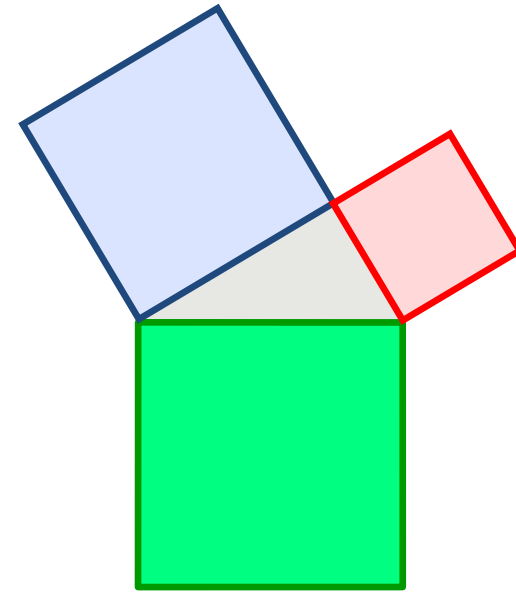
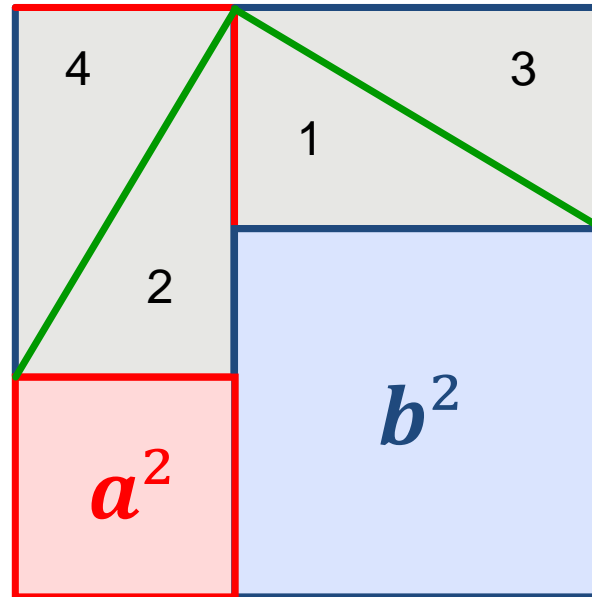
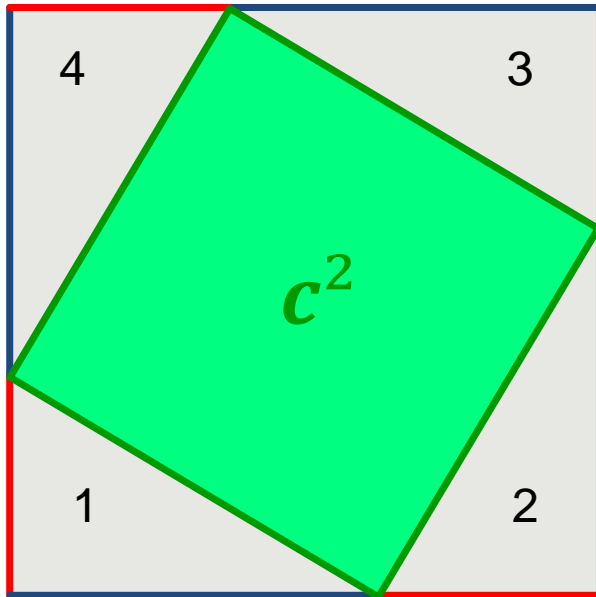




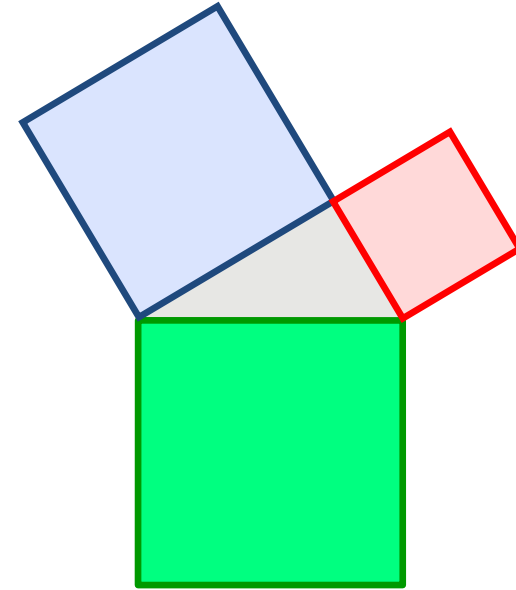
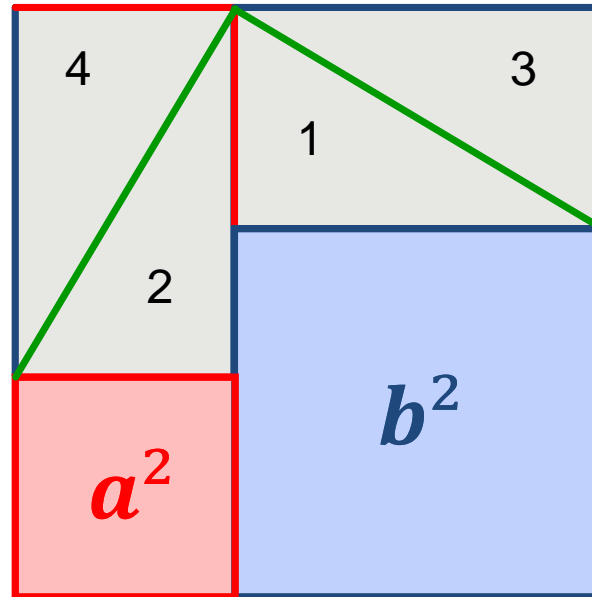
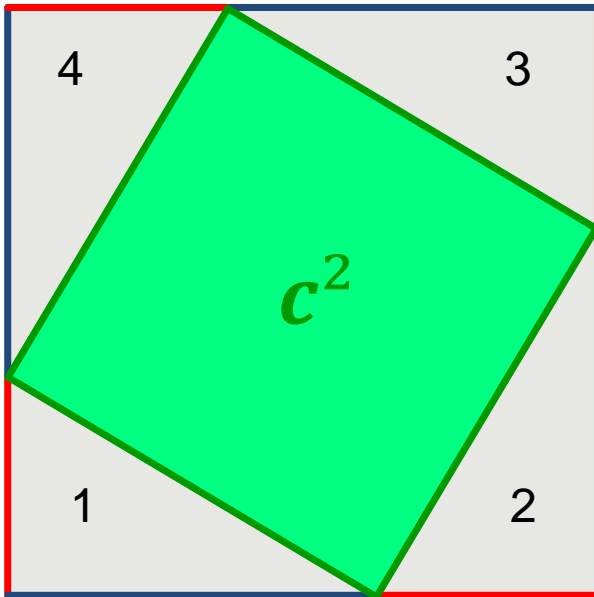
Altindischer Ergänzungsbeweis



