

Didaktik der Geometrie

Didaktik der Geometrie

- 1 Ziele und Inhalte
- 2 Begriffsbildung
- 3 Konstruieren**
- 4 Argumentieren und Beweisen
- 5 Problemlösen
- 6 Entdeckendes Lernen

Didaktik der Geometrie

Kapitel 3: Konstruieren

Kapitel 3: Konstruieren

- 3.1 Was bedeutet „Konstruieren“?
- 3.2 Konstruktionsaufgaben
- 3.3 Konstruktionsbeschreibung
- 3.4 Konstruieren mit einem dynamischen Geometriesystem (DGS)

Kapitel 3: Begriffsbildung

3.1 Was bedeutet „Konstruieren“?



▶ praktische Bedeutung

- ▷ räumliches Vorstellungsvermögen
- ▷ Architektur
- ▷ Maschinenbau ...

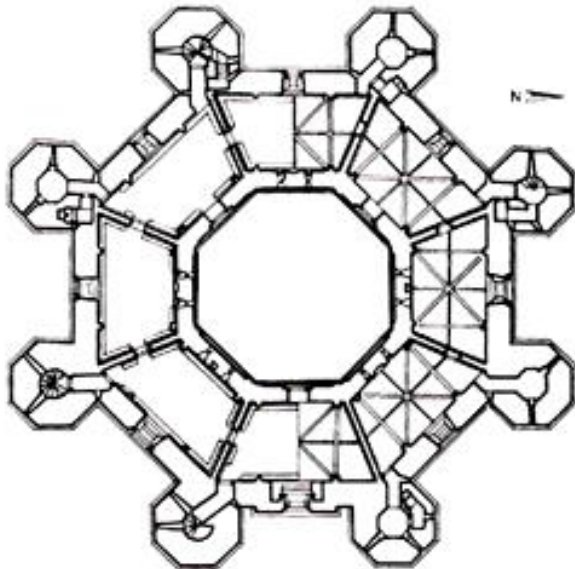
Familie Fallenstein sucht eine Wohnung. Sie liest diese Anzeige:
Auf ihre Zuschrift erhält sie einen Wohnungsgrundriss im Maßstab 1:100. 1 cm in der Zeichnung entspricht 100 cm = 1 m in der Wirklichkeit.



- Gepfl. 4 Zimmer, Küche, Bad, Terrasse, in 5-Familienhaus, Wfl. ca. 90 m² (teilw. ab 1.6., Miete 640 Euro + NK + Kaution, Zuschr. erf. u. 68 A 0076
- a. Wie lang und wie breit sind die einzelnen Räume und die Terrasse?
 - b. Wie lang und wie breit sind der Schreibtisch und das Bett im Kinderzimmer?
 - c. Die beiden Kinderzimmer sollen mit Teppichfliesen (50 cm × 50 cm) ausgelegt werden. Wie viele Fliesen werden benötigt?

▶ theoretische Bedeutung

- ▷ Konstruktionsprobleme haben wesentliche Fortschritte in der Geometrie initiiert
- ▷ Konstruktionsprobleme können das Verständnis erleichtern





- ▶ **Konstruieren im engeren Sinn:**
 - ▶ Zeichnen nach bestimmten Regeln
 - ▶ Zeichenschritte werden nur mit jeweils zugelassenen Zeichengeräten ausgeführt (z. B. Zirkel und Lineal)
 - ▶ Zeichengeräte werden nur zum Ausführen bestimmter Grundfunktionen benutzt (z. B. Lineal nur zum Verbinden zweier vorhandener Punkte)
 - ▶ Beschränkung auf Zirkel und Lineal hauptsächlich historische begründet
 - ▶ Auch eine Beschränkung auf andere Werkzeuge wäre denkbar



▶ **Es gibt viele mit Zirkel und Lineal nicht lösbare Konstruktionsprobleme.**

- ▷ Quadratur des Kreises
- ▷ Winkeldreiteilung
- ▷ regelmäßiges 7-Eck

▶ **Erweiterung der erlaubten Werkzeuge**

- ▷ Winkel- und Längenmessskalen (gegebene Größen als Maße angeben)
- ▷ Geodreieck als Modulsammlung



