

Jürgen Roth

Didaktik der Geometrie

Modul 5: Fachdidaktische Bereiche



Didaktik der Geometrie

- 1 Ziele und Inhalte
- 2 Begriffsbildung
- 3 Konstruieren
- 4 Argumentieren und Beweisen
- 5 Problemlösen
- 6 Entdeckendes Lernen



Didaktik der Geometrie

Kapitel 3: Konstruieren



Kapitel 3: Konstruieren

3.1 Was bedeutet „Konstruieren“?

3.2 Konstruktionsaufgaben

3.3 Konstruktionsbeschreibung

3.4 Konstruieren mit einem dynamischen
Geometrie-System (DGS)



Kapitel 3: Konstruieren

3.1 Was bedeutet Konstruieren?



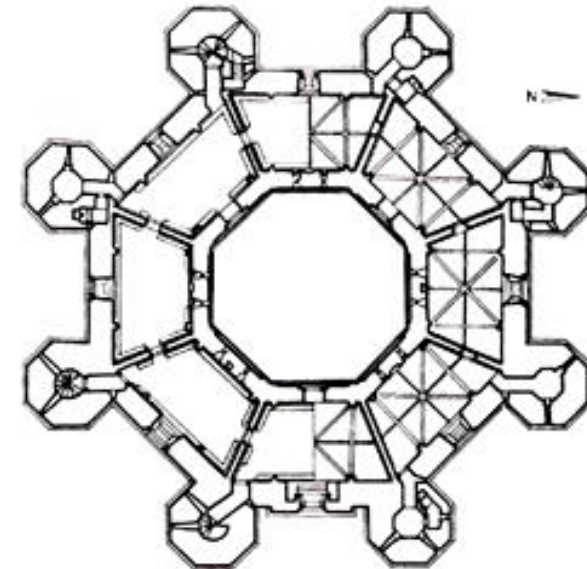
► **Praktische Bedeutung**

- ▷ räumliches Vorstellungsvermögen
- ▷ Architektur
- ▷ Maschinenbau
- ▷ ...



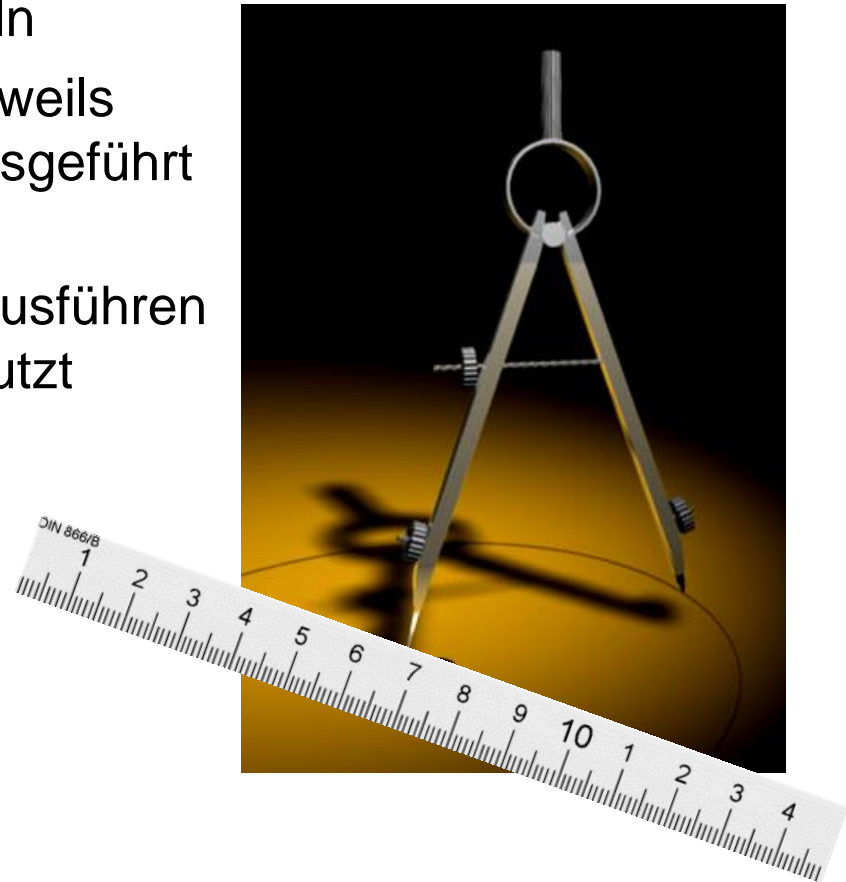
► **theoretische Bedeutung**

- ▷ Konstruktionsprobleme haben wesentliche Fortschritte in der Geometrie initiiert
- ▷ Konstruieren kann des Verständnis von Begriffen, ... unterstützen



► Konstruieren im engeren Sinn

- ▷ Zeichnen nach bestimmten Regeln
- ▷ Zeichenschritte werden nur mit jeweils zugelassenen Zeichengeräten ausgeführt (z. B. Zirkel & Lineal)
- ▷ Zeichengeräte werden nur zum Ausführen bestimmter Grundfunktionen benutzt (z. B. Lineal nur zum Verbinden zweier vorhandener Punkte)
- ▷ Beschränkung auf Zirkel und Lineal historisch begründet
- ▷ Auch eine Beschränkung auf andere Werkzeuge wäre denkbar



▶ **Es gibt viele mit Zirkel und Lineal nicht lösbare Konstruktionsprobleme.**

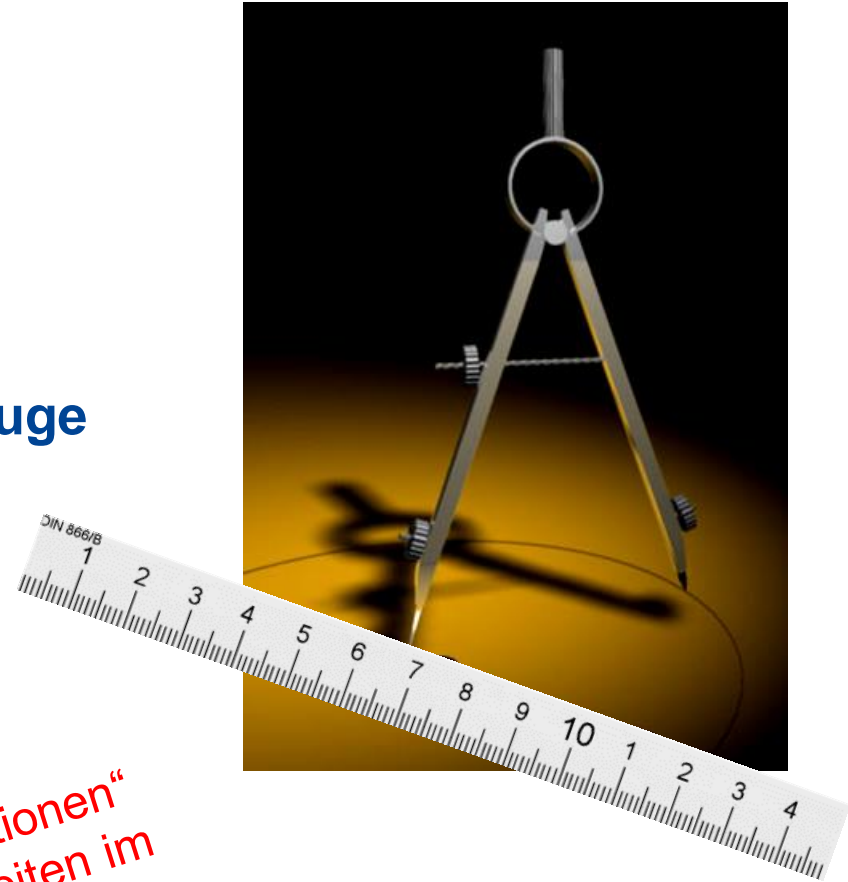
- ▷ Quadratur des Kreises
- ▷ Winkeldreiteilung
- ▷ regelmäßiges 7-Eck

▶ **Erweiterung der erlaubten Werkzeuge**

- ▷ Winkel- und Längenmessskalen (gegebene Größen als Maße angeben)
- ▷ Geodreieck als Modulsammlung



**„Grundfunktionen“
Schwierigkeiten im
Umgang**

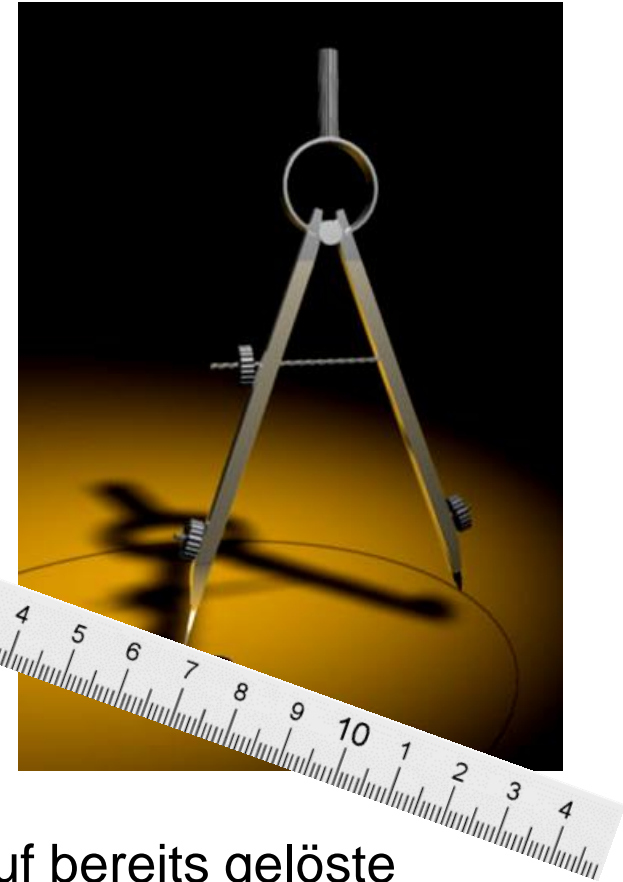


▶ „Reines“ Konstruieren

- ▷ z. B. nur mit Zirkel & Lineal als Werkzeug

▶ Modulares Konstruieren

- ▷ Bereits durchgeführte Konstruktionen können als Bausteine (**Module**) in anderen Konstruktion verwendet werden.
- ▷ **Dynamische Geometrie-Systeme (DGS)**: Als Makros/Werkzeuge gespeicherte Konstruktionen (**Module**) können in anderen Konstruktionen verwendet werden.
- ▷ Elemente des Euklid: Konstruktionsbeschreibungen verweisen auf bereits gelöste Konstruktionsaufgaben → Verwendung von Modulen



▶ **Konstruktion → Prozess**

- ▷ Oft wird zu viel Wert auf die fertige Zeichnung gelegt.

▶ **Konstruktionsbeschreibung (Konstruktionsplan)**

- ▷ Erklärung (Verbalisierung) des Prozesses.

▶ **Schritte des Konstruktionsprozesses**

- ▷ Vergleichbar mit den Schritten beim Auflösen einer Gleichung, die am Rand notiert werden:
$$2x + 4 = 8 \quad | : 2$$
- ▷ Die sequenziell notierte Lösung einer Gleichung ist auch ohne die Randbemerkung nachvollziehbar.
- ▷ Der fertigen Konstruktion sieht man ihren Ablauf nicht an.
- ▷ Die Konstruktionsbeschreibung ist insbesondere auch für das Nachvollziehen und das Verständnis einer Konstruktion hilfreich und notwendig.

http://www.geogebra.org/de/upload/files/dynamische_arbeitsblaetter/lwolf/grundkonstruktionen/konstruktionen.html

Konstruieren

- ▷ Bildpunkt bei einer Achsenspiegelung
- ▷ Symmetrieachse zu zwei Punkten
- ▷ Parallele zu einer Geraden

▶ Halbieren

- ▷ Strecke
- ▷ Winkel

▶ Lot

- ▷ von einem Punkt (außerhalb einer Geraden) auf eine Gerade fallen
- ▷ in einem Geradenpunkt auf einer Geraden errichten

▶ Kreise am Dreieck

- ▷ Umkreis
- ▷ Inkreis



Kapitel 3: Konstruieren

3.2 Konstruktionsaufgaben



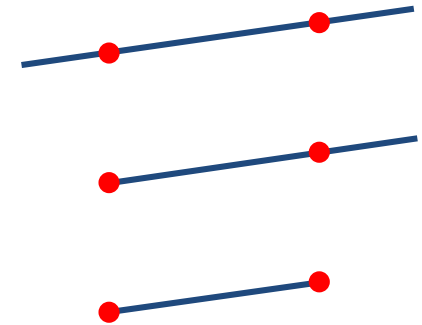
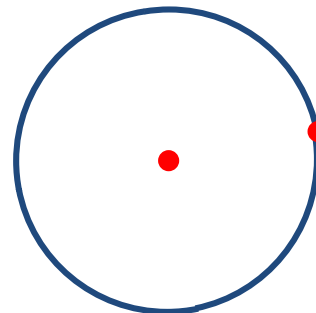
▶ Grundkonstruktionen sind

- ▷ Eindeutig (Zu jeder Anfangs- gibt es genau eine Zielkonfiguration.) und
- ▷ in einem Schritt durchführbar (mit dem zugelassenen Zeichengerät)

▶ Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal

Zu zwei verschiedenen gegebenen Punkten

- ▷ die Verbindungsgerade zeichnen,
- ▷ eine Halbgerade zeichnen, die in einem der Punkte beginnt und durch den anderen verläuft,
- ▷ eine Strecke zeichnen, die in einem der Punkte beginnt und im anderen endet,
- ▷ einen Kreis zeichnen dessen Mittelpunkt einer der Punkte ist und der durch den anderen Punkt verläuft.



Aufgabe: Von einer Ausgangs- zu einer Zielkonfiguration kommen.

▷ *Konfiguration:*

Menge geometrischer Objekte + System von Bedingungen

▷ Zu einer Anfangskonfiguration kann es *keine, genau eine* (eindeutig lösbar) oder *mehrere* Zielkonfigurationen gibt.

Finden der Lösung

▷ Planfigur, heuristische Strategien

Darstellung

▷ Konstruktionsbeschreibung

▷ Konstruktion

Richtigkeit

▷ Zeigen, dass jeder Konstruktionsschritt durchführbar ist.



► Analyse – Finden der Konstruktion

heuristische
Phase

- ▷ Planfigur
- ▷ Welche Teile sind in welcher Reihenfolge konstruierbar?
- ▷ Evtl. Hilfslinien einzeichnen bzw. zunächst Teilkonstruktionen

- ▷ Es entsteht ein Lösungsplan der die Begründung für die Durchführbarkeit der Konstruktion enthält.

algorithmische
Phase

► Ausführung – Darstellen der Konstruktion

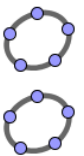
- ▷ Konstruktionszeichnung
- ▷ Konstruktionsbeschreibung

- ▷ Begründung der Richtigkeit

analytische
Phase

► Determination

- ▷ Diskussion der Anzahl der Lösungen (evtl. unter verschiedenen Bedingungen für die Ausgangsgrößen)



▶ Einführen neuer Begriffe

- ▷ Konstruiere ein Viereck, bei dem gegenüberliegende Seiten parallel zueinander sind.
→ Parallelogramm

▶ Entdecken von Sätzen und ihren Beweisen

- ▷ Konstruiere zu einem gegebenen Dreieck einen Kreis durch die drei Eckpunkte.
→ Satz:
In jedem Dreieck schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt.

▶ Thematisieren anschaulich evidenter Sätze

- ▷ Konstruiere ein Dreieck aus den Seitenlängen $a = 4$ cm, $b = 3$ cm und $c = 8$ cm.
→ Dreiecksungleichung



Kapitel 3: Konstruieren

3.3 Konstruktionsbeschreibung



- ▶ **Verbalisieren als übergreifendes Lernziel**
 - ▷ sprachliche Korrektheit und Verwendung der Fachsprache
 - ▷ korrekte Reihenfolge von Argumentationsschritten
 - ▷ sinnvolle Schrittweite von Argumentationsschritten
 - ▷ Vollständigkeit der Angaben

- ▶ **Typische Fehler bei Konstruktionsbeschreibungen**
 - ▷ „Erlebnisbericht“
 - ▶ „Zunächst nehme ich den Zirkel zur Hand.
Dann steche ich im Punkt A ein ...“
 - ▷ Fehlende Konstruktionsparameter
 - ▶ z. B. Kreise ohne Angabe von Mittelpunkt und Radius
 - ▷ Es werden keine Module verwendet!
 - ▶ z. B. werden bei der Inkreiskonstruktion nicht die Winkelhalbierenden angegeben, sondern wie man sie konstruiert



- ▶ **Bisherige Reihenfolge
„Erst Konstruktion, dann die
Beschreibung“ umkehren!**
- ▶ **Die Konstruktionsbeschreibung zur
Grundlage der Konstruktion machen!**
- ▶ **Hier kann der Computer und
insbesondere das Programm
GeoGebra helfen.**



► **Gegeben:**

▷ Dreieck $\triangle ABC$

► **Gesucht:**

▷ Inkreis von $\triangle ABC$

► **Konstruktionsbeschreibung:**

▷ Winkelhalbierende $[B, A, C] =: d$

▷ Winkelhalbierende $[C, B, A] =: e$

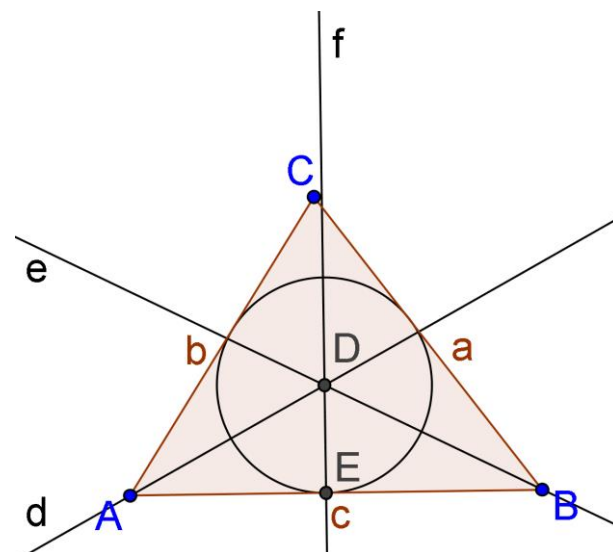
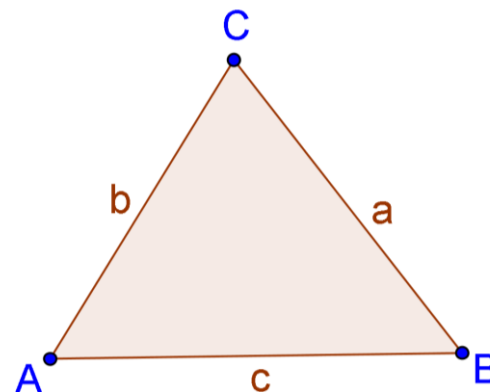
▷ schneide $[d, e] =: D$

▷ Senkrechte $[D, c] =: f$

▷ schneide $[f, c] =: E$

▷ Kreis $[D, \text{Strecke}[D, E]] =: g$

▷ Der Kreis g ist der gesuchte Inkreis.



► **Gegeben:**

▷ Dreieck $\triangle ABC$

► **Gesucht:**

▷ Inkreis von $\triangle ABC$

► **Konstruktionsbeschreibung:**

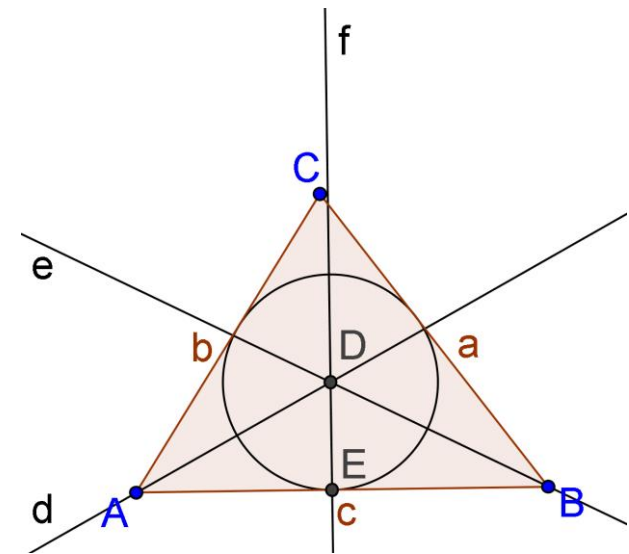
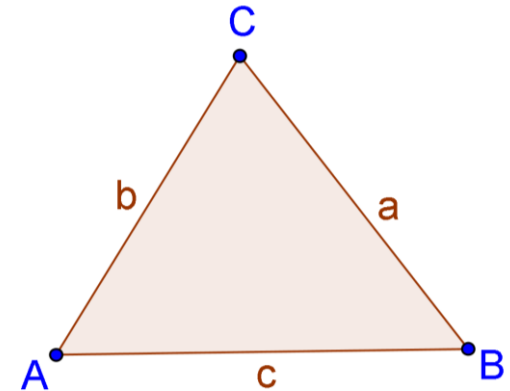
(1) D ist der Schnittpunkt

- der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ mit
- der Winkelhalbierenden von $\angle CBA$.

(2) E ist der Schnittpunkt

- des von D auf c gefällten Lotes f mit
- der Dreiecksseite c .

(3) Der Inkreis $k(D, [DE])$ ist der Kreis um D mit der Strecke $[DE]$ als Radius.



Kapitel 3: Konstruieren

3.4 Konstruieren mit einem dynamischen Geometrie-System (DGS)

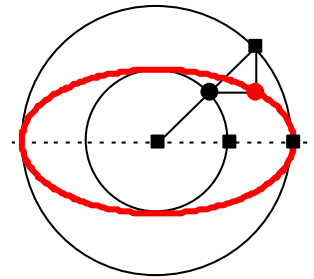


▶ Zugmodus

- ▷ Erstellte Konstruktionen können variiert werden.
- ▷ Jede DGS-Konfiguration umfasst eine ganze Klasse von Figuren die so konstruiert werden können. („zugfest“)

▶ Ortslinienfunktion

- ▷ Bei der Variation von Konstruktionen können Ortslinien von Punkten erstellt werden.



▶ Makros

- ▷ Makros erlauben ein modulares Konstruieren, also das Zurückgreifen auf bereits erstellte Konstruktionen

▶ Außerdem

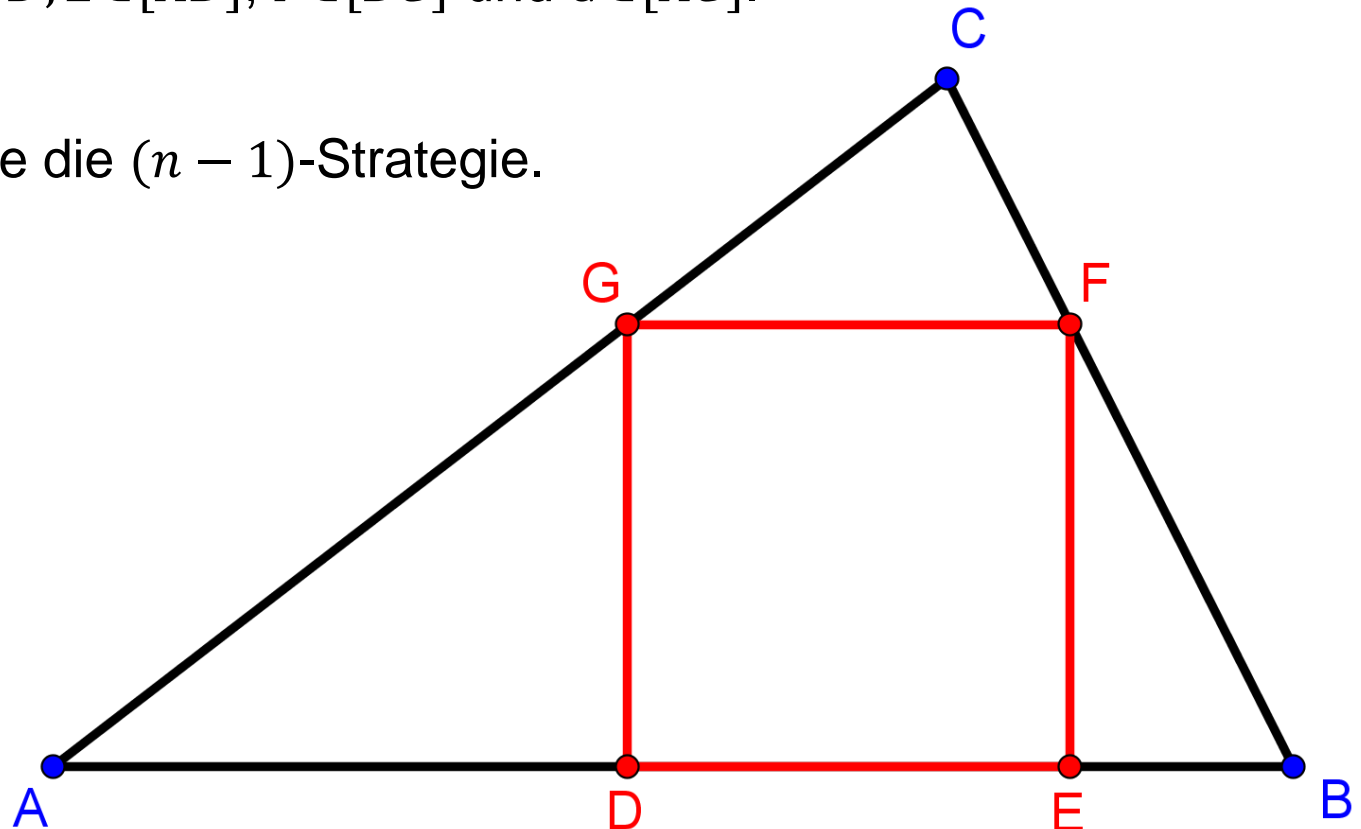
- ▷ Konstruktionen können schneller, sauberer und präziser erstellt, leichter korrigiert und Messungen genauer durchgeführt werden als mit Papier und Bleistift.

► Aufgabe

- Konstruieren Sie zum spitzwinkligen Dreieck ABC ein Quadrat $DEFG$ mit $D, E \in [AB]$, $F \in [BC]$ und $G \in [AC]$.

► Hinweis

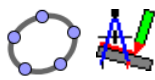
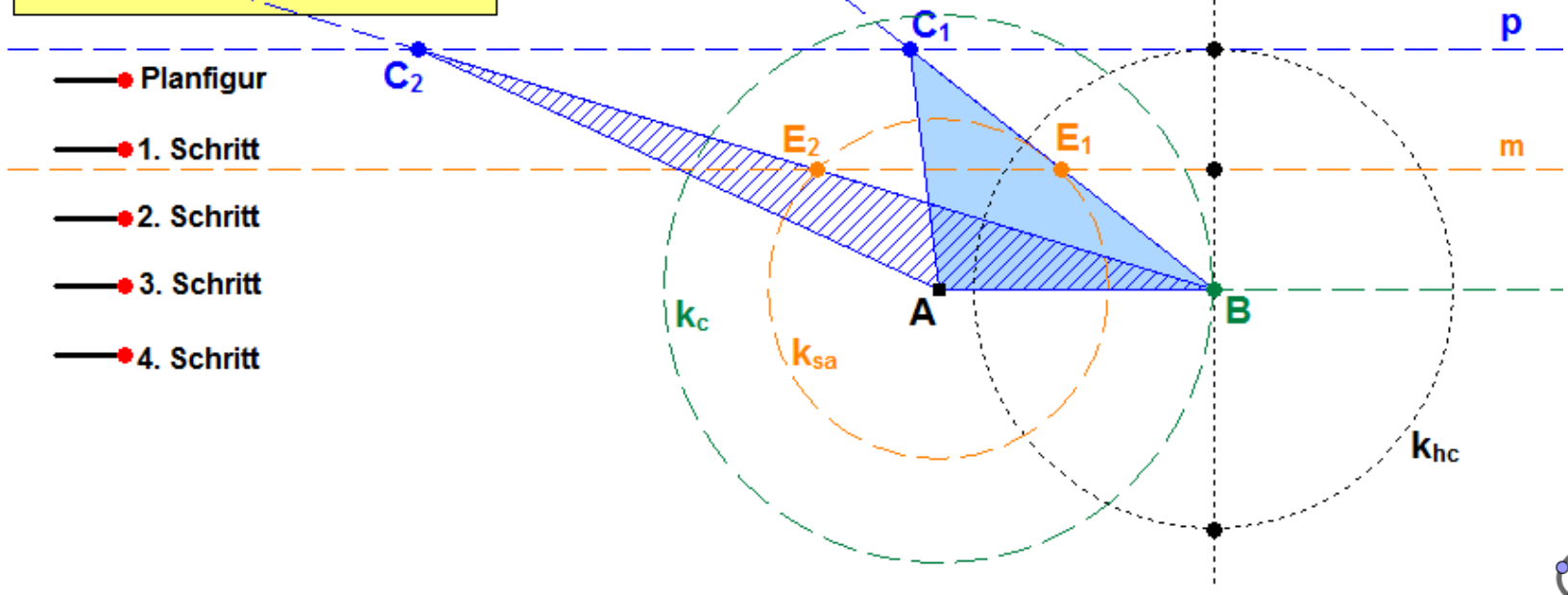
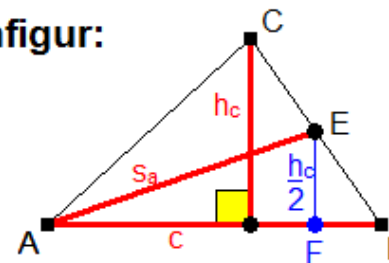
- Nutzen Sie die $(n - 1)$ -Strategie.



**Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus folgenden Längen:
Seite c , Höhe h_c und Seitenhalbierende s_a**

Länge_c=4
 Länge_hc=3,5
 Länge_sa=2,5

Planfigur:



► Konstruktionsbeschreibung

1. A und B sind die Endpunkte der Strecke $[AB]$ mit $|AB| = c$.
2. E ist Schnittpunkt
 - a) der Parallelen zu AB im Abstand $\frac{h_c}{2}$ mit (2 Möglichkeiten)
 - b) dem Kreis $k(A, s_a)$. (2 Möglichkeiten)
3. C ist Schnittpunkt
 - a) der Parallelen zu AB im Abstand h_c mit
 - b) der Halbgeraden $[BE$.