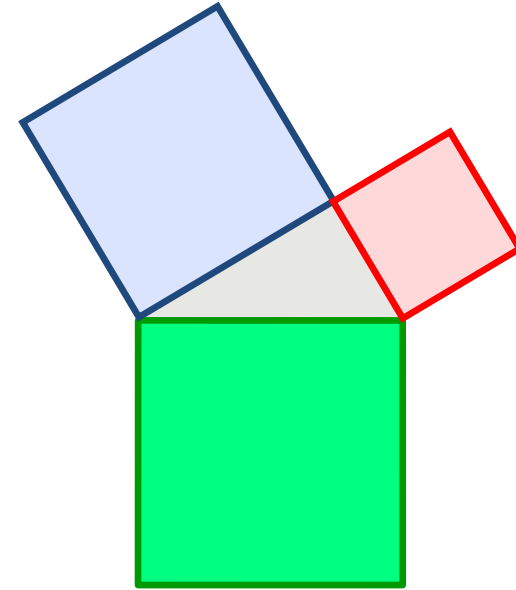
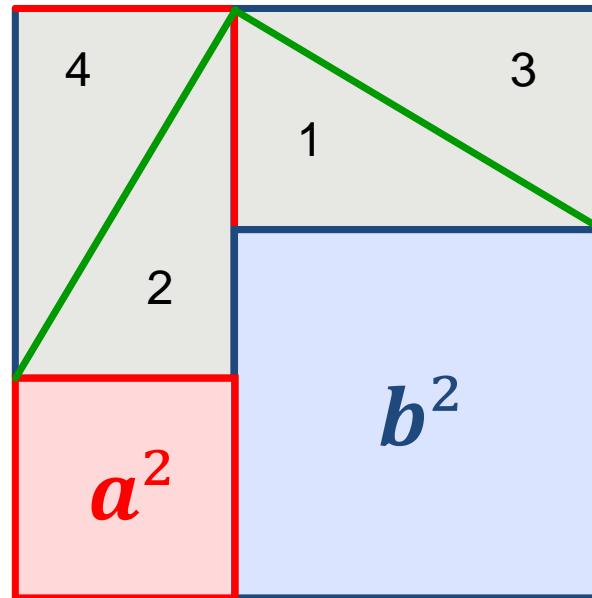
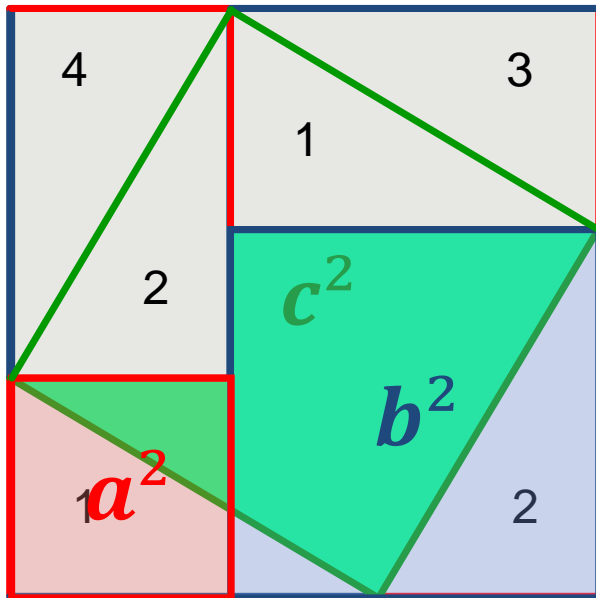
## Altindischer Ergänzungsbeweis