**„Grundfunktionen“
Schwierigkeiten im
Umgang**



▶ „Reines“ Konstruieren

- ▶ z. B. nur mit Zirkel & Lineal als Werkzeug

▶ Modulares Konstruieren

- ▶ Bereits durchgeführte Konstruktionen können als Bausteine (Module) in anderen Konstruktion verwendet werden.
- ▶ DGS:
Als Makros gespeicherte Konstruktionen (Module) können in anderen Konstruktionen verwendet werden.
- ▶ Euklid: Konstruktionsbeschreibungen verweisen auf bereits gelöste Konstruktionsaufgaben
→ Verwendung von Modulen

▶ Konstruktion → Prozess

- ▷ Oft wird zu viel Wert auf die fertige Zeichnung gelegt.

▶ Konstruktionsbeschreibung (Konstruktionsplan)

- ▷ Erklärung (Verbalisierung) des Prozesses.

▶ Schritte des Konstruktionsprozesses

- ▷ Vergleichbar mit den Schritten beim Auflösen einer Gleichung, die am Rand notiert werden: $2x + 4 = 8 \quad | : 2$
- ▷ Die sequenziell notierte Lösung einer Gleichung ist auch ohne die Randbemerkung nachvollziehbar.
- ▷ Der fertigen Konstruktion sieht man ihren Ablauf nicht an.
- ▷ Die Konstruktionsbeschreibung ist insbesondere auch für das Nachvollziehen und das Verständnis einer Konstruktion hilfreich und notwendig.

Konstruieren

- ▷ Bildpunkt bei einer Achsenspiegelung
- ▷ Symmetrieachse zu zwei Punkten
- ▷ Parallele zu einer Geraden

▶ Halbieren

- ▷ Strecke
- ▷ Winkel

▶ Lot

- ▷ von einem Punkt (außerhalb einer Geraden) auf eine Gerade fallen
- ▷ in einem Geradenpunkt auf einer Geraden errichten

▶ Kreise am Dreieck

- ▷ Umkreis
- ▷ Inkreis



Kapitel 3: Begriffsbildung

3.2 Konstruktions- aufgaben

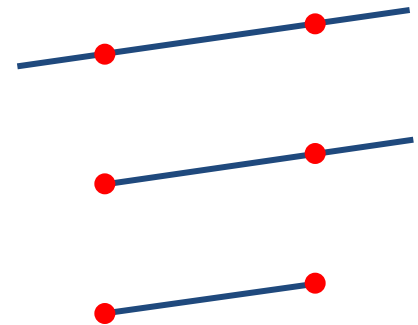
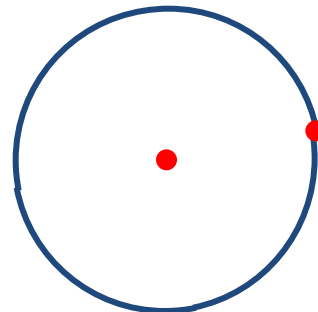
▶ **Grundkonstruktionen sind**

- ▷ Eindeutig (Zu jeder Anfangs- gibt es genau eine Zielkonfiguration.)
- ▷ in einem Schritt durchführbar (mit dem zugelassenen Zeichengerät)

▶ **Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal**

Zu zwei verschiedenen gegebenen Punkten

- ▷ die Verbindungsgerade zeichnen,
- ▷ eine Halbgerade zeichnen, die in einem der Punkte beginnt und durch den anderen verläuft,
- ▷ eine Strecke zeichnen, die in einem der Punkte beginnt und im anderen endet,
- ▷ einen Kreis zeichnen dessen Mittelpunkt einer der Punkte ist und der durch den anderen Punkt verläuft.



Aufgabe: Von einer Ausgangs- zu einer Zielkonfiguration kommen.