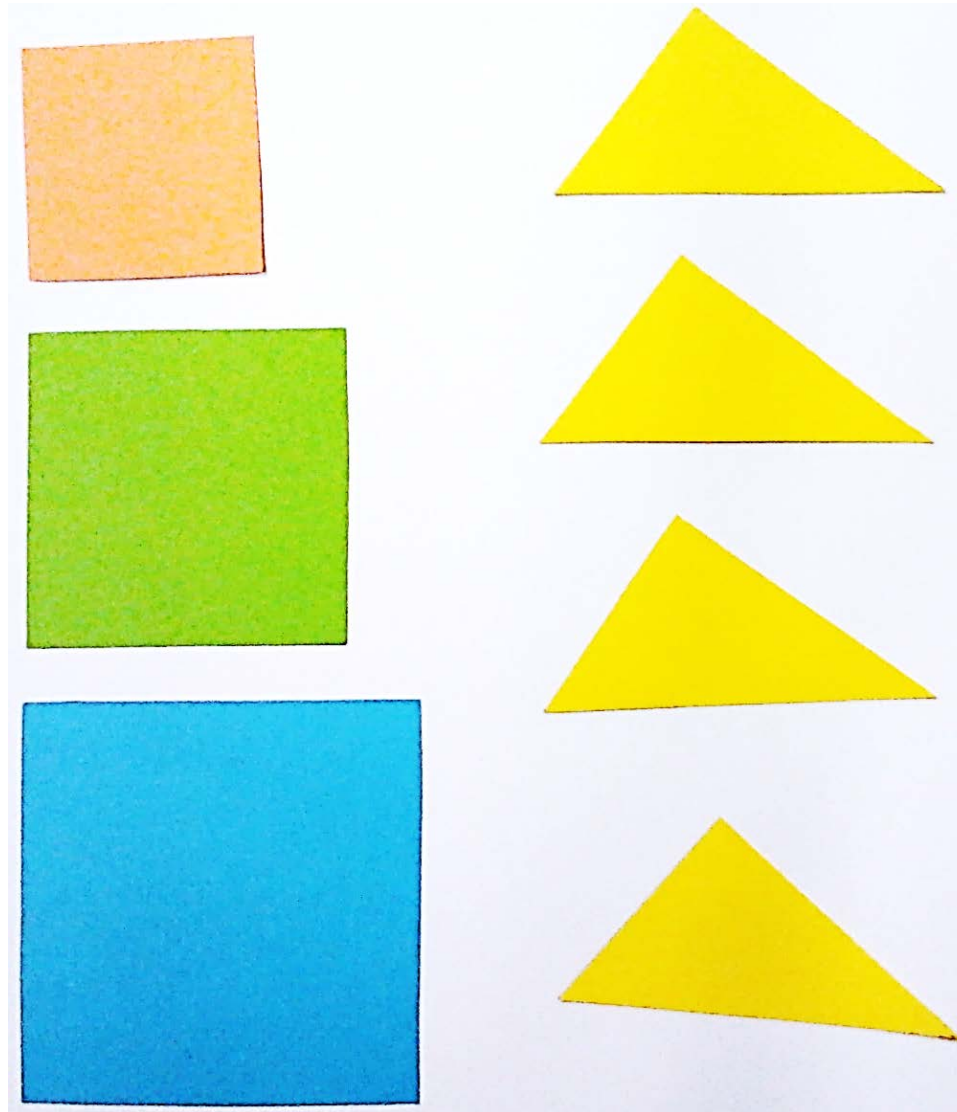


## Altindischer Ergänzungsbeweis



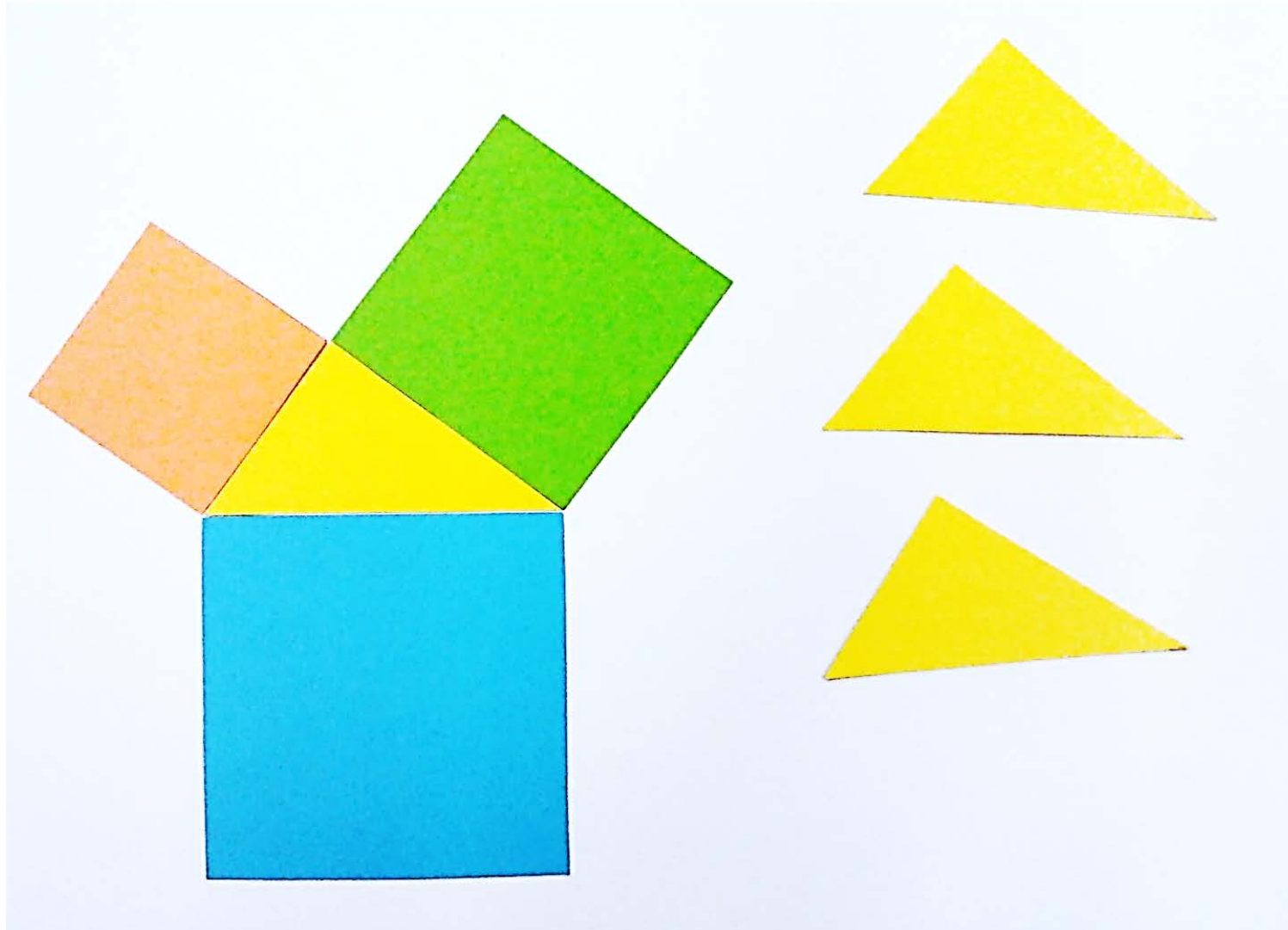
## Altindischer Ergänzungsbeweis

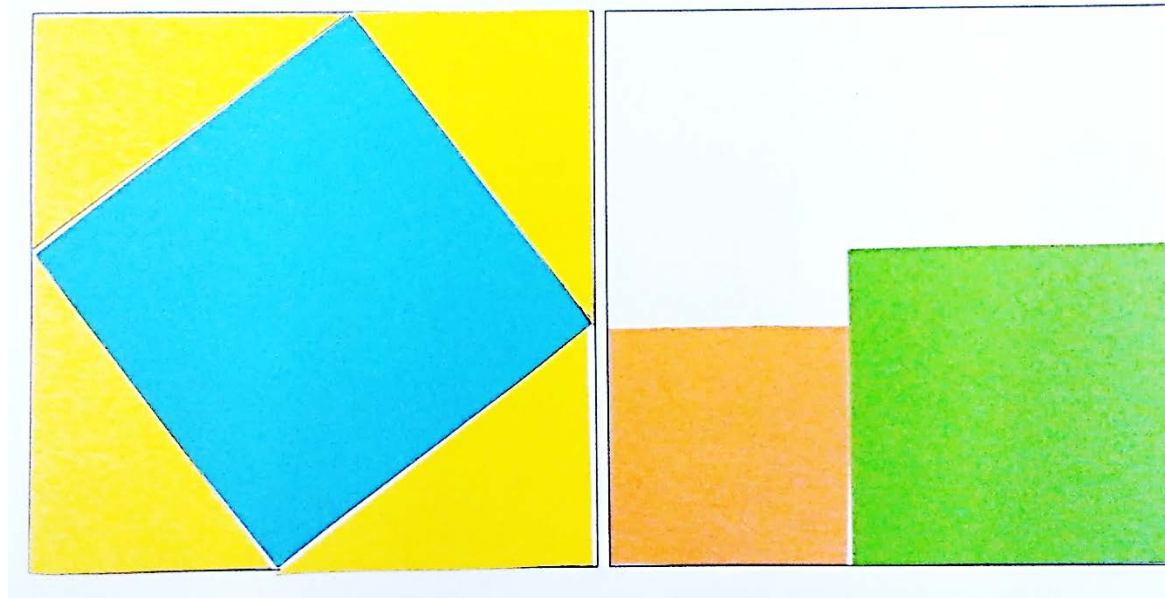


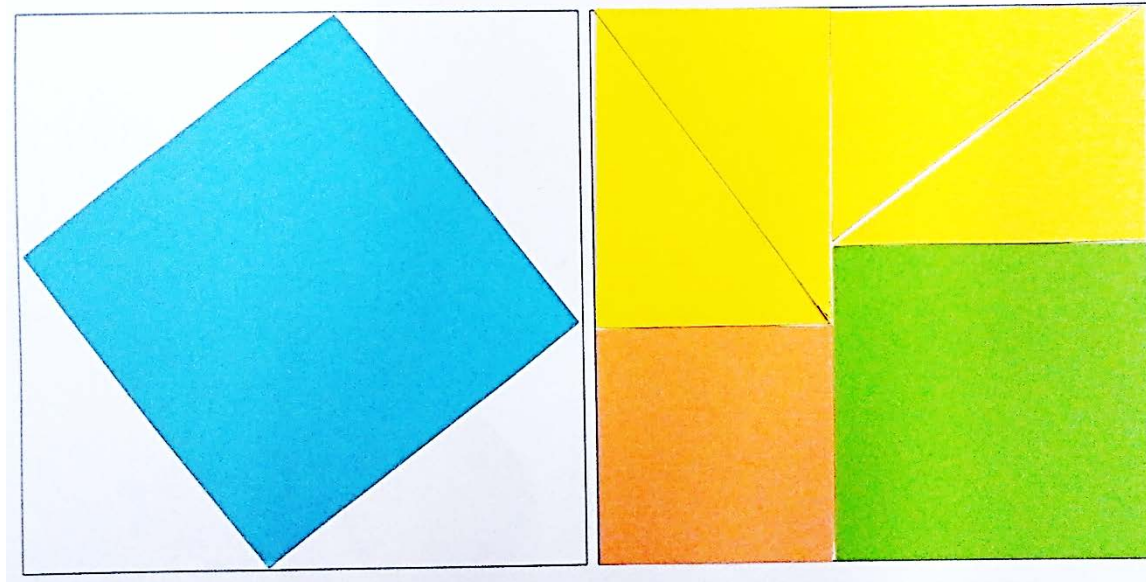


Roth: Pythagoras – Ergänzungsbeweispuzzle – Arbeitsblatt (Textdatenbank)