- ▷ *Konfiguration:*
Menge geometrischer Objekte + System von Bedingungen
- ▷ Zu einer Anfangskonfiguration kann es *keine, genau eine* (eindeutig lösbar) oder *mehrere* Zielkonfigurationen gibt.

Finden der Lösung

- ▷ Planfigur, heuristische Strategien

Darstellung

- ▷ Konstruktionsbeschreibung
- ▷ Konstruktion

Richtigkeit

- ▷ Zeigen, dass jeder Konstruktionsschritt durchführbar ist.



▶ Analyse – Finden der Konstruktion

*heuristische
Phase*

- ▷ Planfigur
- ▷ Welche Teile sind in welcher Reihenfolge konstruierbar?
- ▷ Evtl. Hilfslinien einzeichnen bzw. zunächst Teilkonstruktionen

- ▷ Es entsteht ein Lösungsplan der die Begründung für die Durchführbarkeit der Konstruktion enthält.

▶ Ausführung – Darstellen der Konstruktion

*algorithmische
Phase*

- ▷ Konstruktionszeichnung
- ▷ Konstruktionsbeschreibung
- ▷ Begründung der Richtigkeit

▶ Determination

*analytische
Phase*

- ▷ Diskussion der Anzahl der Lösungen (evtl. unter verschiedenen Bedingungen für die Ausgangsgrößen)

▶ **Zeichnen von Figuren**

Grundschule

▶ **Zeichnen von Figuren mit best. Eigenschaften**

▶ **Zeichenpläne als Problemlösungen**

Sekundarstufe I

▶ **Lokales Ordnen von Konstruktionen**

▶ **Kritische Betrachtung von Konstruktionen**

Sekundarstufe II

▶ Einführen neuer Begriffe

- ▷ Konstruiere ein Viereck, bei dem gegenüberliegende Seiten parallel zueinander sind.
→ Parallelogramm

▶ Entdecken von Sätzen und ihren Beweisen

- ▷ Konstruiere zu einem gegebenen Dreieck einen Kreis durch die drei Eckpunkte.
→ Satz:
In jedem Dreieck schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt.

▶ Thematisieren anschaulich evidenter Sätze

- ▷ Konstruiere ein Dreieck aus den Seitenlängen $a = 4$ cm, $b = 3$ cm und $c = 8$ cm.
→ Dreiecksungleichung



Kapitel 3: Begriffsbildung

3.3 Konstruktions- beschreibung

▶ **Verbalisieren als übergreifendes Lernziel**

- ▷ sprachliche Korrektheit und Verwendung der Fachsprache
- ▷ korrekte Reihenfolge von Argumentationsschritten
- ▷ sinnvolle Schrittweite von Argumentationsschritten
- ▷ Vollständigkeit der Angaben

▶ **Typische Fehler bei Konstruktionsbeschreibungen**

- ▷ „Erlebnisbericht“
 - ▶ „Zunächst nehme ich den Zirkel zur Hand.
Dann steche ich im Punkt A ein ...“
- ▷ Fehlende Konstruktionsparameter
 - ▶ z. B. Kreise ohne Angabe von Mittelpunkt und Radius
- ▷ Es werden keine Module verwendet!
 - ▶ z. B. werden bei der Inkreiskonstruktion nicht die Winkelhalbierenden angegeben, sondern wie man sie konstruiert

- ▶ **Bisherige Reihenfolge „Erst Konstruktion, dann die Beschreibung“ umkehren!**
- ▶ **Die Konstruktionsbeschreibung zur Grundlage der Konstruktion machen!**
- ▶ **Hier kann der Computer und insbesondere das Programm GeoGebra helfen.**



▶ **Gegeben:**

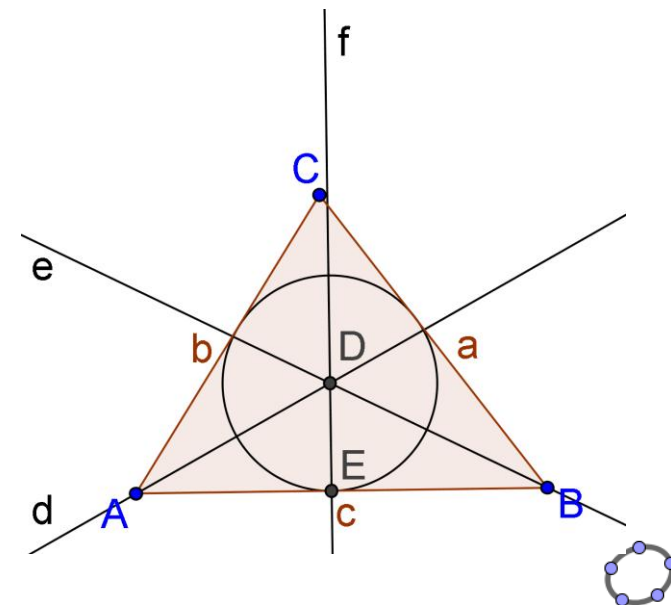
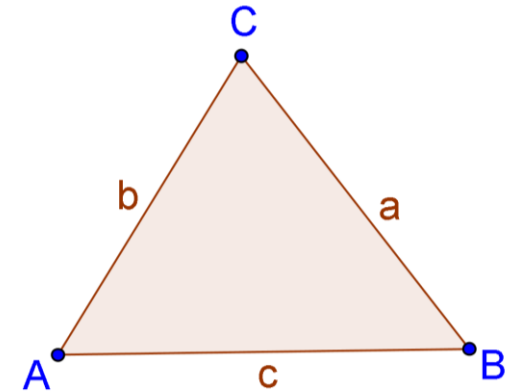
- ▷ Dreieck $\triangle ABC$

▶ **Gesucht:**

- ▷ Inkreis von $\triangle ABC$

▶ **Konstruktionsbeschreibung:**

- ▷ Winkelhalbierende[B,A,C] =: d
- ▷ Winkelhalbierende[C,B,A] =: e
- ▷ schneide[d,e] =: D
- ▷ Senkrechte[D,c] =: f
- ▷ schneide[f,c] =: E
- ▷ Kreis[D,Strecke[D,E]] =: g
- ▷ Der Kreis g ist der gesuchte Inkreis.



▶ **Gegeben:**

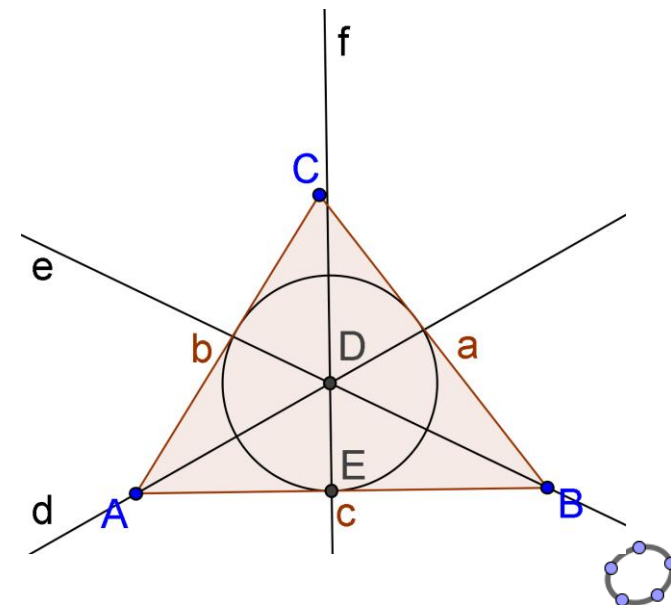
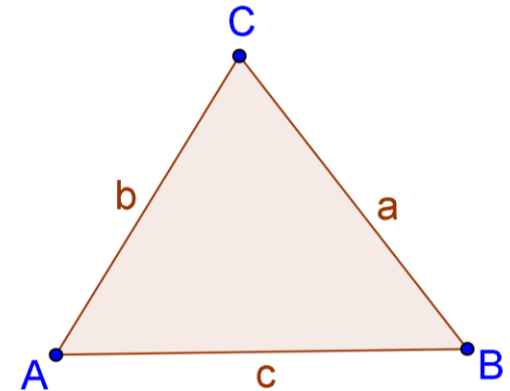
- ▷ Dreieck $\triangle ABC$