## ► Hinweis

- ▷ Ein Beweis wird hier „arithmetisch“ genannt, wenn (evtl. anhand einer vorliegenden Figur) ausschließlich algebraische Umformungen durchgeführt werden.

## ► Beispiel

Kathetensatz  $\Rightarrow$  Satz des Pythagoras

Vor:  $a^2 = c \cdot p$  und  $b^2 = c \cdot q$

$$\Rightarrow a^2 + b^2$$

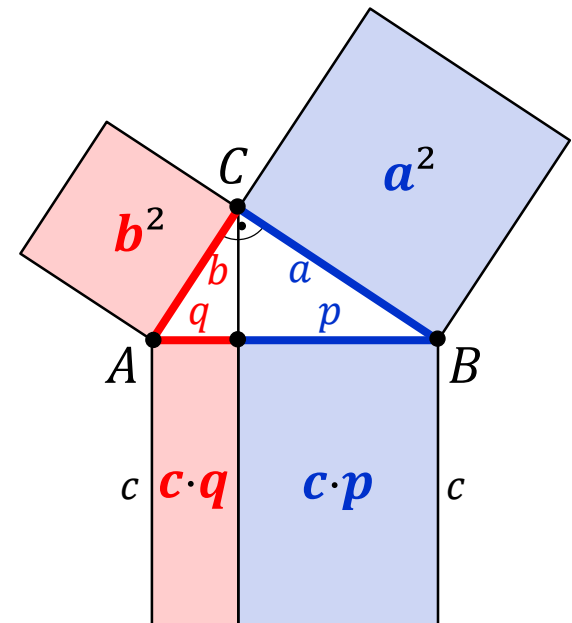
$$= c \cdot p + c \cdot q$$

$$= c \cdot (p + q)$$

$$= c \cdot c$$

$$= c^2$$

■



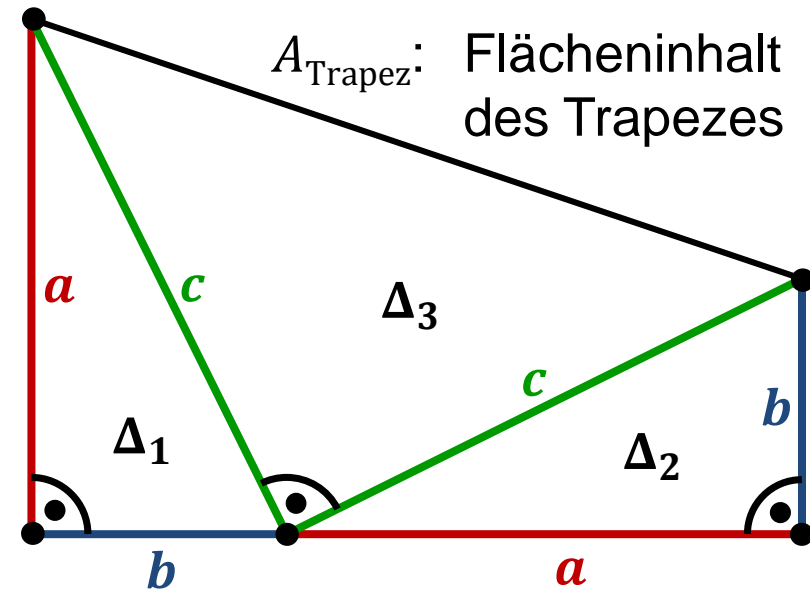
**Beweis** von J.A. Garfield (1881 Präsident der U.S.A.)

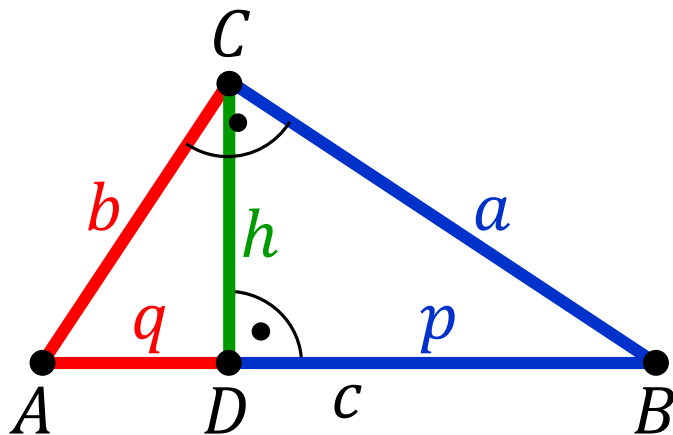
$$\begin{aligned}
 (1) \quad A_{\text{Trapez}} &= A_{\Delta_1} + A_{\Delta_2} + A_{\Delta_3} \\
 &= \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 \\
 &= ab + \frac{1}{2}c^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad A_{\text{Trapez}} &= \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot (a+b) \\
 &= \frac{1}{2}(a+b)^2 \\
 &= \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2)
 \end{aligned}$$

Gleichsetzen der Terme aus (1) und (2) liefert:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2) &= ab + \frac{1}{2}c^2 && | \cdot 2 \\
 a^2 + 2ab + b^2 &= 2ab + c^2 && | - 2ab \\
 a^2 + b^2 &= c^2 && \blacksquare
 \end{aligned}$$





$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD \quad (\text{ww})$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \frac{h}{p} = \frac{q}{h} \Rightarrow h^2 = p \cdot q \\ \frac{b}{q} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = c \cdot q \\ \frac{a}{p} = \frac{c}{a} \Rightarrow a^2 = c \cdot p \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Höhensatz} \\ \text{Katheten-} \\ \text{satz} \end{array}$$



Go to [www.menti.com](https://www.menti.com) and use the code **20 94 87**



 Mentimeter

## Satz des Pythagoras: Beweistyp im Unterricht

0%

Kongruenz-  
beweis

0%

Abbildungs-  
beweis

0%

Zerlegungs-  
gleichheit

0%

Ergänzungs-  
gleichheit

0%

Arithmetischer  
Beweis

0%

Ähnlichkeits-  
beweis



Slide is not active

Activate



0

## ▶ Eigentätigkeit

- ▷ Großteil der Schüler muss in der Lage sein, durch Eigentätigkeit, den Beweis oder die entscheidende Beweisidee selbst zu entdecken bzw. einen wesentlichen Beitrag dazu zu leisten

## ▶ Vielfalt

- ▷ Schüler sollen unterschiedliche Beweismethoden kennen lernen

## ▶ Anschauen und Begreifen

- ▷ Beweis lässt sich gut visualisieren oder enaktiv erarbeiten.

## ▶ Verständnis fördern

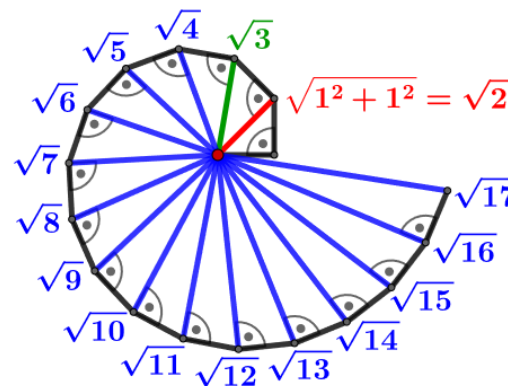
- ▷ Beweis ist leicht durchschaubar
- ▷ Beweis erleichtert eine wichtige Erkenntnis

### **Beispiel:**

- ▶ Satzgruppe des Pythagoras: Aussagen über Flächeninhalte
- ▶ Sollte beim Beweis direkt erkennbar sein

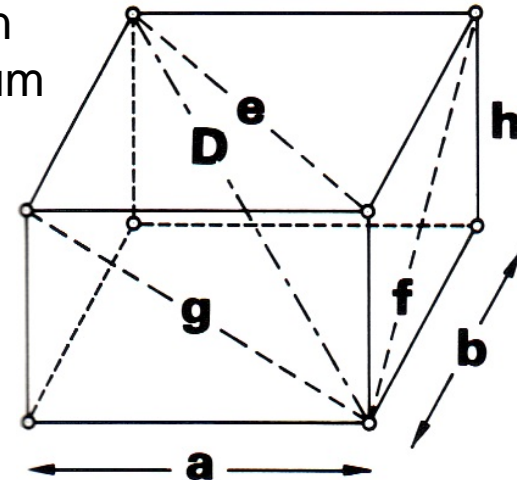
### ▶ Ebene Geometrie

- ▷ Berechnungen
  - ▶ Diagonale des Rechtecks
  - ▶ Höhe & Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks
  - ▶ Abstand zweier Punkte (im Koordinatensystem)
  - ▶ Kreistangenten und Sehnen
  - ▶ Reguläre n-Ecke
  - ▶ Kosinussatz
- ▷ Konstruktionen
  - ▶ Flächenverwandlung
  - ▶ Strecken der Länge  $\sqrt{n}$



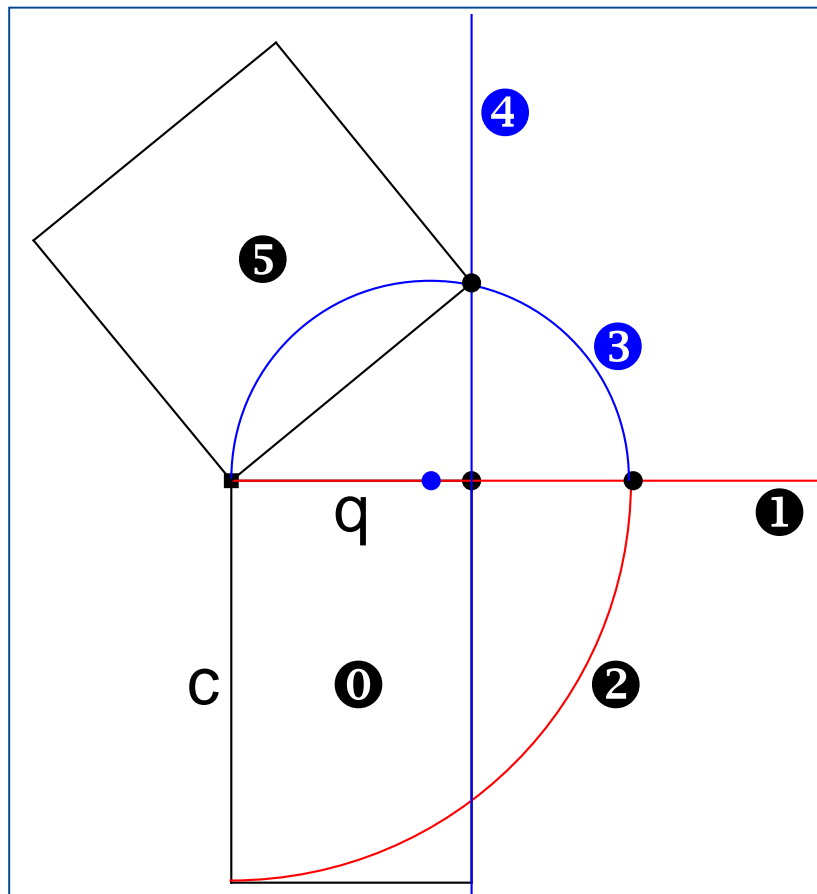
### ▶ Raumgeometrie

- ▷ Berechnungen
  - ▶ Raumdiagonalen
  - ▶ Längen im Raum

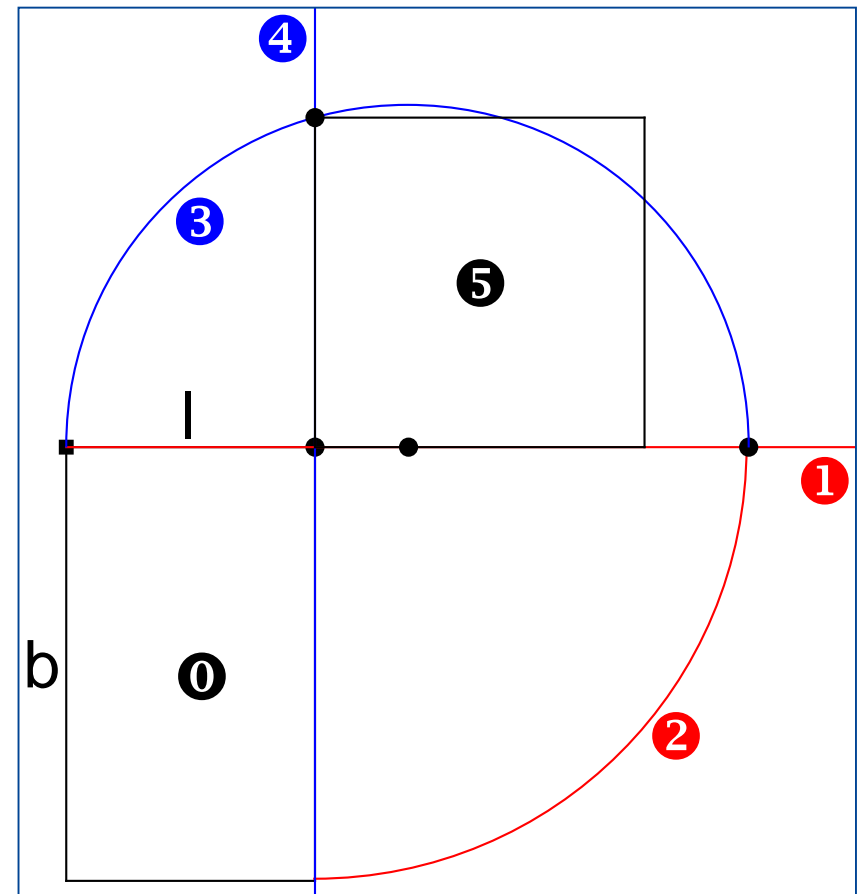


► **Verwandlung eines Rechtecks in ein inhaltsgleiches Quadrat**

**Kathetensatz**

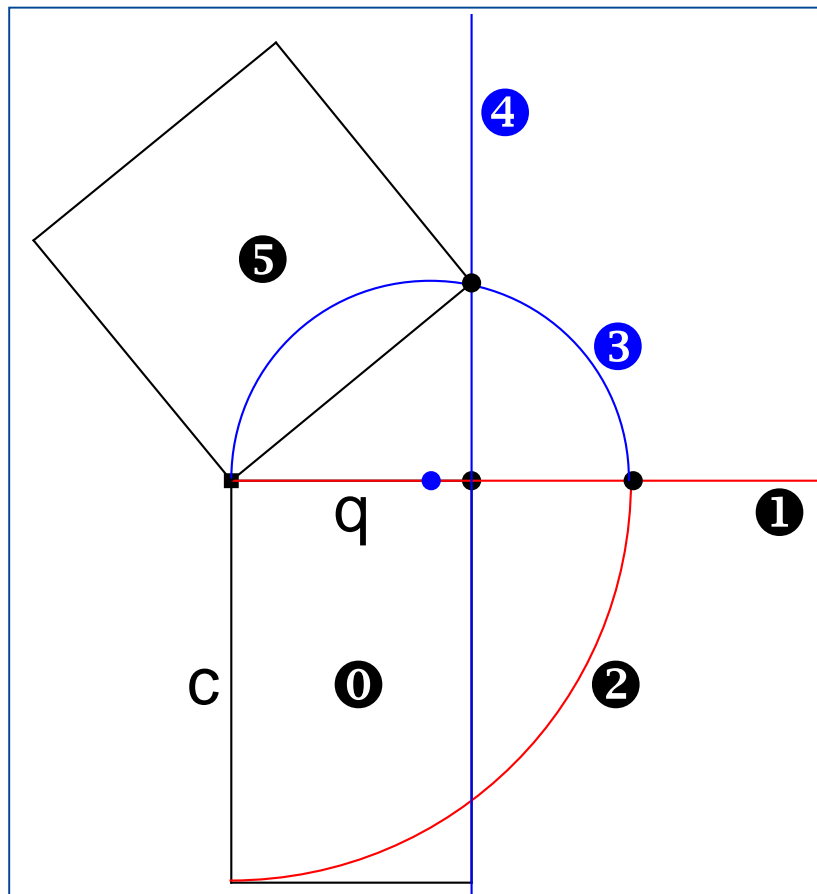


**Höhensatz**



### ► Verwandlung eines Rechtecks in ein inhaltsgleiches Quadrat

#### Kathetensatz



#### Ausgangspunkt:

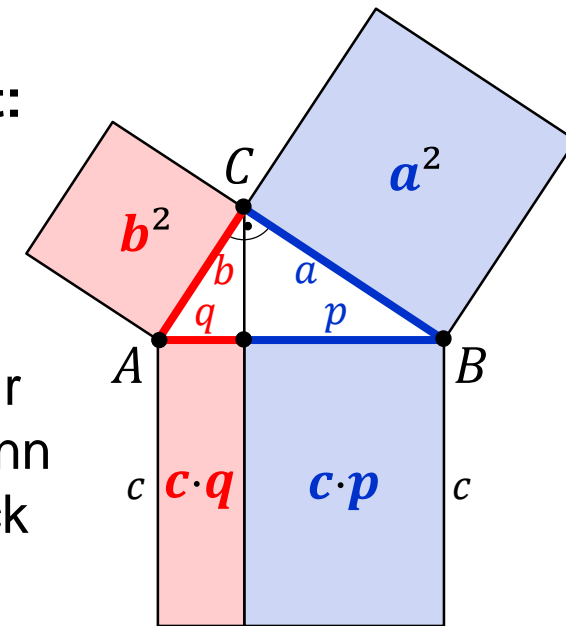
Figur zum  
Kathetensatz

Kann man ein  
Quadrat der Figur  
konstruieren, wenn  
man ein Rechteck  
hat?

→ Konstruktion der  
entsprechenden Kathete.

Welche Schritte sind notwendig?

...

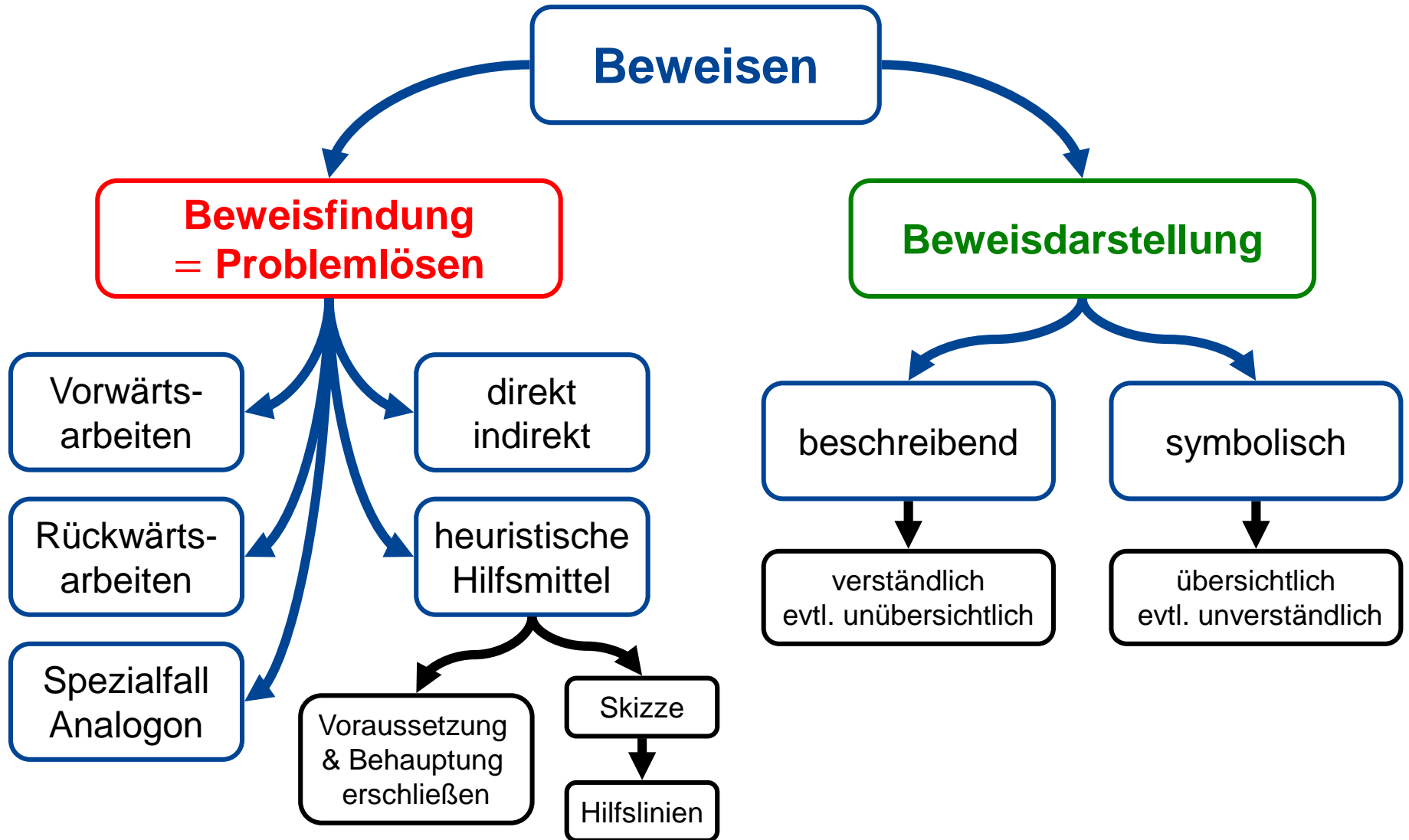




## Kapitel 4: Argumentieren und Beweisen

# 4.4 Beweisen als Tätigkeit





## ► Aussage

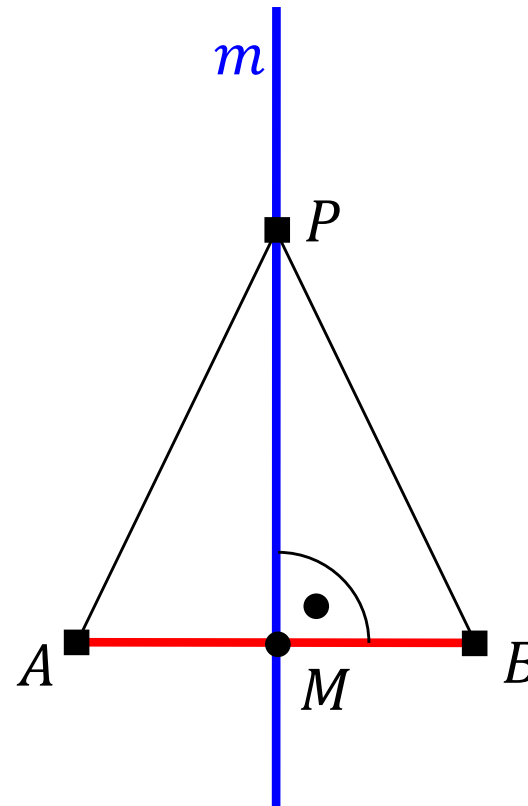
- ▷ Jeder Punkt  $P$  der Mittelsenkrechten  $m$  einer Strecke  $[AB]$  ist gleich weit von den beiden Endpunkten der Strecke entfernt.

## ► Voraussetzung

- (1)  $P \in m$
- (2)  $m \perp [AB]$
- (3)  $M \in m \cap [AB]$
- (4)  $|AM| = |BM|$

## ► Behauptung

$$|AP| = |BP|$$

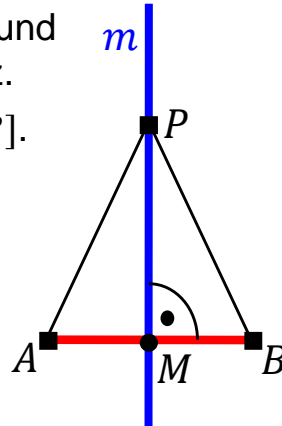


## Beschreibend

Wir betrachten die Dreiecke  $\triangle AMP$  und  $\triangle MBP$  und zeigen deren Kongruenz.

$m$  ist Mittelsenkrechte der Seite  $[AB]$ .

$m$  steht also senkrecht auf der Seite  $[AB]$  und halbiert sie im Schnittpunkt  $M$ . Damit ist die Seite  $[AM]$  des Dreiecks  $\triangle AMP$  genau so lang wie die Seite  $[MB]$  des Dreiecks  $\triangle MBP$ .



Die bei  $M$  liegenden Innenwinkel der beiden Dreiecke sind jeweils rechte Winkel und damit gleich groß.

Schließlich ist die Seite  $[MP]$  beiden Dreiecken gemeinsam.

Damit stimmen die beiden Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind also nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent.

Da kongruente Dreiecke in allen sich entsprechenden Teilen kongruent sind, stimmen auch die dritten Seiten überein, d. h. die Strecken  $[AP]$  und  $[BP]$  sind gleich lang. ■

## Symbolisch

Vor.: a)  $P \in m$

b)  $m \perp [AB]$

c)  $|AM| = |BM|$

Beh.:  $|AP| = |BP|$

Bew.: (Beweisidee:  $\triangle AMP \cong \triangle MBP$ )

(1)  $|AM| = |BM|$  Vor. c)

(2)  $|\sphericalangle PMA| = |\sphericalangle BMP| = 90^\circ$  Vor. b)

(3)  $|PM| = |PM|$  Identität

$\Rightarrow \triangle AMP \cong \triangle MBP$  (1);(2);(3);SWS

$\Rightarrow |AP| = |BP|$  entspr. Seiten  
in kongruenten  $\triangle$

■

## direkter Beweis

$$p \Rightarrow q$$

## indirekter Beweis

(Beweis durch Kontraposition)

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

## Widerspruchsbeweis

$$p \wedge \neg q$$

Abkürzungen:

$p$ : Voraussetzung des Satzes

$q$ : Behauptung des Satzes

## ► Satz

Eine Gerade, die mit einem Kreis genau einen Punkt gemeinsam hat, ist Lot zum Kreisradius durch diesen Punkt.

▷ Vor.:  $g \cap k(M; r) = \{P\}$

▷ Beh.:  $g \perp PM$

## ► Beweis (Widerspruchsbeweis)

Annahme:  $g \cap k(M; r) = \{P\}$  und  $\angle(g, PM) \neq 90^\circ$

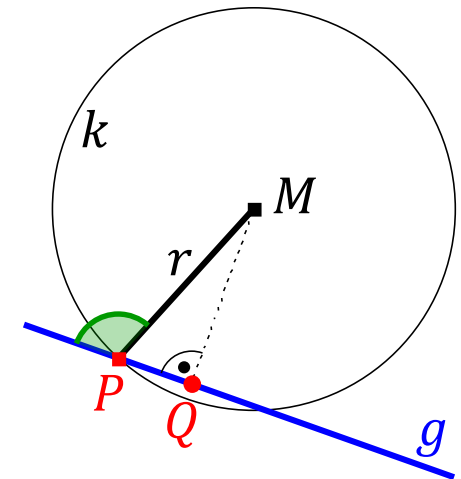
⇒ Der Fußpunkt  $Q$  des von  $M$  auf  $g$  gefällten Lotes ist von  $P$  verschieden.

⇒ Im rechtwinkligen Dreieck  $\Delta PQM$  gilt  $|QM| < |PM| = r$ , da dem größten Winkel die längste Seite gegenüberliegt.

⇒ Der Punkt  $Q \in g$  liegt, wegen  $|QM| < r$  innerhalb des Kreises.

⇒ Die Gerade  $g$  schneidet  $k(M; r)$  in zwei Punkten. ⚡ Widerspruch zur Vor.!!

⇒ Die Annahme war also falsch und es gilt  $\angle(g, PM) = 90^\circ$ . ■



## ► Beweisen

- ▷ Aufbau einer Hierarchie von Sätzen von der Voraussetzung bis hin zur Behauptung der zu beweisenden Aussage.
- ▷ Das lokale Ordnen besteht in dieser Rückführung der Behauptung auf andere Aussagen.
- ▷ Suche nach geeigneten Sätzen.
- ▷ Entschieden, ob eine untergeordnete Aussage bewiesen werden muss.
- ▷ Voraussetzung: Fähigkeit, zwischen einem Satz und einer Definition zu unterscheiden.

## ▶ Beispiel

▷ Zu zeigen: In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Basis gleich groß. (Basiswinkelsatz)

▷ Aus

▶ „Ein gleichschenkliges Dreieck ist ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten (die dritte Seite heißt Basis).“ (Definition)

▷ folgt

▶ „In gleichschenkligen Dreiecken ist die Seitenhalbierende der Basis auch deren Mittelsenkrechte.“ (Beweisen!)

▷ folgt

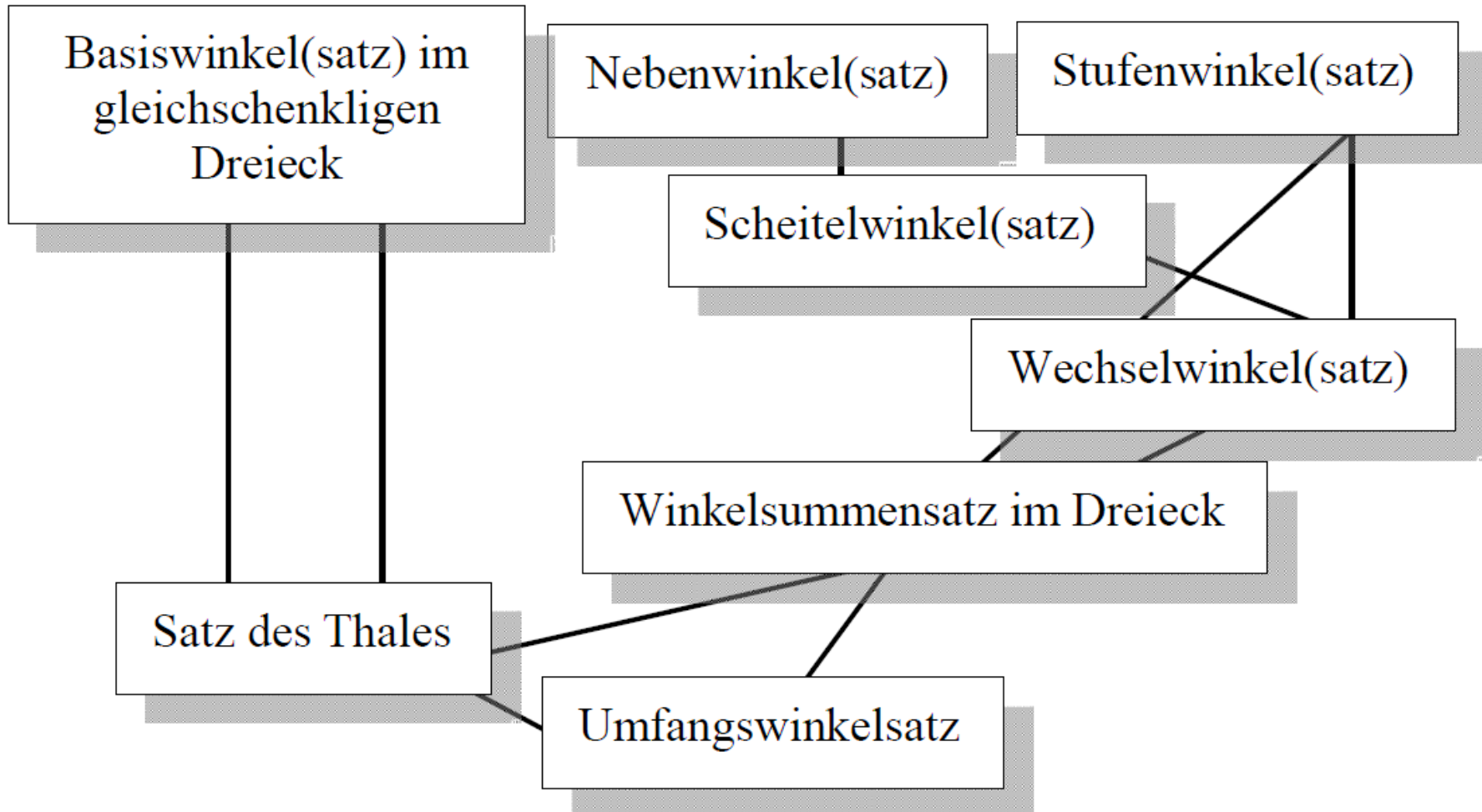
▶ „Ein gleichschenkliges Dreieck ist achsensymmetrisch bzgl. der Mittelsenkrechten der Basis.“ (Beweisen!)

▷ folgt

▶ die Behauptung des Basiswinkelsatzes.

**Beweise hängen u.a.  
von Definitionen ab!**





- ▶ **Beweisen bedingt die Entwicklung vieler für den Alltag wichtiger Fähigkeiten:**
  - ▷ Notwendigkeit einer gemeinsamen Argumentationsgrundlage erkennen
  - ▷ Schlüssigkeit und Wahrheitsgehalt von Aussagen beurteilen
  - ▷ vollständig und richtig argumentieren
  - ▷ generalisieren, spezialisieren, analogisieren
  - ▷ Probleme lösen
  - ▷ Phantasie und Akribie
  - ▷ individuelle Leistungsbereitschaft und kooperatives Denken
  - ▷ Bescheidenheit und Selbstbewusstsein
  - ▷ Einsicht in (mathematische) Sachverhalte gewinnen
  
- ▶ **Beweisen ist eine wesentliche Facette der Mathematik**

## ▶ **Erst Satzfindung, dann Beweisfindung!**

- ▷ Satz ergibt sich meist aus einem Problem
- ▷ Auffälliges entdecken
- ▷ Besonderes  $\leftrightarrow$  Selbstverständliches

## ▶ **Phasenmodell zum Beweisen im MU**

- ▷ Verbalisieren des Satzes
- ▷ Einsicht in die Notwendigkeit einer Begründung
- ▷ Beweisfindung
- ▷ Verbalisieren des Beweises
- ▷ Rückblick
- ▷ Satz einordnen
- ▷ Variieren – Weiterfragen

Stimmt das? bzw.  
Warum stimmt das?