▶ **Gesucht:**

- ▷ Inkreis von $\triangle ABC$

▶ **Konstruktionsbeschreibung:**

- ▷ (1) D ist der Schnittpunkt
 - ▶ der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ mit
 - ▶ der Winkelhalbierenden von $\angle CBA$.
- ▷ (2) E ist der Schnittpunkt
 - ▶ des von D auf die Strecke c gefällten Lotes f mit
 - ▶ der Dreiecksseite c.
- ▷ (3) Der Inkreis $k(D, [DE])$ ist der Kreis um D mit der Strecke $[DE]$ als Radius.





Kapitel 3: Begriffsbildung

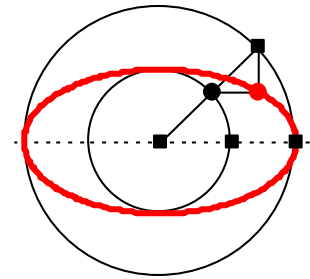
3.4 Konstruieren mit einem dynamischen Geometriesystem (DGS)

▶ Zugmodus

- ▶ Erstellte Konstruktionen können variiert werden.
- ▶ Jede DGS-Konfiguration umfasst eine ganze Klasse von Figuren die so konstruiert werden können. („zugfest“)

▶ Ortslinienfunktion

- ▶ Bei der Variation von Konstruktionen können Ortslinien von Punkten erstellt werden.



▶ Makros

- ▶ Makros erlauben ein modulares Konstruieren, also das Zurückgreifen auf bereits erstellte Konstruktionen

▶ Außerdem

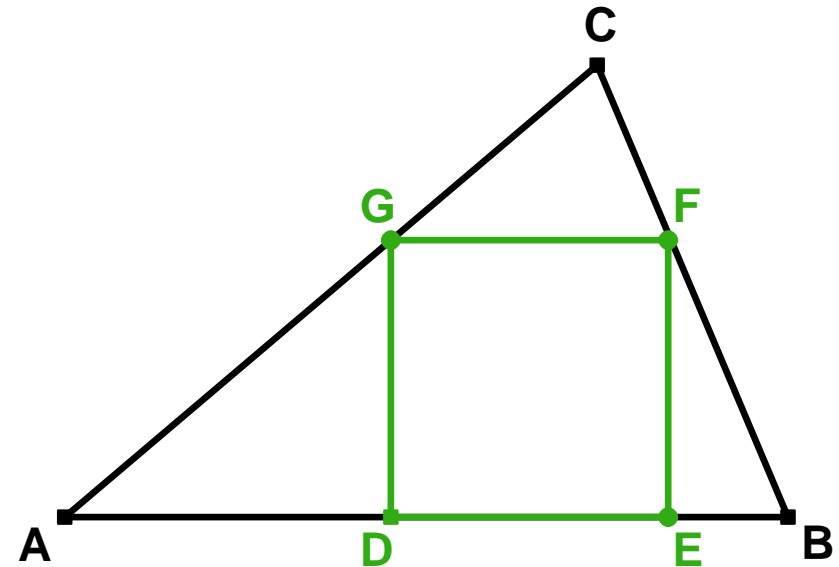
- ▶ Konstruktionen können schneller, sauberer und präziser erstellt, leichter korrigiert und Messungen genauer durchgeführt werden als mit Papier und Bleistift.

► **Aufgabe:**

- ▷ Konstruieren Sie zum spitzwinkligen Dreieck ABC ein Quadrat $DEFG$ mit $D, E \in [AB]$, $F \in [BC]$ und $G \in [AC]$.

► **Hinweis:**

- ▷ Nutzen Sie die $(n-1)$ -Strategie.





**Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus folgenden Längen:
Seite c , Höhe h_c und Seitenhalbierende s_a**

Länge_c=4 5

Länge_hc=3,5 5

Länge_sa=2,5 5

Planfigur:

