

# Didaktik der Geometrie

## Didaktik der Geometrie

- 1 Ziele und Inhalte
- 2 Begriffsbildung**
- 3 Konstruieren
- 4 Argumentieren und Beweisen
- 5 Problemlösen
- 6 Entdeckendes Lernen

Didaktik der Geometrie

# Kapitel 2: Begriffsbildung

## **Kapitel 2: Begriffsbildung**

- 2.1 Was macht einen Begriff aus?
- 2.2 Wie lernt man einen Begriff?
- 2.3 Unterrichtsphasen beim Erarbeiten zentraler Begriffe
- 2.4 Klassifizierung von Begriffen
- 2.5 Maßbegriffe Flächen- und Rauminhalt
- 2.6 Objektbegriffe Dreieck und Viereck
- 2.7 Abbildungsbegriffe: Kongruenzabbildungen
- 2.8 Winkelbegriff

## Kapitel 2: Begriffsbildung

# 2.1 Was macht einen Begriff aus?

## ► **Begriffe**

- ▷ sind die Bausteine des Wissens,
- ▷ charakterisieren eine ganze Klasse von Objekten,
- ▷ werden gewonnen durch
  - ▶ Konstruktion (genetische Definition),
  - ▶ Abstraktion (Konventionaldefinition) oder
  - ▶ Spezifikation aus einem Oberbegriff (Realdefinition),
- ▷ verdichten Informationen,
- ▷ organisieren das Verhalten,
- ▷ sind die Grundlage der sprachlichen Kommunikation,
- ▷ beeinflussen die Leistungen des Gedächtnisses und das Problemlösen.

- ▶ **Leitbegriff eines Themenstrangs**
  - ▶ z. B. Figur, Abbildung, ...
  
- ▶ **Schlüsselbegriff einer Unterrichtssequenz**
  - ▶ z. B. Symmetrie, kongruent, ähnlich, ...
  
- ▶ **Zentraler Begriff einer Unterrichtseinheit**
  - ▶ z. B. Kreis, Tangente, ...
  
- ▶ **Arbeitsbegriff**
  - ▶ Notwendig um über Sachverhalte sprechen zu können.
  - ▶ Arbeitsbegriffe werden durch den Gebrauch vertraut.

## ▶ **Quelle von Problemstellungen**

- ▶ Umkreis → Welche Polygone besitzen einen Umkreis?

## ▶ **Mittel zur Präzisierung von Problemstellungen**

- ▶ „Wann sind Figuren ähnlich?“ → Ähnlichkeitsabbildung

## ▶ **Lösungshilfe für Probleme**

- ▶ Dreieckskonstruktion → Ortslinie

## ▶ **Lösungen von Problemen**

- ▶ Schnittfläche beim Schneiden einer Wurst → Ellipse

## ▶ **Mittel zur Sicherung von Problemlösungen**

- ▶ Wo liegen die Orte, von denen man eine Strecke unter einem rechten Winkel sieht? → Thaleskreis

## Kapitel 2: Begriffsbildung

# 2.2 Wie lernt man einen Begriff?

## Lernen als Ersteigen von Stufen

Reflexion und Analyse bereits erworbenen Wissens führt zu Wissen höherer Qualität.

→ Höhere Stufe (u. U. mehrere Stufen nacheinander)

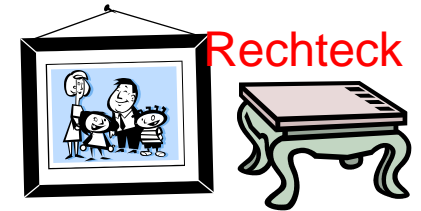
## Lernen durch Erweiterung

Neue Objekte beseitigen Grenzen, auf die man beim operieren mit den bisherigen Objekten stößt.

→ Vertrautes wird nun in neuem Licht gesehen.

## ▶ Intuitives Begriffsverständnis

- ▶ Der Begriff als Phänomen.
- ▶ Beispiele kennen.



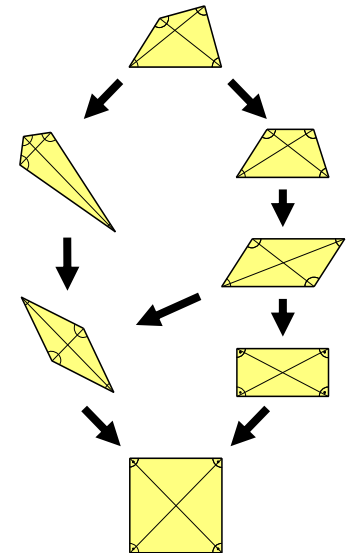
## ▶ Inhaltliches Begriffsverständnis

- ▶ Der Begriff als Träger von Eigenschaften
- ▶ Eigenschaften kennen.



## ▶ Integriertes Begriffsverständnis

- ▶ Der Begriff als Teil eines Begriffsnetzes
- ▶ Beziehungen von Eigenschaften untereinander und Beziehungen zu anderen Begriffen kennen.



## ▶ Formales Begriffsverständnis

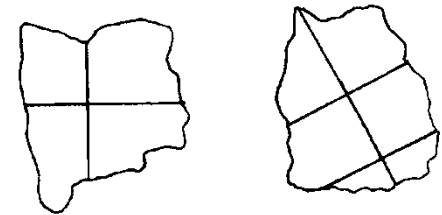
- ▶ Einbettung des Begriffs in einen axiomatischen Aufbau der Geometrie.

- ▶ **Aufbau angemessener Vorstellungen durch**
  - ▷ Handlungen an konkreten Objekten
  - ▷ Wahrnehmungen an Gegenständen und Bildern
  - ▷ Beschreibungen von geometrischen Objekten
  
- ▶ **Erwerb von Kenntnissen**
  - ▷ Kenntnis charakteristischer Eigenschaften.
  
- ▶ **Aneignung von Fähigkeiten**
  - ▷ Konstruieren von Figuren
  - ▷ Berechnen von Längen, Flächen- & Rauminhalten
  - ▷ Fähigkeit zum Problemlösen

- ▶ **Lernende haben einen Begriff verstanden, wenn sie**
  - ▷ Bezeichnung des Begriffs kennen,
  - ▷ Beispiele angeben & jeweils begründen können, warum es sich um ein Beispiel handelt,
  - ▷ begründen können, weshalb etwas nicht unter den Begriff fällt,
  - ▷ charakteristische Eigenschaften des Begriffs kennen,
  - ▷ Ober-, Unter- und Nachbarbegriffe kennen,
  - ▷ mit dem Begriff arbeiten können (z. B. beim Konstruieren und beim Problemlösen).

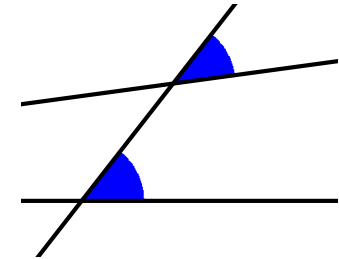
▶ **Erfahrungen zum Begriff sammeln**

- ▶ Handlungen (enaktive Repräsentation)



▶ **Objekte darbieten**

- ▶ Beispiele für Begriffe (ikonische Repräsentation)

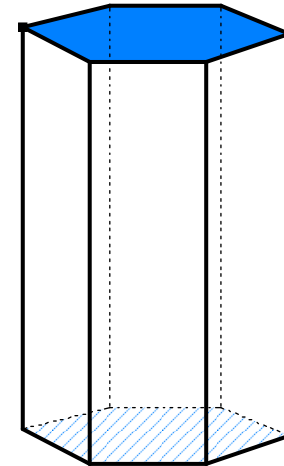


▶ **Merkmale entdecken**

- ▶ Prinzip der Variation
- ▶ Prinzip des Kontrasts
- ▶ Sprache (benennen, beschreiben)

## ▶ Definition erarbeiten

- ▶ Genetische Definition
- ▶ Charakterisierende Definition
  - ▷ Oberbegriff angeben
  - ▷ Definierende Eigenschaft
    - ↔ notwendige und hinreichende Bedingung für den Begriff



## ▶ Kritisch Reflektieren

- ▶ Definition durch möglichst „schwache“ Forderung
- ▶ Bezeichnung
  - ▷ Herkunft
  - ▷ evtl. Abgrenzung gegen Umgangssprache

Ein Körper heißt gerades Prisma, wenn er von zwei zueinander kongruenten & parallelen n-Ecken und n Rechtecken begrenzt ist.



## Kapitel 2: Begriffsbildung

# 2.3 Unterrichtsphasen beim Erarbeiten zentraler Begriffe

## ▶ **Einstieg**

- ▷ In einem geeigneten Problemkontext können ersten Vorstellungen vom Begriff entwickelt werden.

## ▶ **Erarbeitung**

- ▷ Umfang und Inhalt des Begriffs herausarbeiten.

## ▶ **Sicherung**

- ▷ Beispiele und Gegenbeispiele helfen den Begriff gegen andere Begriffe abzugrenzen und die Existenzfrage zu klären.

## ▶ **Vertiefung**

- ▷ Querverbindungen zu anderen Begriffen herstellen und Spezialfälle (insbesondere Grenzfälle) betrachten.  
(Z. B. auch Variation der definierenden Eigenschaften.)

## ▶ **Einstieg:**

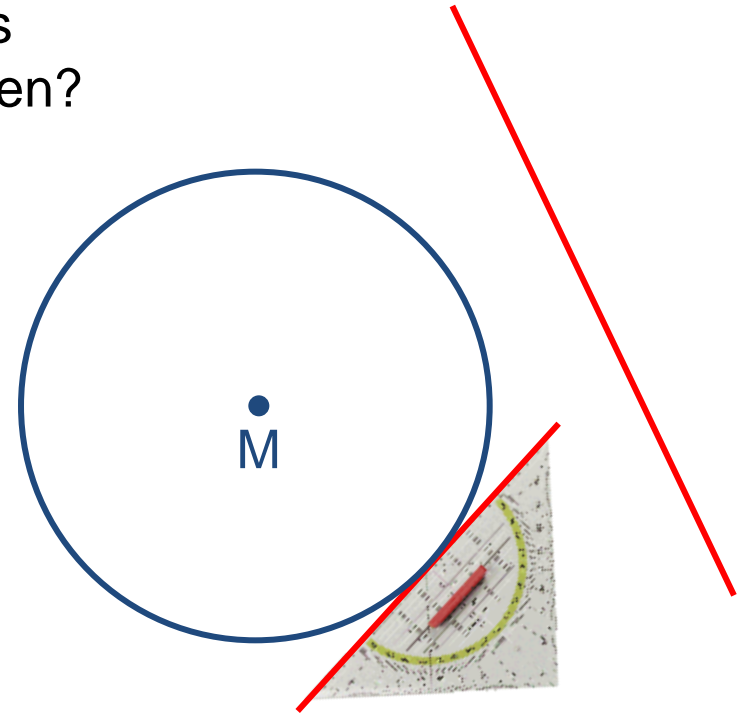
- ▶ Wie viele Punkte können ein Kreis und eine Gerade gemeinsam haben?

## ▶ **Erarbeitung:**

## ▶ **Ergebnisse:**

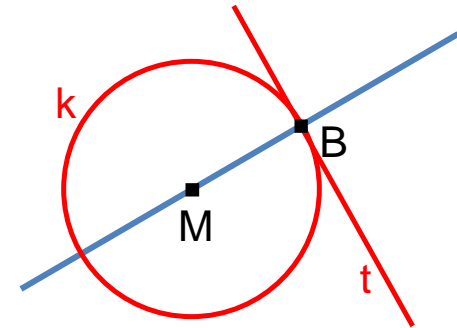
- ▶ Passante → keine gem. Punkte
- ▶ Tangente → ein Berührungspunkt
- ▶ Sekante → 2 Schnittpunkte
- ▶ (Zentrale → Sekante durch M)

## ▶ **Sicherung:** Tangente zeichnen!

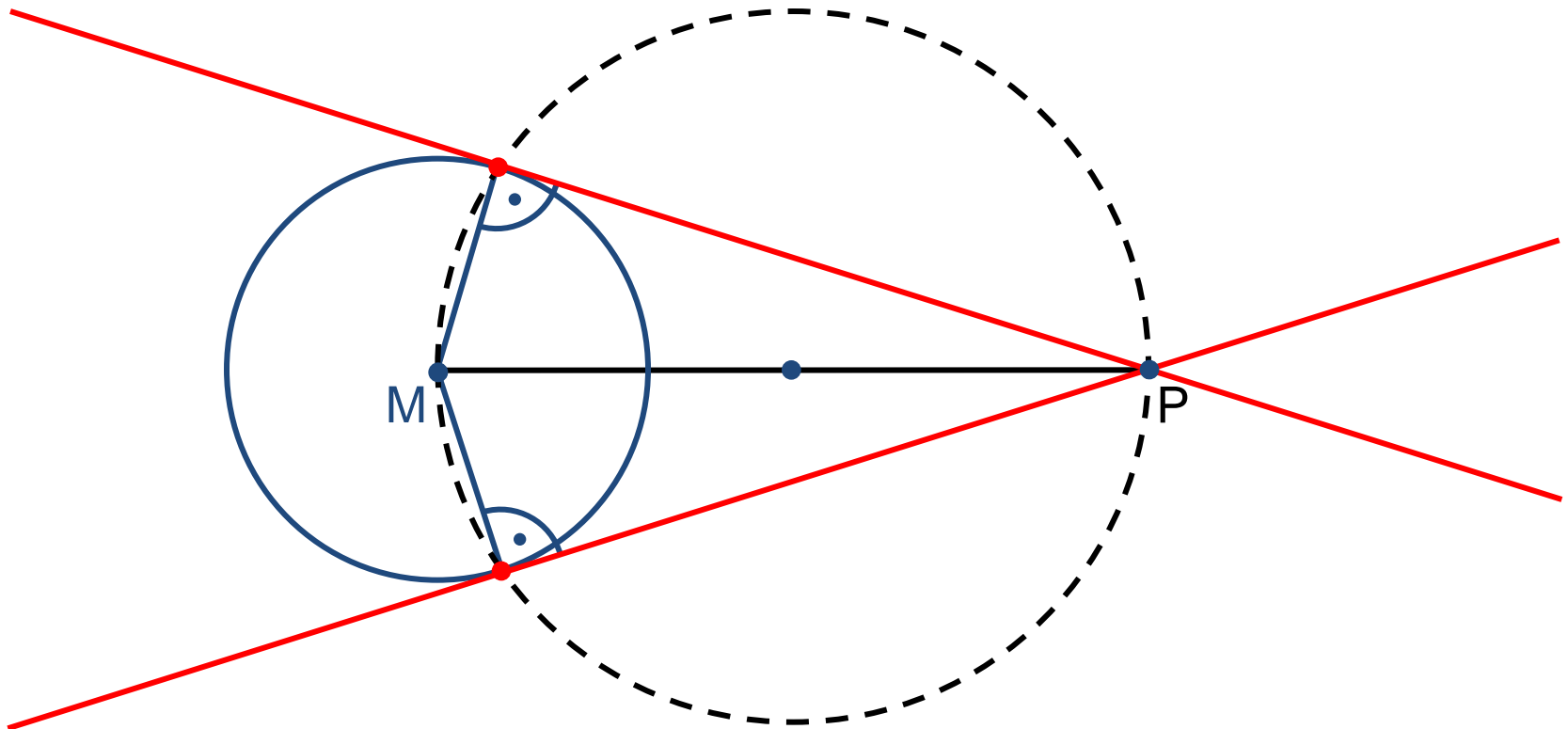


## ► Vertiefung:

- ▷ Besitzt die Figur aus Kreis und Tangente eine Symmetrieachse?
  - Tangente steht senkrecht auf dem Berührungspunktradius.
- ▷ Wie kann man die Tangente konstruieren?



Vertiefung: Wie viele Tangenten an den Kreis verlaufen durch P?  
Skizziere Sie!  
Wie kann man die Tangenten konstruieren?



## Kapitel 2: Begriffsbildung

# 2.4 Klassifizierung von Begriffen



## ▶ Inhaltliche Einteilung

- ▷ Figurenbegriffe
- ▷ Abbildungsbegriffe
- ▷ Maßbegriffe

## ▶ Logische Einteilung

- ▷ Objektbegriffe (bzw. Eigenschaftsbegriffe)
- ▷ Relationsbegriffe
- ▷ Funktionsbegriffe

## ▶ Axiomatische Einteilung

- ▷ Grundbegriffe
  - ▶ (Kein Grundbegriff sollte mit Hilfe anderer Grundbegriffe definiert werden können!)
- ▷ definierte Begriffe

## ▶ Strukturelle Einteilung

- ▷ Ein geometrischer Objekt- oder Abbildungsbegriff heißt invariant gegenüber einer Abbildungsgruppe  $G$ , falls jede Abbildung aus  $G$  den Umfang des Begriffs auf sich abbildet.

Im Geometrieunterricht  
werden auch einige  
definierbare Begriffe als  
Grundbegriffe behandelt.

	Figurenbegriffe	Abbildungsbegriffe	Maßbegriffe
Ebene Begriffe	Gerade Strecke Vieleck Kreis parallel kongruent achsensymmetrisch	Geradenspiegelung Drehung (Punkt) Kongruenzabbildung zentrische Streckung	Länge Winkelgröße Flächeninhalt
Räum- liche Begriffe	Ebene  Kugel parallel kongruent ebenensymmetrisch	Ebenenspiegelung Drehung (Achse) Kongruenzabbildung zentrische Streckung	Volumen

## Objektbegriffe

Objekte einer  
Grundmenge  $G$

(z. B. ebene Figuren,  
räumliche Figuren,  
bijektive Abbildungen)

die gemeinsame  
Eigenschaften  
besitzen lassen  
sich zu einer  
Untermenge  
zusammenfassen,  
die den Umfang  
eines Objektbe-  
griffs in  $G$  bildet.

## Relationsbegriffe

beschreiben  
Beziehungen  
zwischen  
geometrischen  
Figuren.

Relation  
in einer  
Figurenmenge

Relation zwischen  
zwei  
Figurenmengen

## Funktionsbegriffe

Die wichtigsten  
Funktionsbegriffe  
in der Geometrie  
sind die  
Maßbegriffe.  
(Länge, Winkelmaß,  
Fläche & Volumen)

Sie sind Funktionen,  
deren  
Definitionsbereich  
eine spezielle  
Figurenmenge und  
deren Zielmenge  
eine Menge von  
Größen ist.

## Relation

## Figurenmenge

ist kongruent zu

Figuren der Ebene oder des Raumes

ist ähnlich zu

Figuren der Ebene oder des Raumes

ist zerlegungsgleich zu

Vielecke oder Körper

ist parallel zu

Geraden der Ebene oder des Raumes;  
Ebenen des Raumes

ist orthogonal zu

Geraden der Ebene oder des Raumes;  
Ebenen des Raumes

ist Wechselwinkel zu

Winkel der Ebene

Relation	Vorbereich	Nachbereich
ist orthogonal zu	Geraden im Raum	Ebenen
ist Tangente an	Geraden	Kreise
hat als Tangente	Kreise	Geraden
ist Mittelsenkrechte von	Geraden	Strecken
hat als Mittelsenkrechte	Strecken	Geraden
ist Umkreis von	Kreise	Dreiecke
hat als Umkreis	Dreiecke	Kreise

**Funktions-  
begriffe**

Funktion	Definitionsmenge	Zielmenge
ist Mittelsenkrechte von	Menge d. Strecken	Menge d. Geraden
ist Umkreis von	Menge d. Dreiecke	Menge d. Kreise
Längenmaßfunktion	Menge d. Strecken	Menge d. Längen
Winkelmaßfunktion	Menge d. Winkel	Menge der Winkelmaße
Flächeninhaltsfunktion	Menge d. Vielecke	Menge der Flächeninhalte
Volumenmaßfunktion	Polyeder	Menge der Volumina

Für diese Maßfunktionen ist in den jeweiligen Mengen eine Addition „+“ und eine Kleinerrelation „<“ definiert. Diese Struktur ist zur Struktur der nichtnegativen reellen Zahlen bzgl. Addition und Kleinerrelation isomorph. → Zahlennamen können zur Bezeichnung der Größen benutzt werden.

## ▶ Begriffserwerb von Figurenbegriffen

- ▷ Figuren als Punktmenngen
- ▷ Repräsentation geometrischer Figurenbegriffe
- ▷ Spezifikation aus einem Oberbegriff
- ▷ Konstruktiv
- ▷ Intensionale Abstraktion (setzt keinen Oberbegriff voraus)
- ▷ Idealisierung und Kompletierung

## ▶ Begriffserwerb von Abbildungsbegriffen

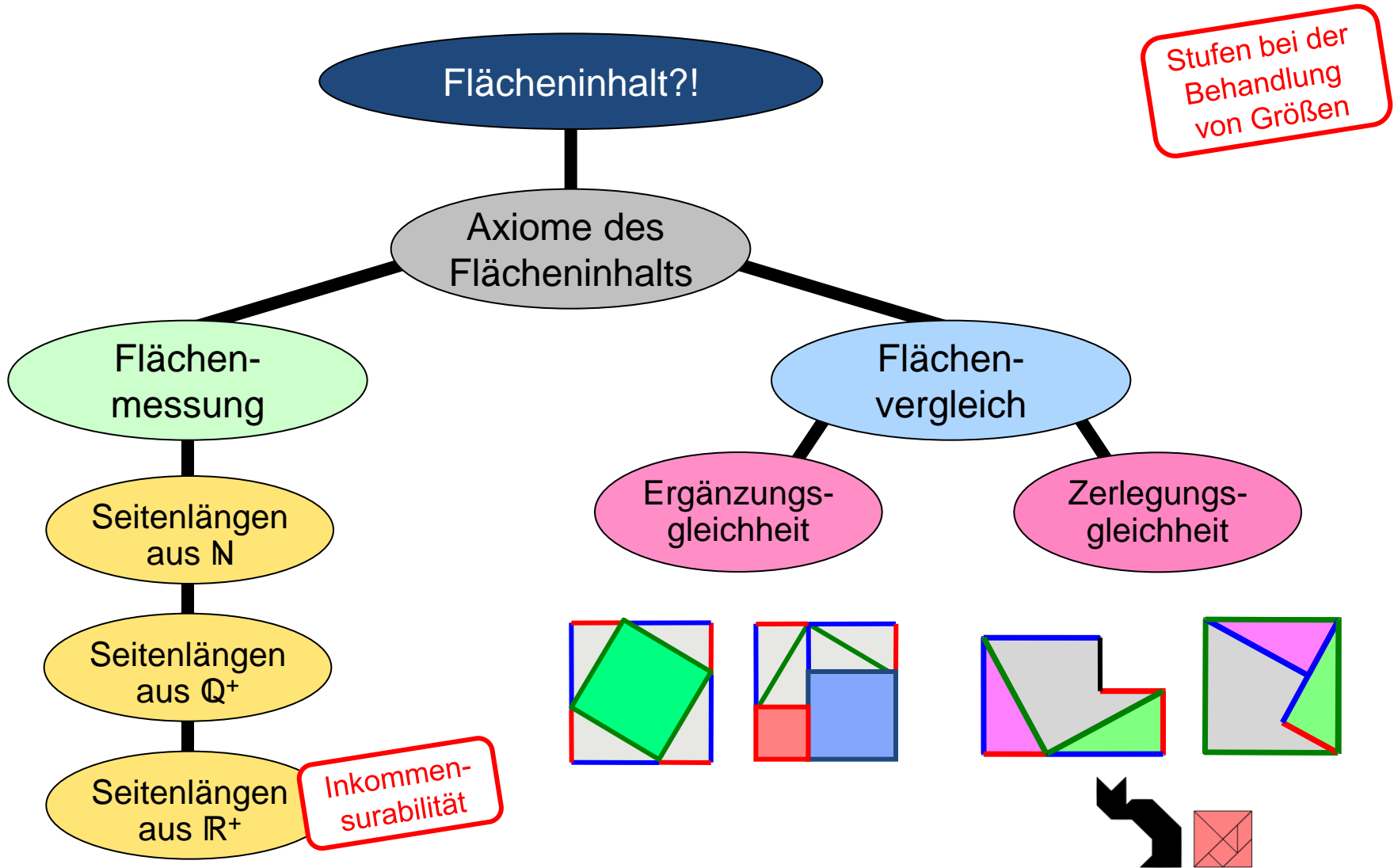
- ▷ Abbildungen als Punkt-Punkt-Zuordnungen der Ebene
- ▷ Repräsentation geometrischer Abbildungen & Abbildungsbegriffe
- ▷ Konstruktiv
- ▷ Verkettung von Abbildungen
- ▷ Spezifikation aus einem Oberbegriff
- ▷ Deduktiv

## ▶ Begriffserwerb von Maßbegriffen

- ▷ Vgl. den Exkurs zum Flächeninhalt

## Kapitel 2: Begriffsbildung

# 2.5 Maßbegriffe Flächen- und Rauminhalt



- ▶ **1. Stufe:** Erfahrungen in Sach- und Spielsituationen sammeln
- ▶ **2. Stufe:** Direktes Vergleichen von Repräsentanten
- ▶ **3. Stufe:** Indirektes Vergleichen mit Hilfe selbst gewählter Maßeinheiten
  - ▶ ein drittes Objekt als Vermittler benutzen
  - ▶ ein Objekt als selbst gewählte Einheit benutzen
- ▶ **4. Stufe:** Indirektes Vergleichen mit Hilfe standardisierter Maßeinheiten, Messen mit verschiedenen Messgeräten
- ▶ **5. Stufe:** Umrechnen: Verfeinern und Vergröbern der Maßeinheiten
- ▶ **6. Stufe:** Aufbau von Größenvorstellungen
- ▶ **7. Stufe:** Rechnen mit Größen

## ▶ Nichtnegativität

- ▶ Die Maßzahl  $A$  des Flächeninhalts ist nichtnegativ.

$$A \geq 0$$

## ▶ Normierung

- ▶ Ein Quadrat der Seitenlänge 1 LE hat den Flächeninhalt

$$A = 1 \text{ LE}^2.$$

## ▶ Additivität

- ▶ Der Flächeninhalt einer Figur ist gleich der Summe der Flächeninhalte der Teilfiguren, in die die Fläche zerlegt werden kann.

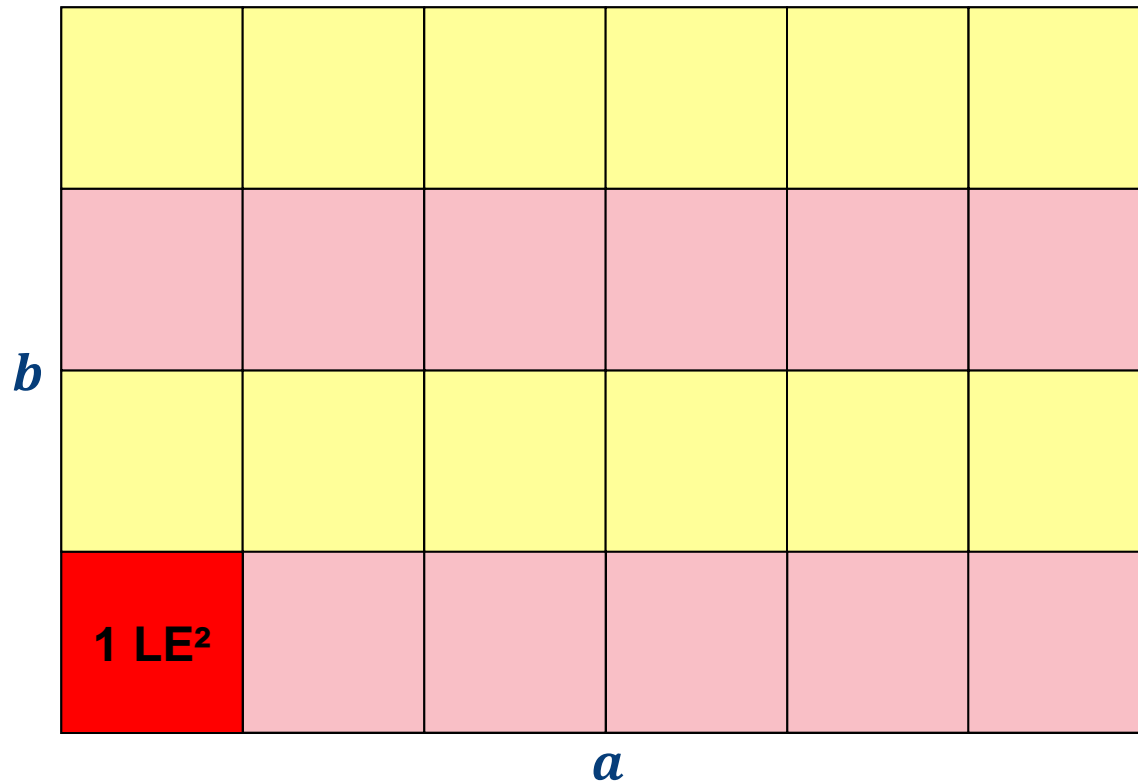
## ▶ Kongruenzaxiom

- ▶ Kongruente Figuren haben denselben Flächeninhalt.

Vgl. die Axiome des Wahrscheinlichkeitsmaßes von Kolmogoroff

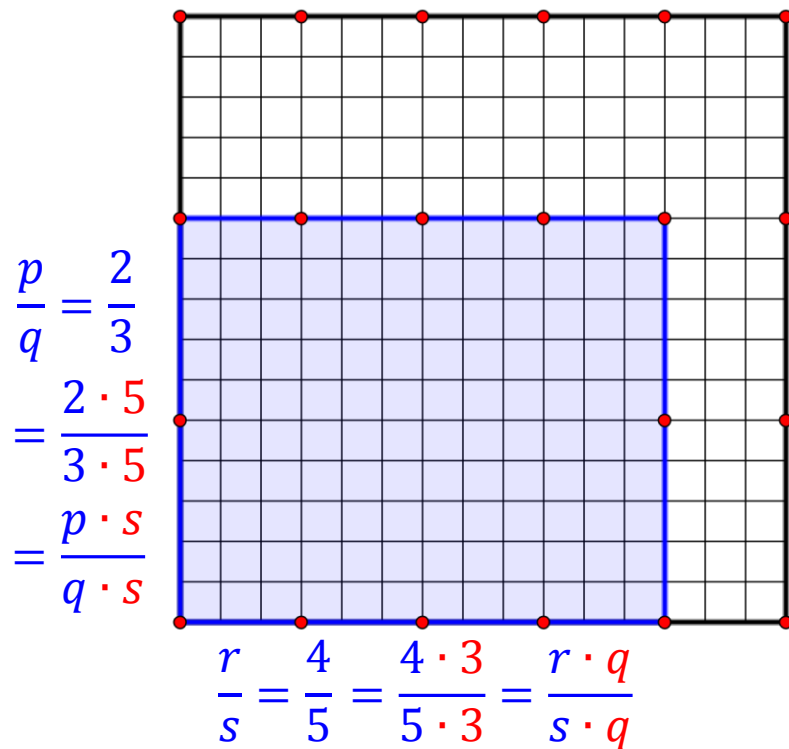
## Flächenmessung

- ▷ Auslegen mit Einheitsquadraten.
- ▷  $b$  Reihen, zu je  $a$  Einheitsquadraten  $\Rightarrow A = a \cdot b$



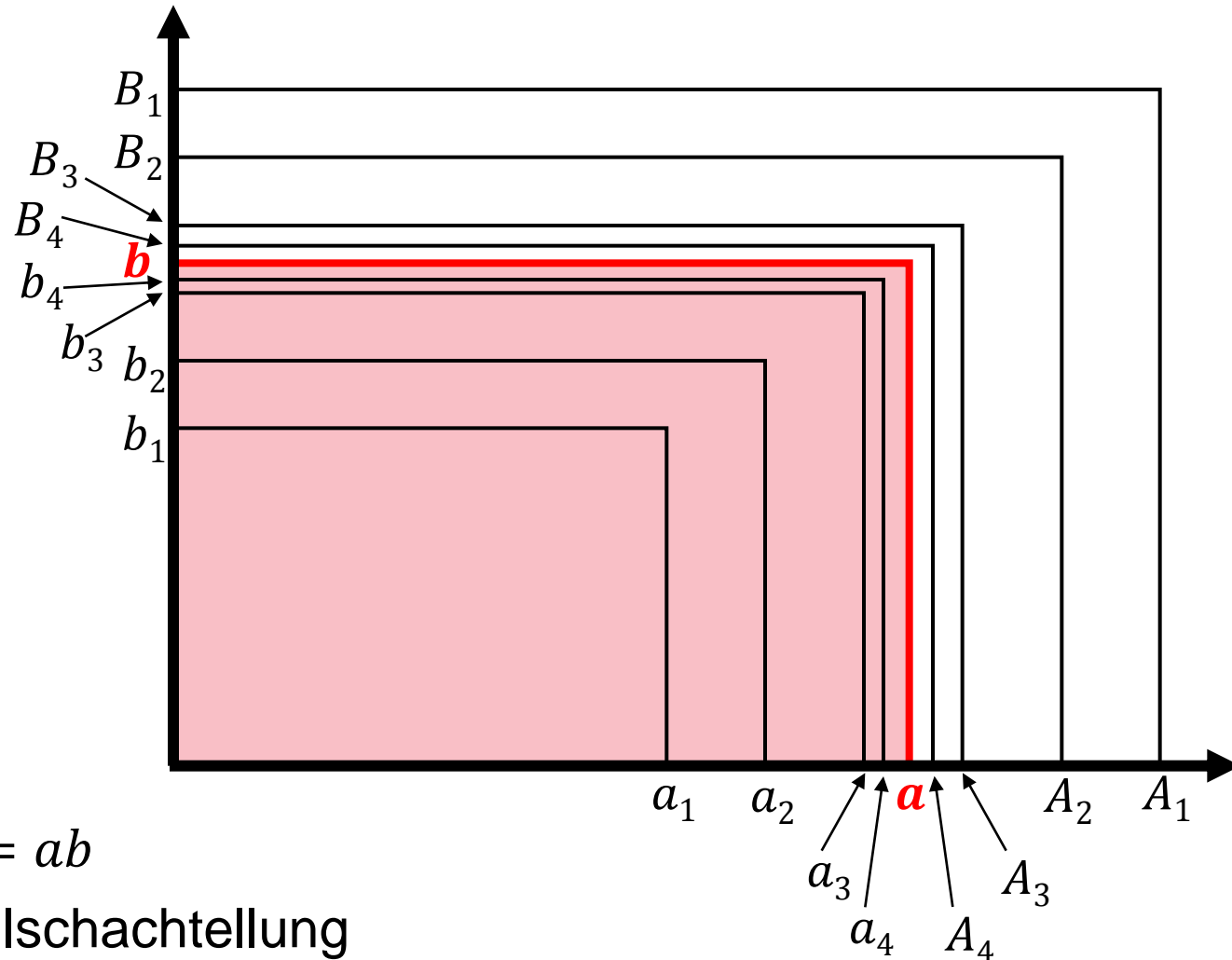
## ► Idee

- ▷ Ein Rechteck mit den Kantenlängen  $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$  lässt sich nicht mit Einheitsquadraten auslegen.
- ▷ Verfeinern der Einteilung beider Kantenlängen führt zu  $\frac{p \cdot s}{q \cdot s}, \frac{r \cdot q}{s \cdot q} \in \mathbb{Q}$ .
- ▷ In das Einheitsquadrat passen folglich  $(q \cdot s) \cdot (q \cdot s) = (q \cdot s)^2$  kleine Teilquadrate. (Im Beispiel:  $(3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = (3 \cdot 5)^2 = 15^2 = 225$ )
- ▷ Ein Teilquadrat besitzt also den Flächeninhalt  $\frac{1}{(q \cdot s)^2} \text{LE}^2 = \frac{1}{225} \text{LE}^2$ .



## ► Flächenmessung

- ▷ Auslegung mit Teilquadraten ergibt  $p \cdot s$  Zeilen mit je  $r \cdot q$  Quadraten.
- ▷ 
$$A = (p \cdot s) \cdot (r \cdot q) \cdot \frac{1}{(q \cdot s)^2} = \frac{(p \cdot s) \cdot (r \cdot q)}{(q \cdot s)^2} = \frac{p \cdot s \cdot r \cdot q}{q \cdot s \cdot q \cdot s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}$$



$$a = \{[a_n; A_n]\}$$

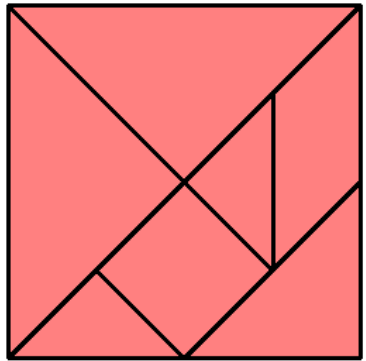
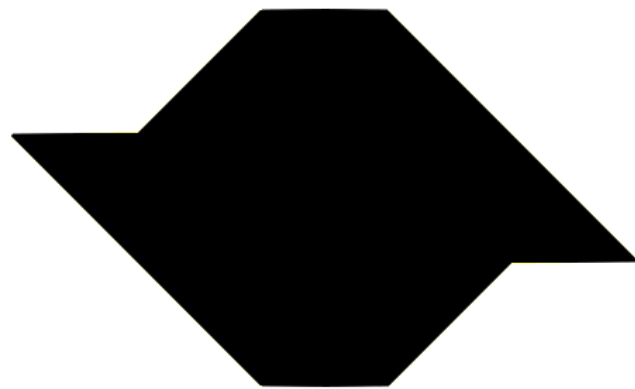
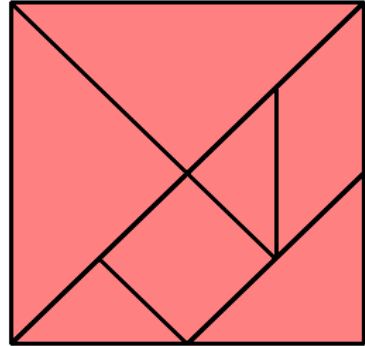
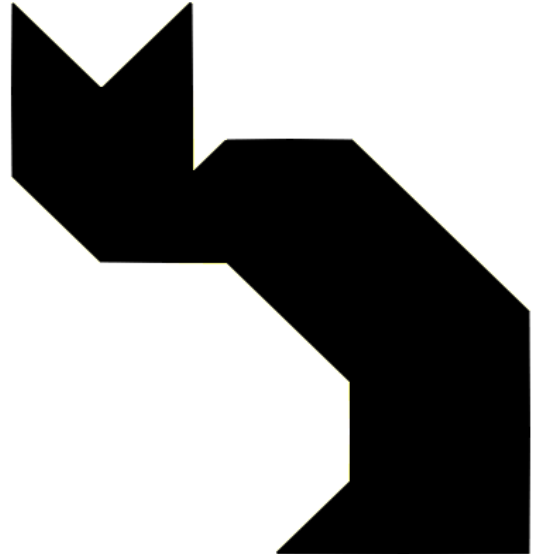
$$b = \{[b_n; B_n]\}$$

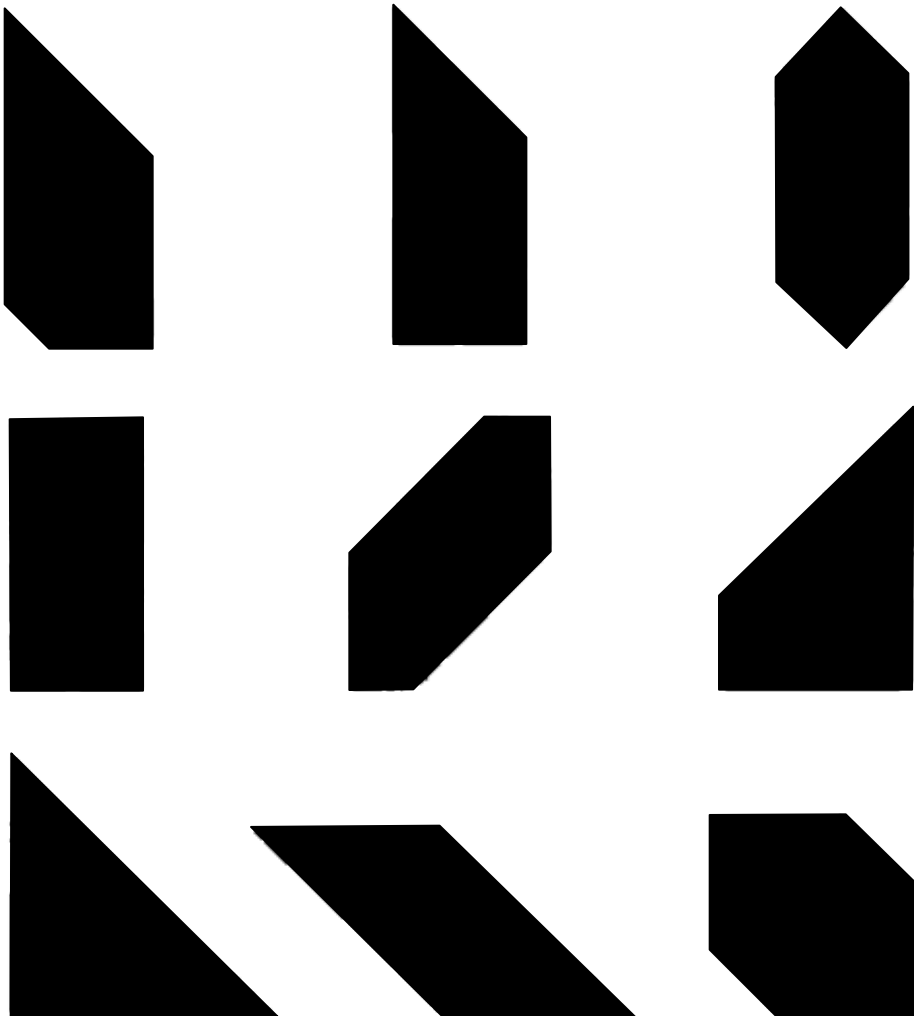
mit

$$A_n, b_n, A_n, B_n \in \mathbb{Q}^+$$

$$\Rightarrow \{[a_n b_n; A_n B_n]\} = ab$$

ist eine Intervallschachtelung  
für den Flächeninhalt



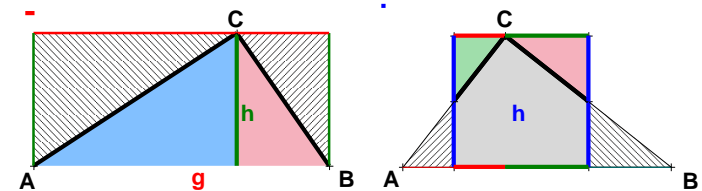


## ▶ Rechteck

- ▶ Flächenmessung, d. h. Auslegen mit Einheitsquadraten (bzw. Intervallschachtelung)

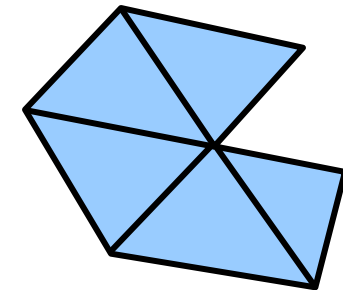
## ▶ Dreieck

- ▶ Flächenvergleich mit dem Rechteck



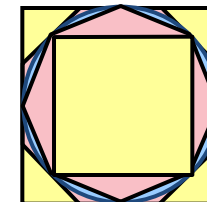
## ▶ Polygon

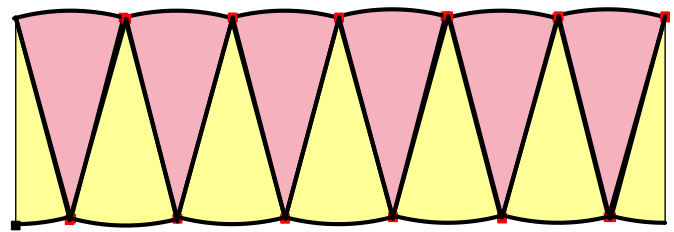
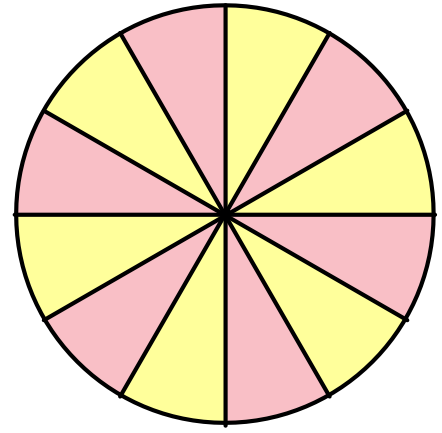
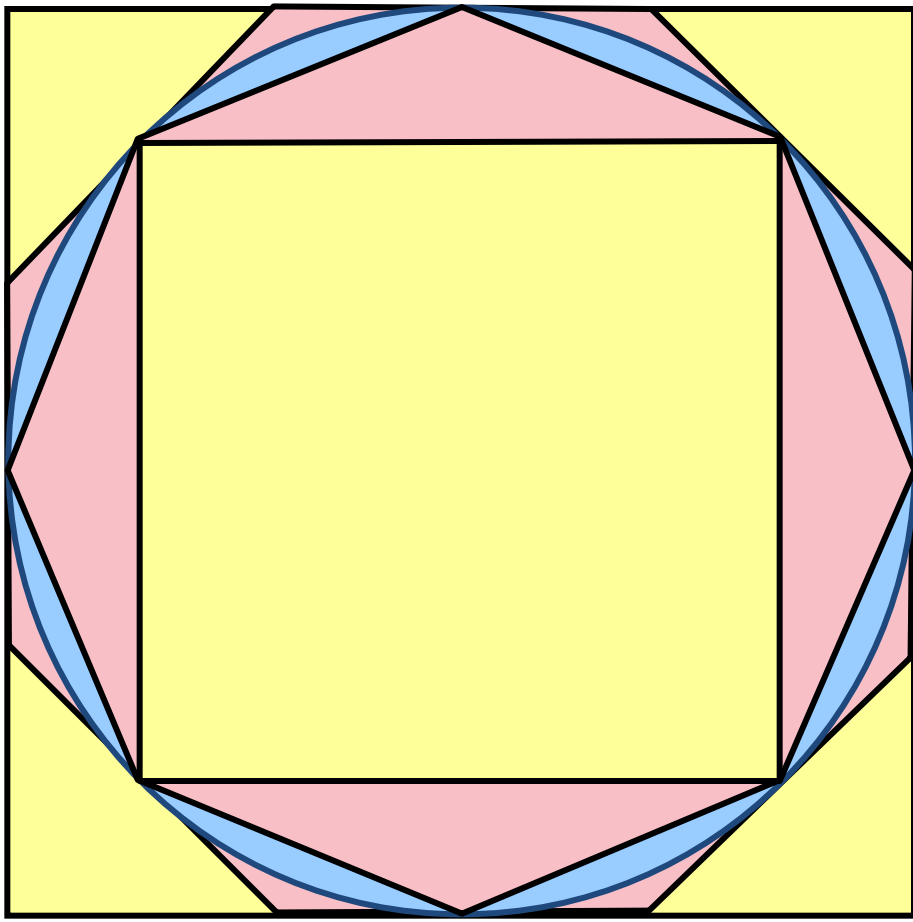
- ▶ Triangulierung (Einteilen in Dreiecke)



## ▶ Kreis

- ▶ Intervallschachtelung





Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt.

Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist.

(Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir das bei deiner Schätzung hilft.)

PISA-Aufgabe

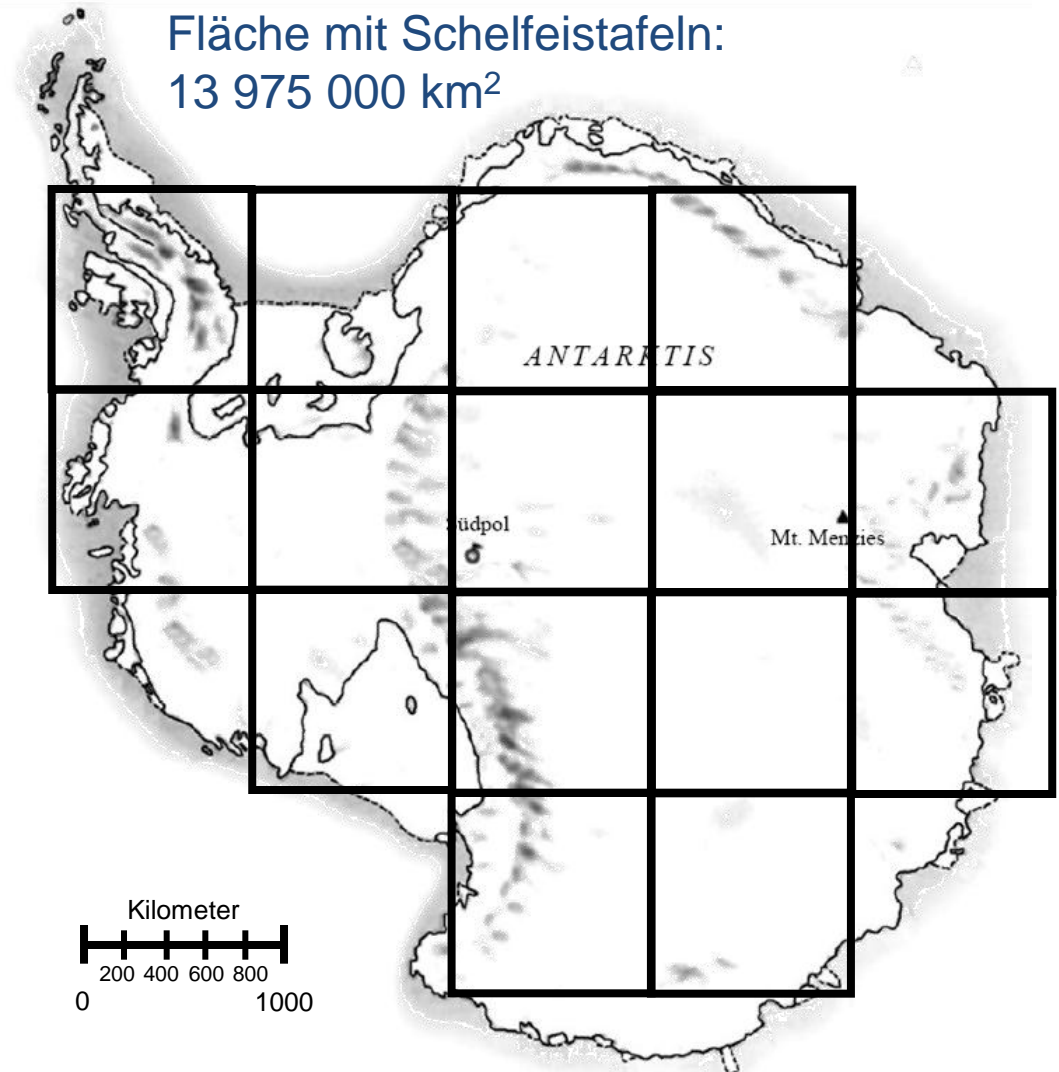


Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt.

Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist.

(Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir das bei deiner Schätzung hilft.)

PISA-Aufgabe

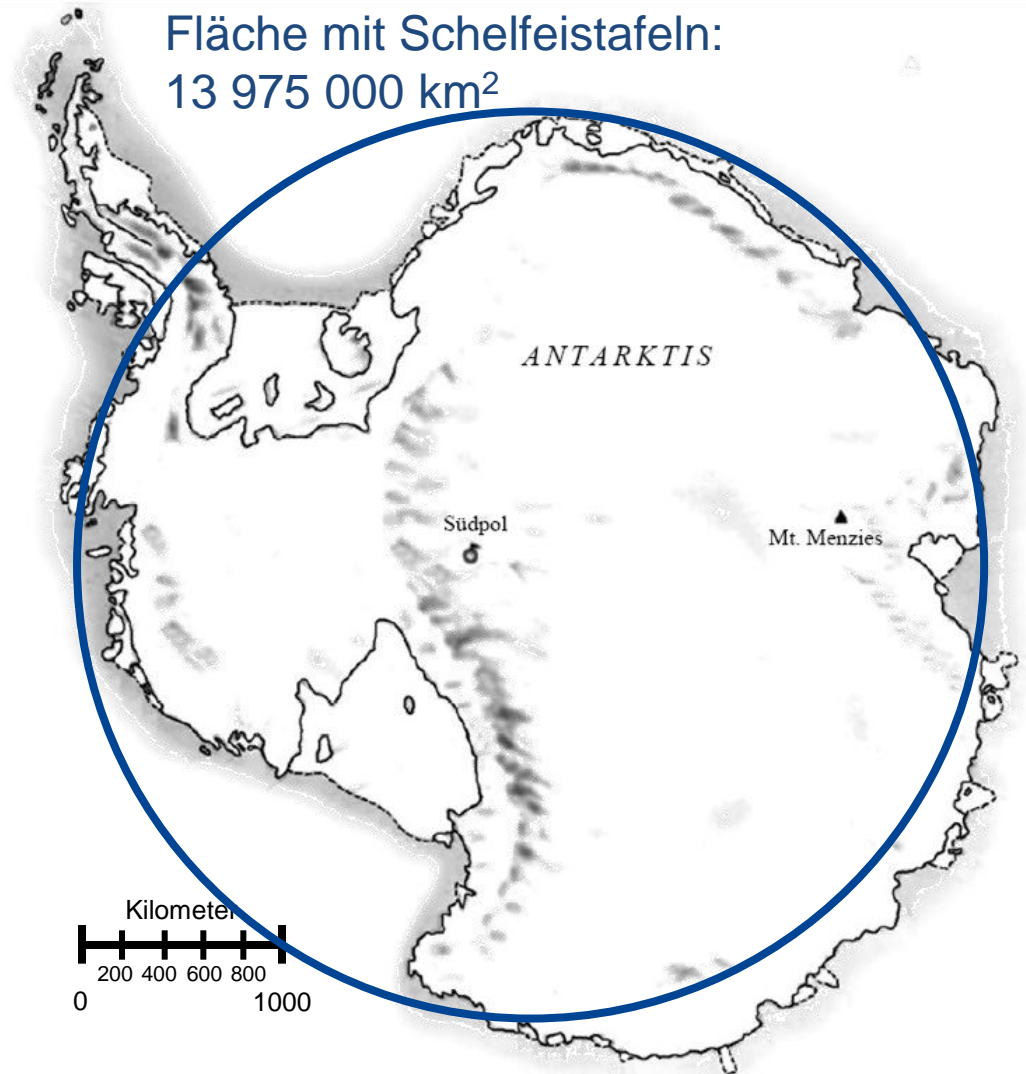


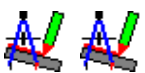
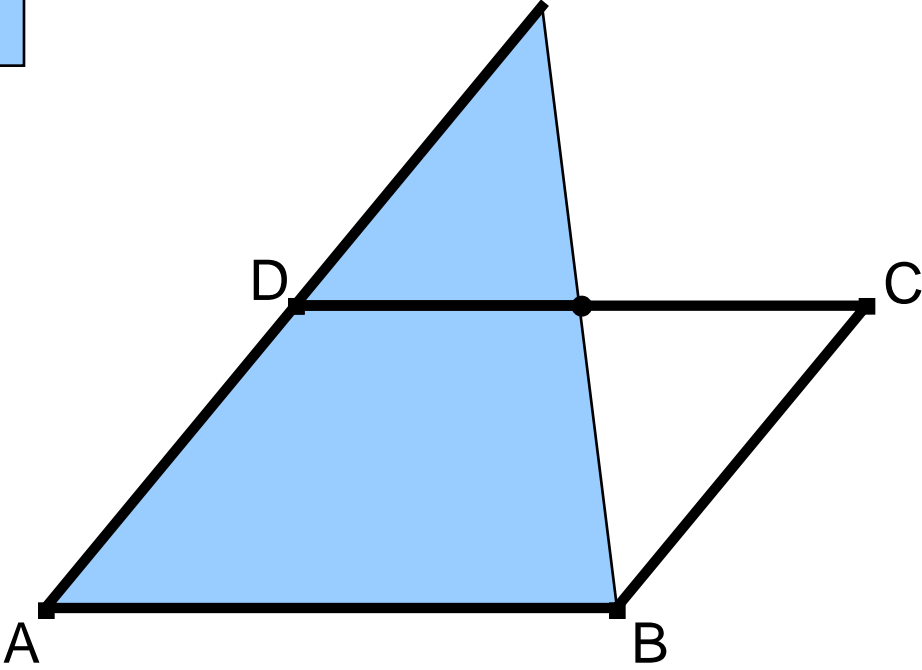
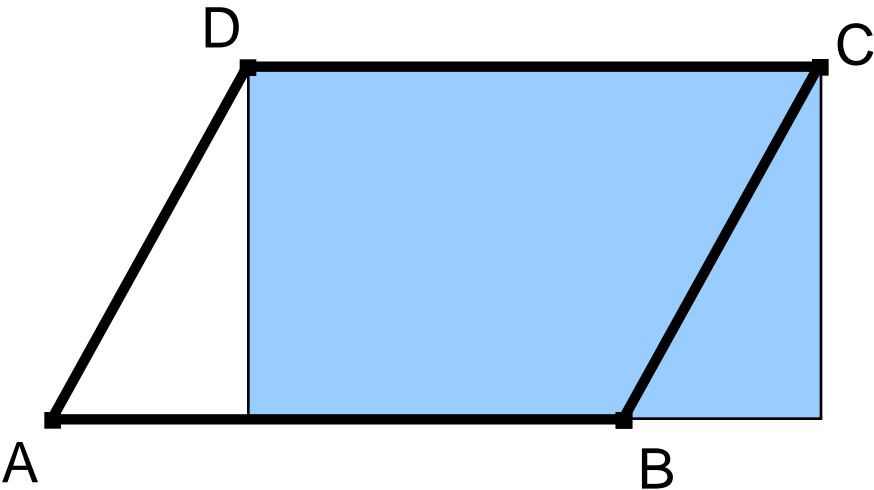
Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt.

Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist.

(Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir das bei deiner Schätzung hilft.)

PISA-Aufgabe

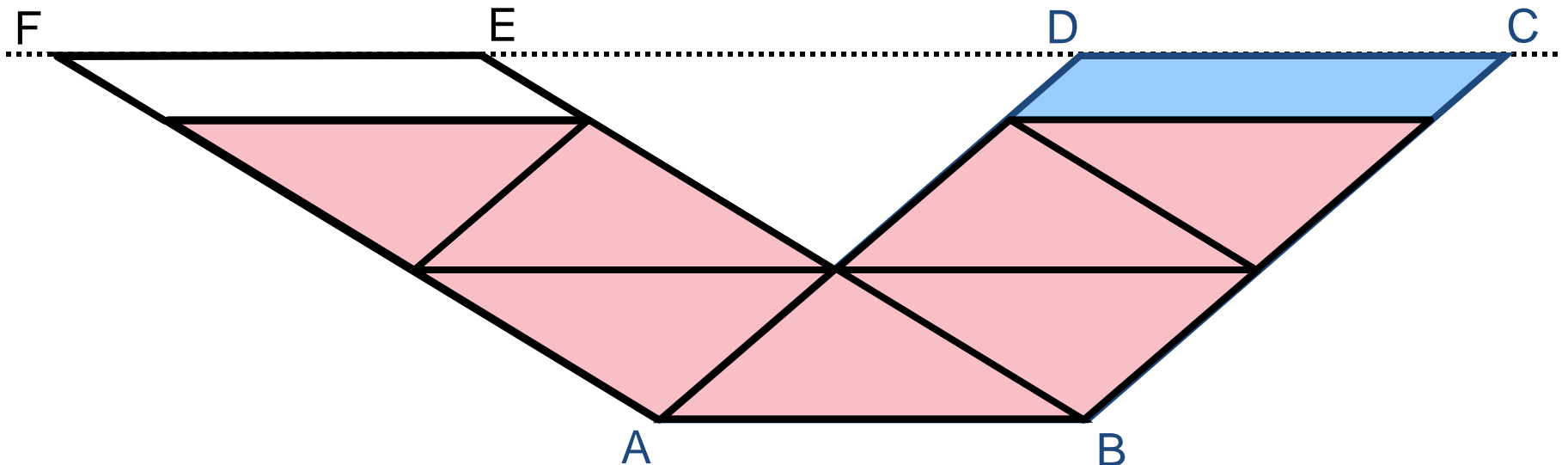
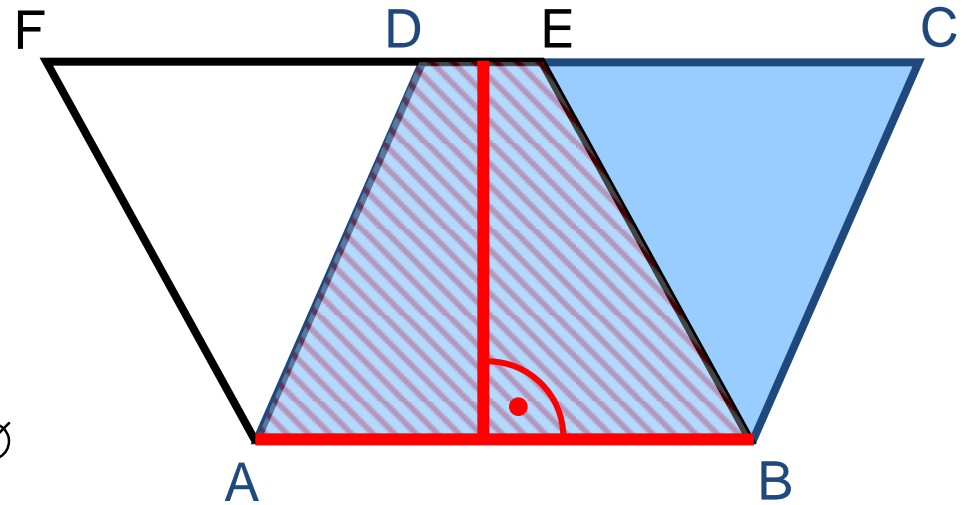


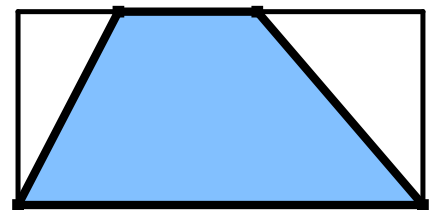
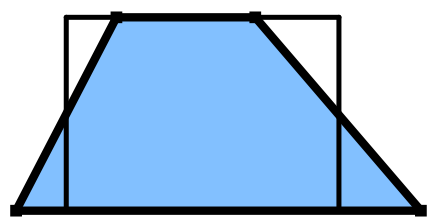
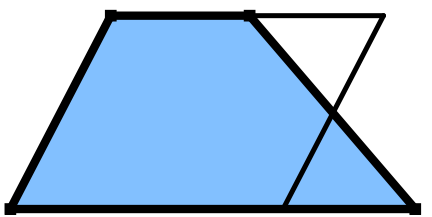
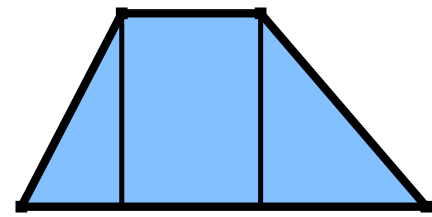
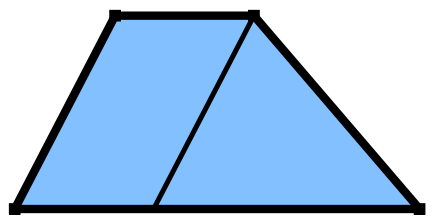
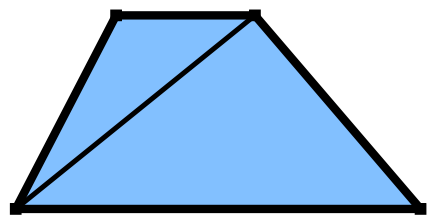
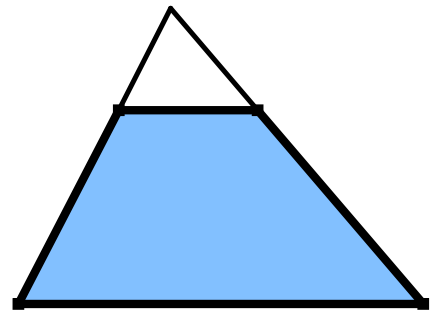
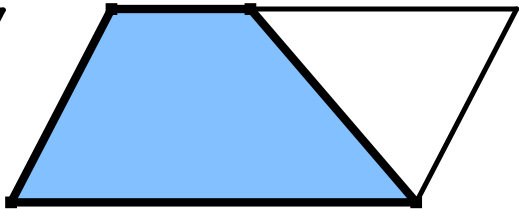
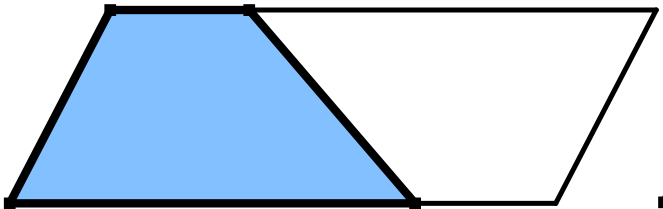


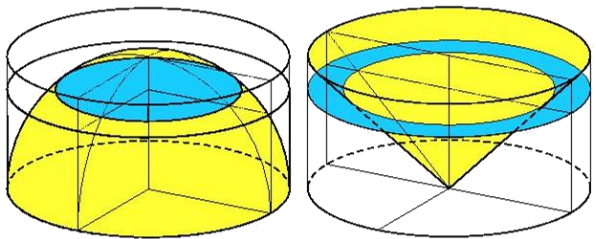
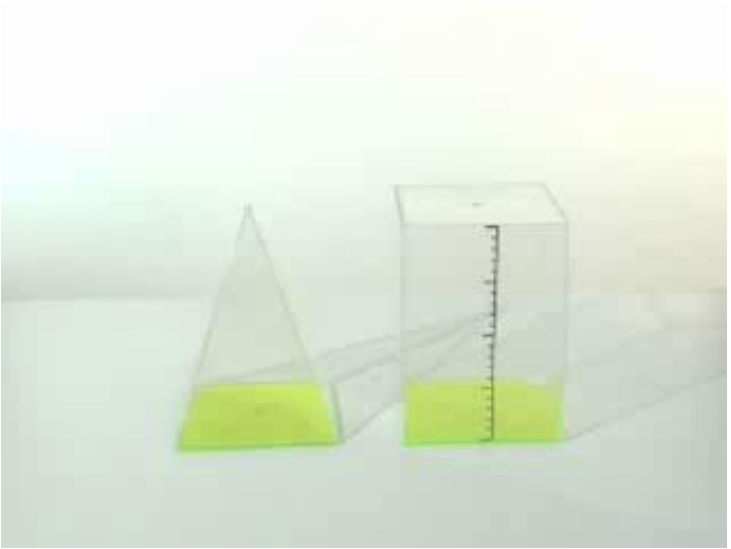
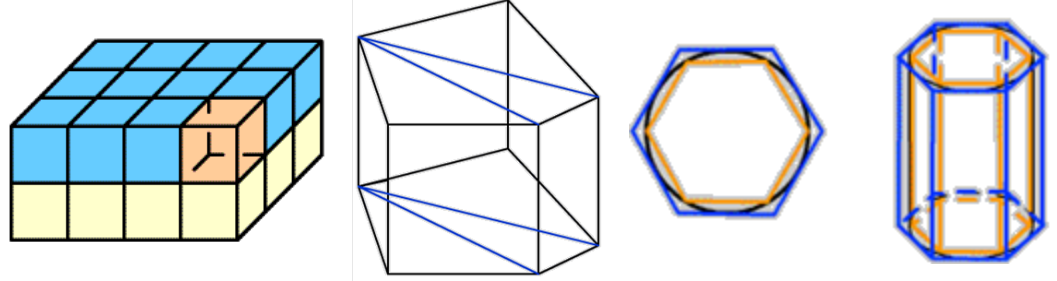
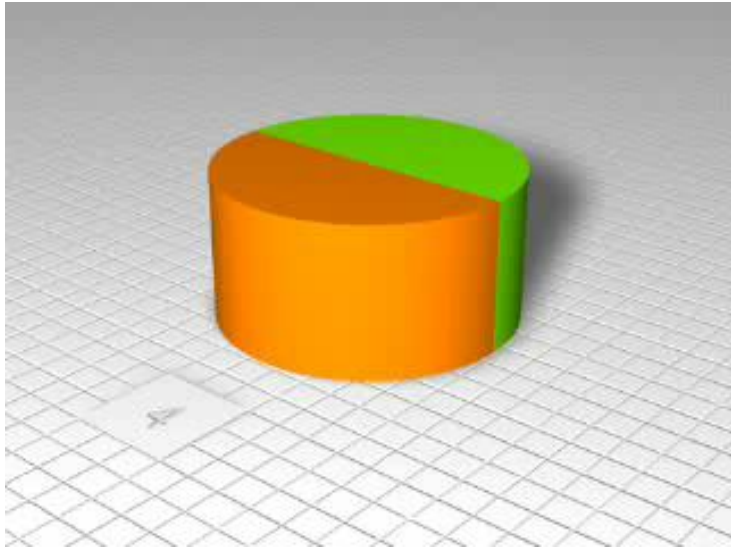
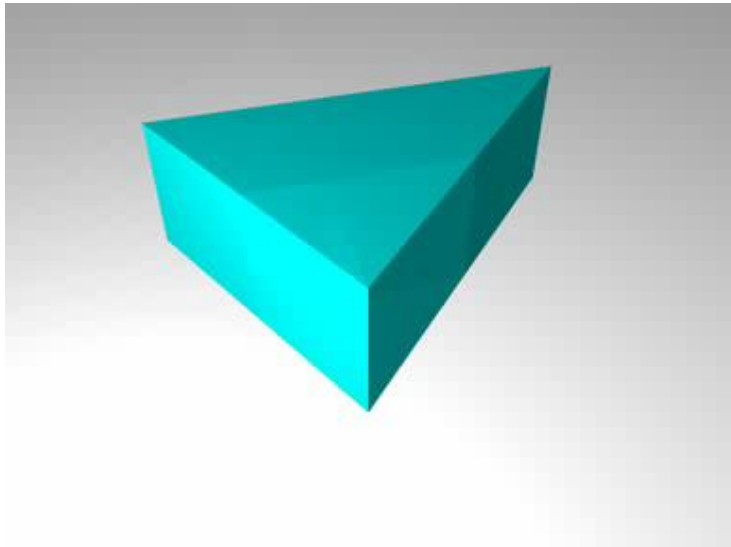
Parallelogrammflächen, die in der Länge einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen sind zerlegungsgleich.

Beweisidee:  $\triangle ADF \sim \triangle BCE$

Voraussetzung:  $[CD] \cap [EF] \neq \emptyset$








Prinzip  
von  
Cavalieri

Satz von  
Dehn

Volumen  
der  
Pyramide

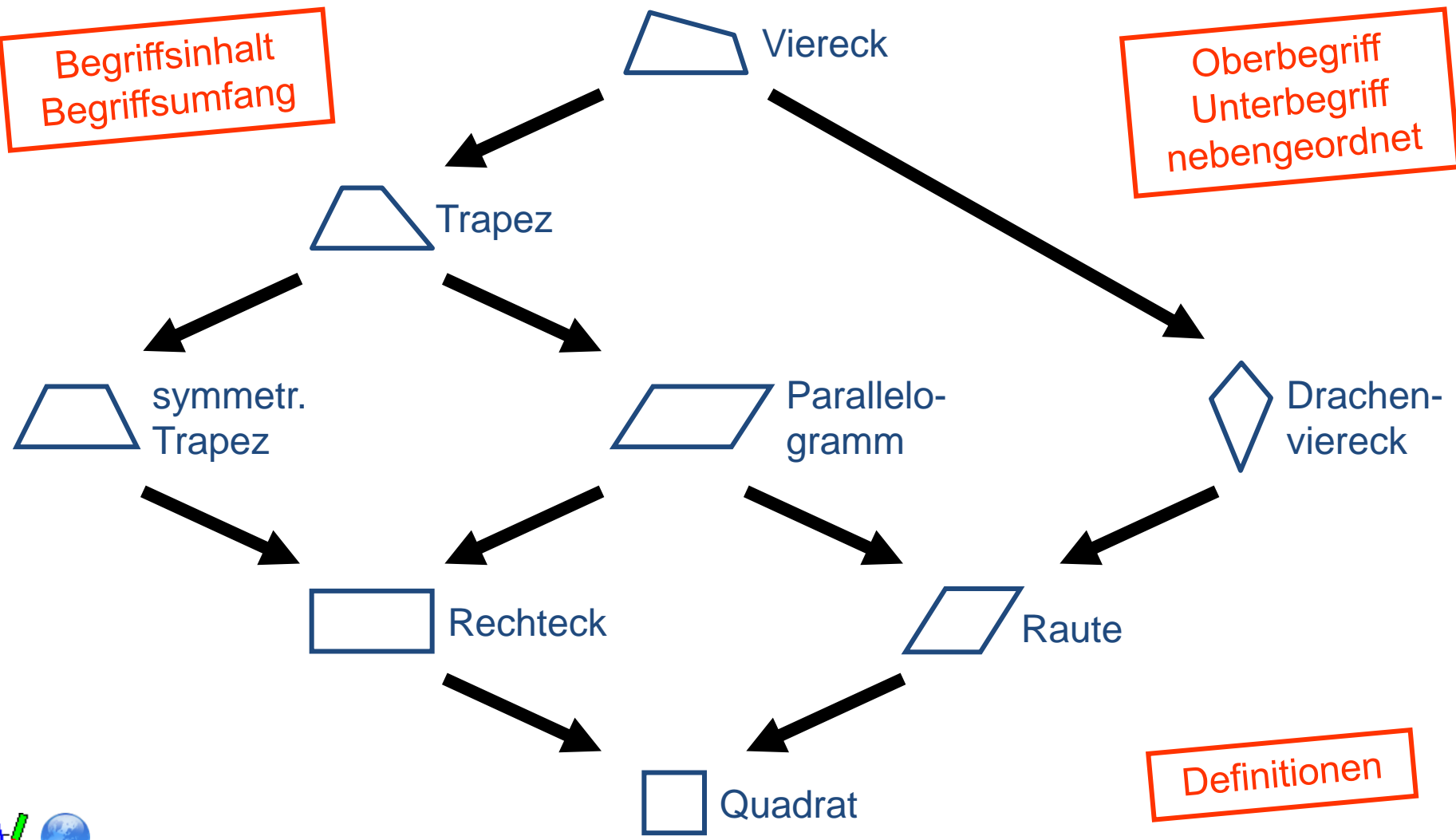


## Kapitel 2: Begriffsbildung

# 2.6 Objektbegriffe Dreieck und Viereck

Begriffsinhalt  
Begriffsumfang

Oberbegriff  
Unterbegriff  
nebeneinander



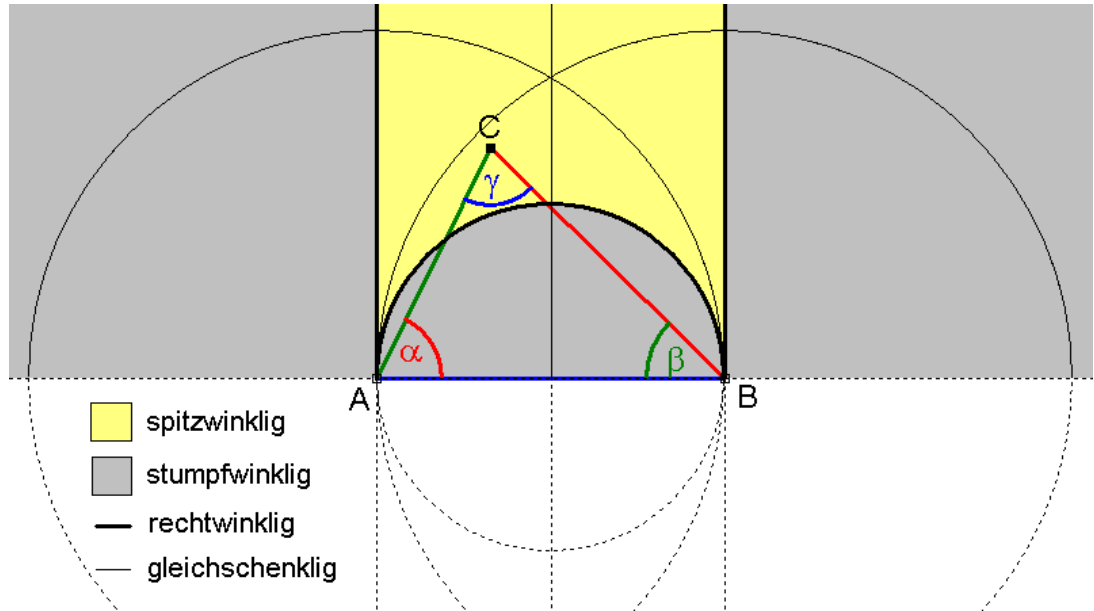
Definitionen



## ► Dreiecksbegriffe

- ▷ rechtwinklig
- ▷ spitzwinklig
- ▷ stumpfwinklig
- ▷ gleichschenkelig
- ▷ gleichseitig

als „bewegliche“  
Strukturen aufbauen.



## ► „Merkbild“

- ▷ Im Merkbild sind Bewegungen kondensiert.
- ▷ Wissensabruf benötigt Bewegliches Denken

## ► Ziel

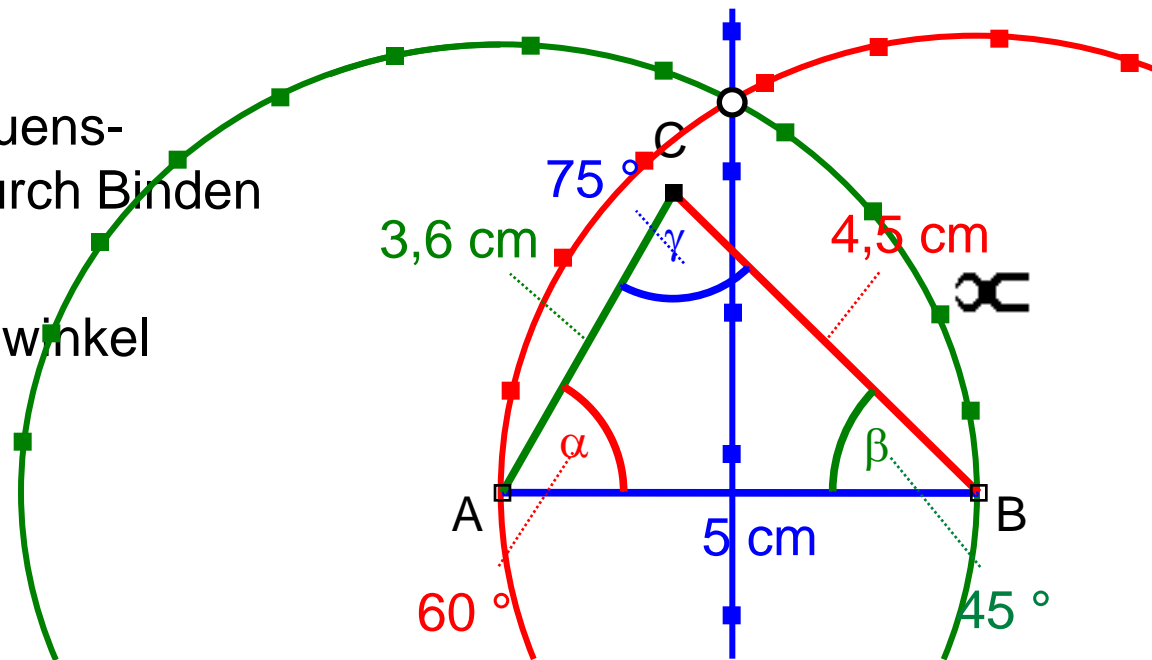
- ▷ Begriffe deutlich flexibler verfügbar machen als mit statischen Prototypen.

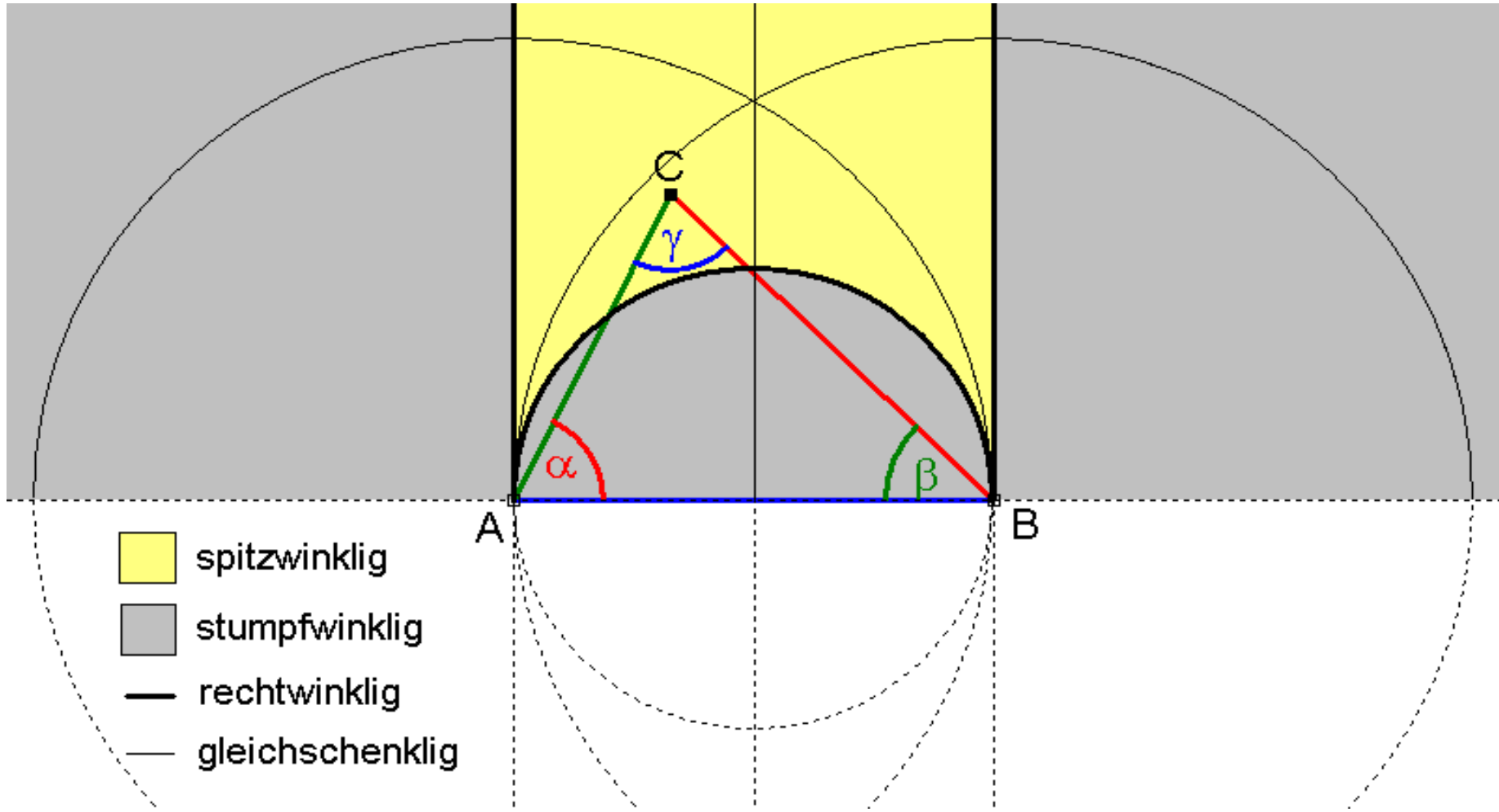
## 1) Bewege den Punkt C so, dass Dreiecke entstehen, die

- gleichschenklig mit  $|AC| = |BC|$  sind,
- gleichschenklig mit  $|AC| = |AB|$  sind,
- gleichschenklig mit  $|BC| = |AB|$  sind.

## 2) Angabe von Kurven (Begründung)

- Widerlegen bzw. vertrauensbildende Maßnahme durch Binden von C an die Kurven.
- Beobachtung der Innenwinkel  
→ Basiswinkelsatz
- Gleichseitige Dreiecke



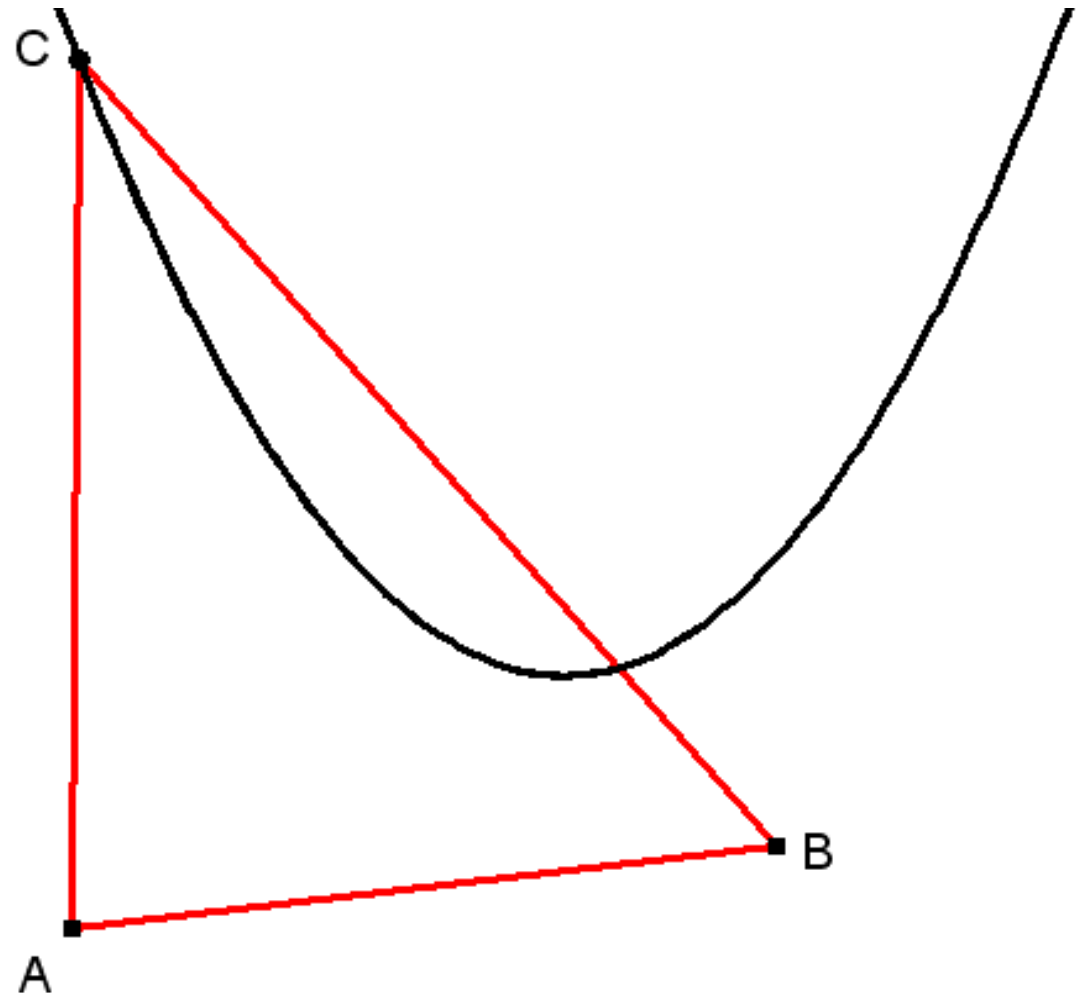


- spitzwinklig
- stumpfwinklig
- rechtwinklig
- gleichschenkelig



Der Punkt C wird entlang  
der eingezeichneten Kurve  
nach rechts bewegt.

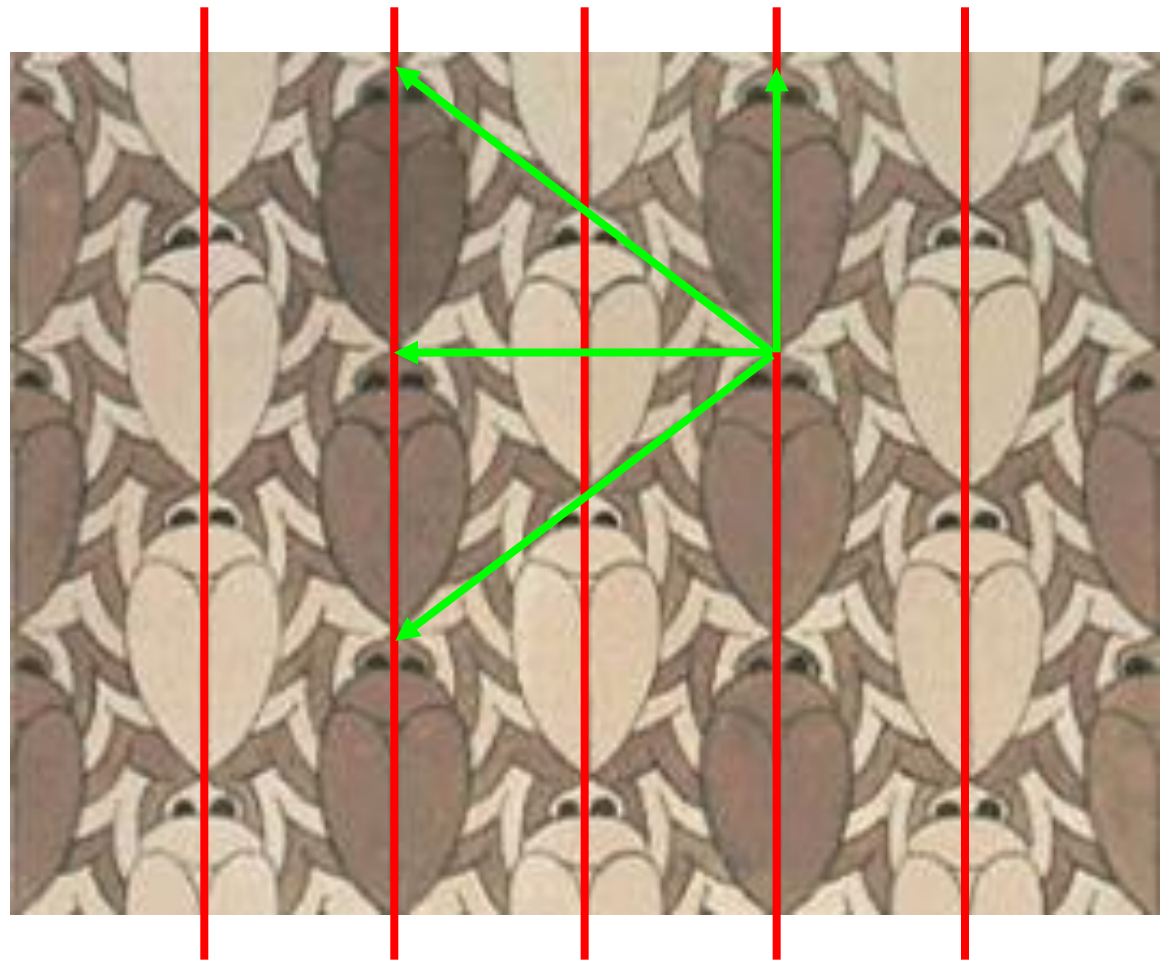
Welche Dreiecksgrund-  
formen nimmt das Dreieck  
ABC dabei der Reihe nach  
an?

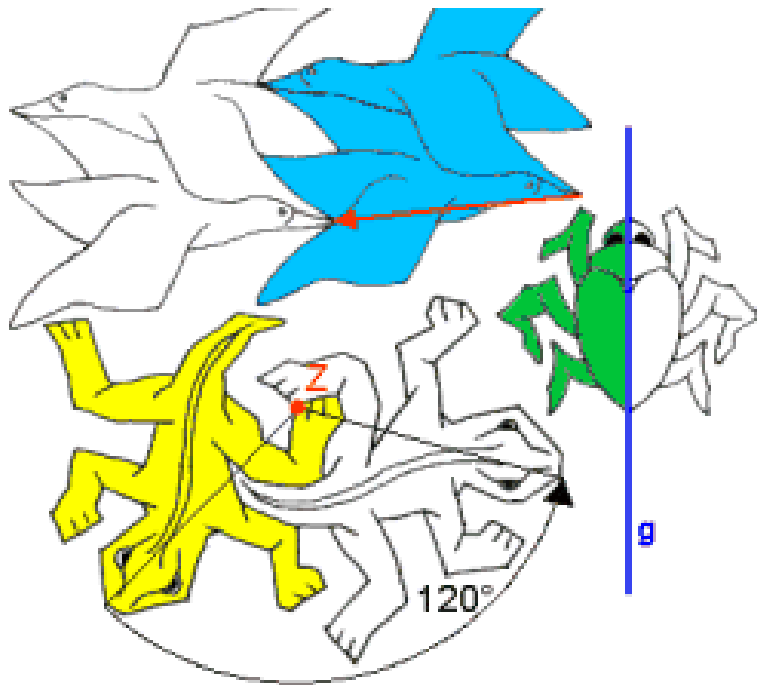




## Kapitel 2: Begriffsbildung

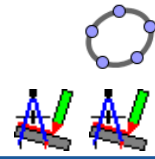
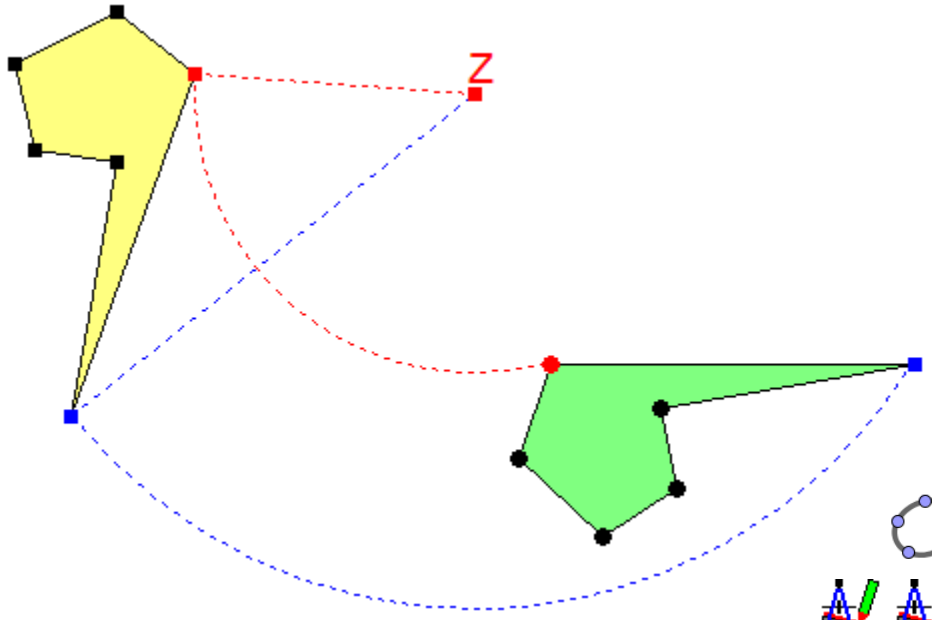
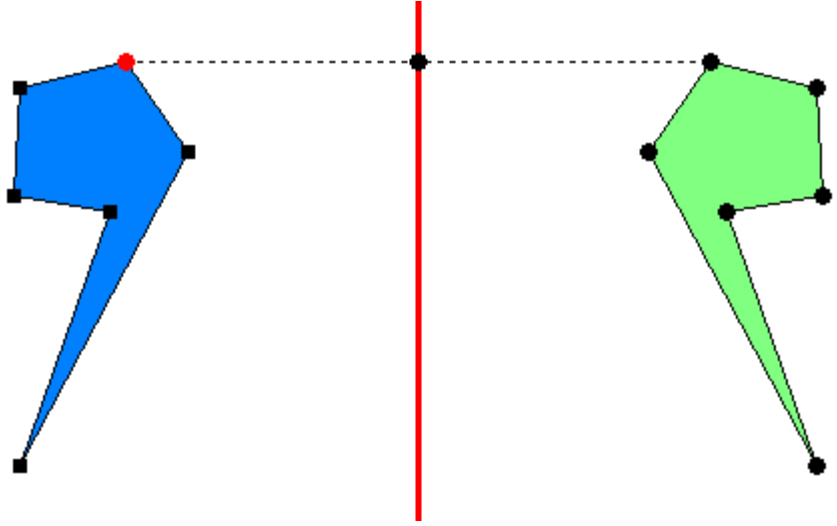
# 2.7 Abbildungsbegriffe: Kongruenzabbildungen

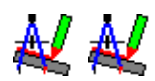
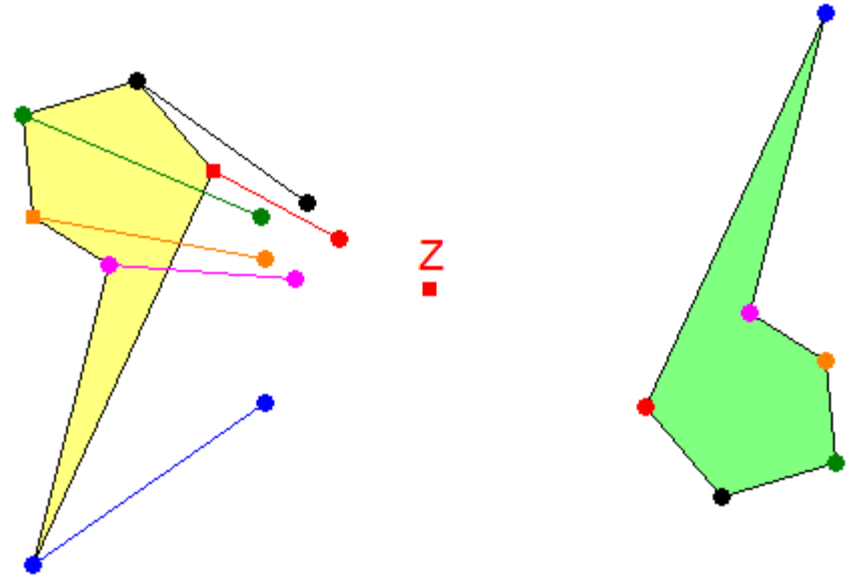
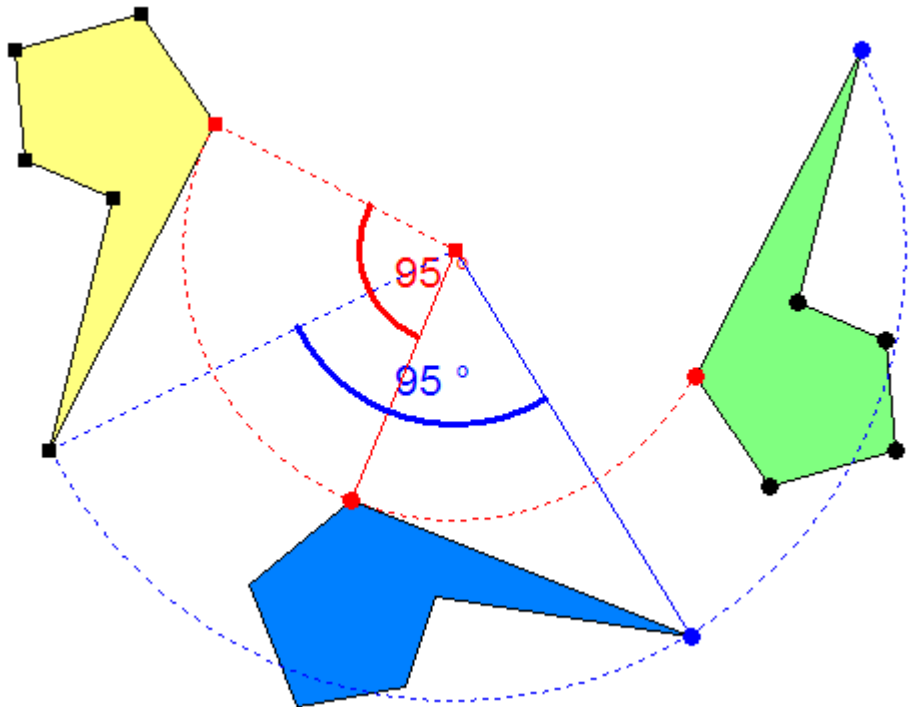


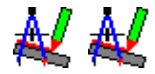
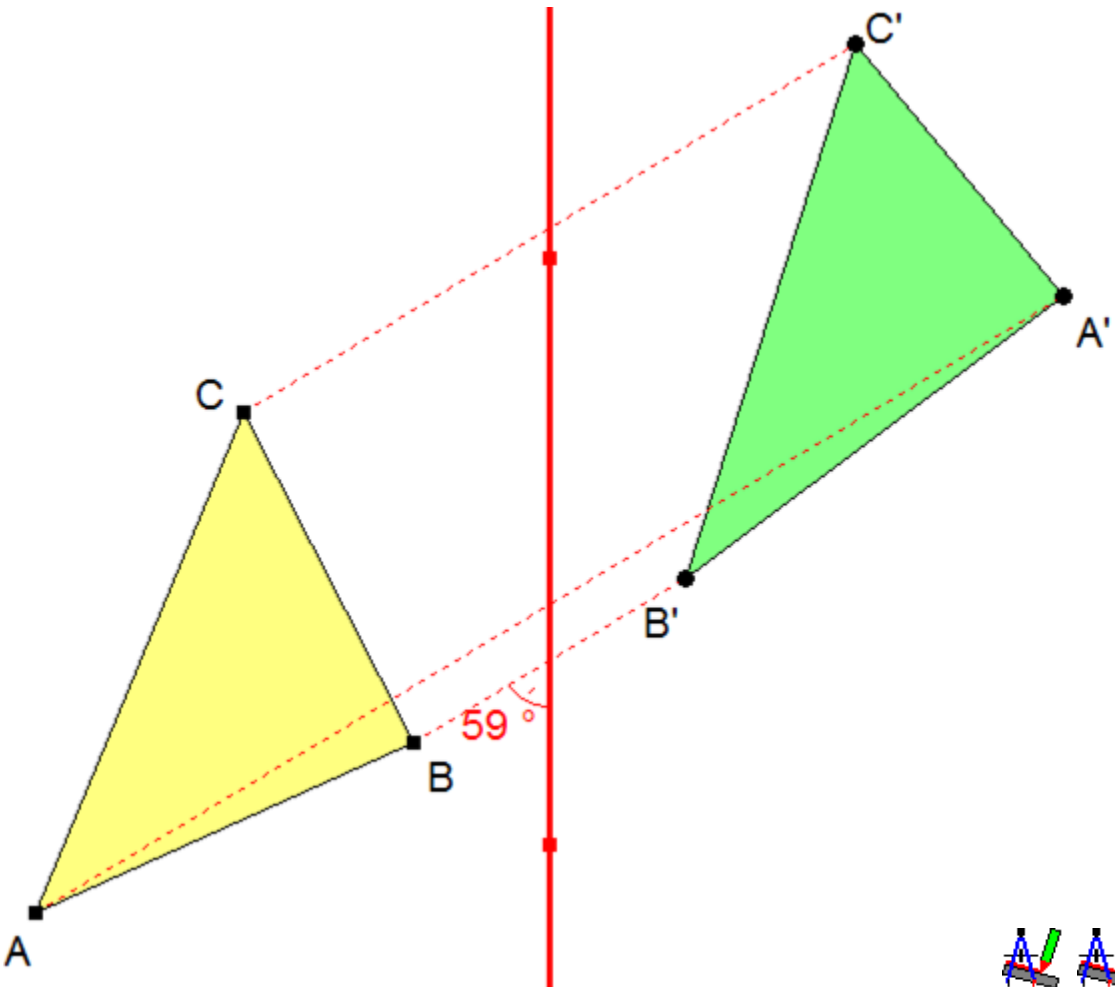
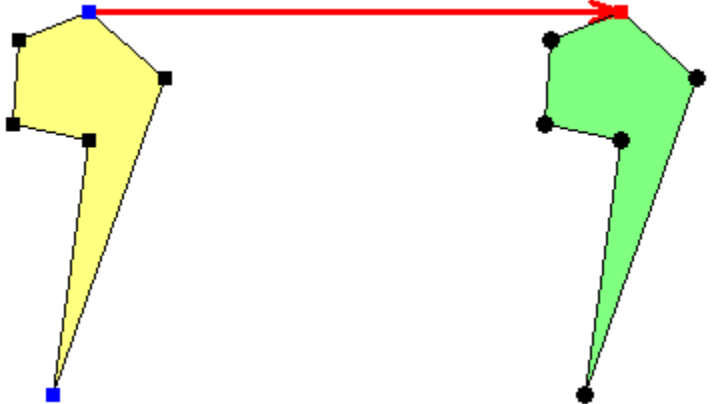


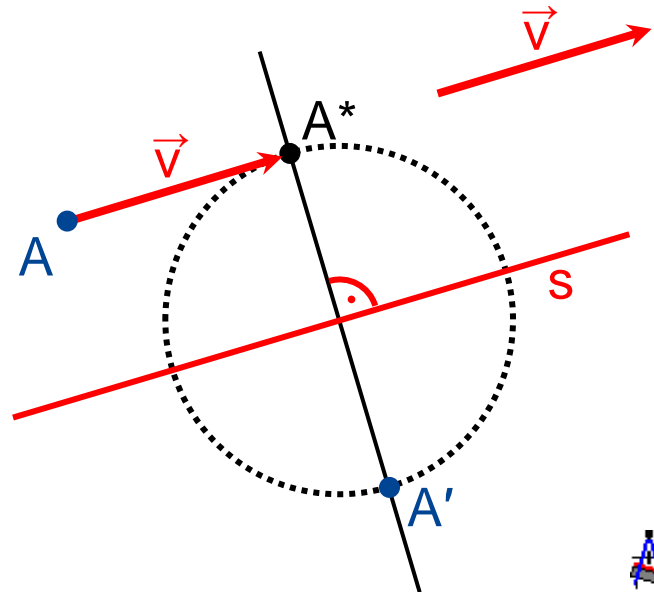
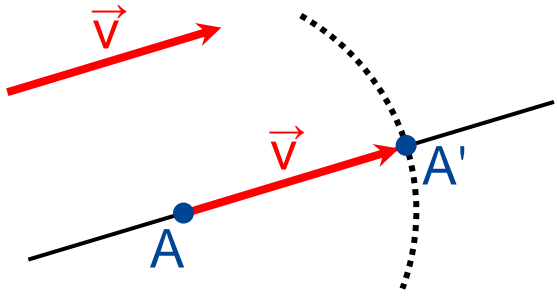
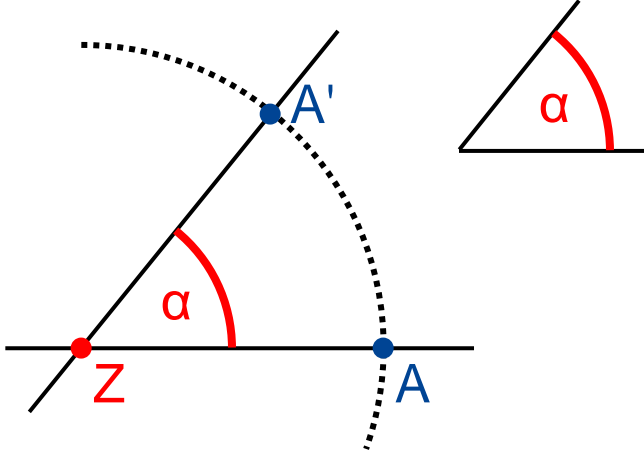
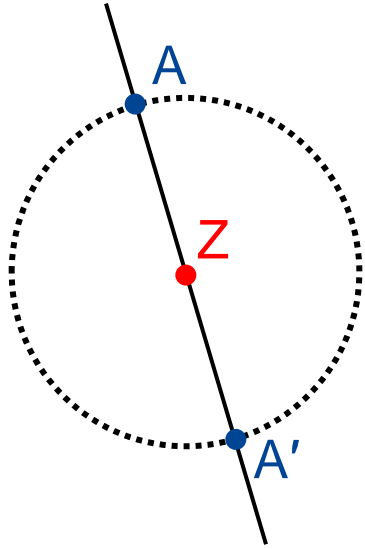
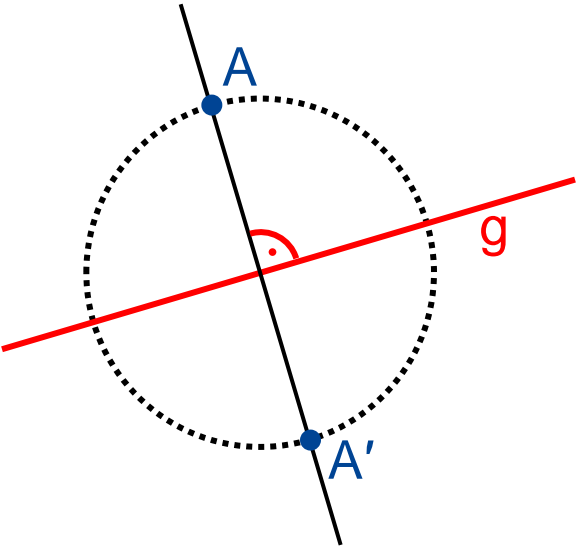
Symmetrie in Graphiken  
M. C. Eschers

Erstellt von  
Maïke Dependahl











The screenshot shows the DYNAGEO software interface with a toolbar on the left containing icons for selection, erasing, and saving. The main workspace contains three diagrams:

- Top Left:** A triangle with a point  $P$  on its side. A vertical red line acts as a mirror. A dashed red line connects  $P$  to its reflection  $P'$  across the mirror, with a right-angle symbol at the intersection.
- Top Right:** A triangle with a point  $Q$  on its side. A point  $Z$  is shown below it. A dashed blue line connects  $Q$  to  $Z$ . A point  $Q'$  is shown to the left of  $Z$ . A blue arc indicates an angle of  $60^\circ$  between the line  $ZQ$  and the line  $ZQ'$ .
- Bottom Left:** A triangle with a point  $R$  on its side. A green arrow points from  $R$  to its reflection  $R'$  across a vertical mirror line.
- Bottom Right:** A triangle with a point  $S$  on its side. A vertical orange line acts as a mirror. A dashed orange line connects  $S$  to its reflection  $S'$  across the mirror. An angle of  $73^\circ$  is marked between the mirror line and the segment  $SS'$ . An orange arrow labeled "Winkel" points to this angle.

The DYNAGEO logo is visible in the bottom left corner of the software window.





Winkel

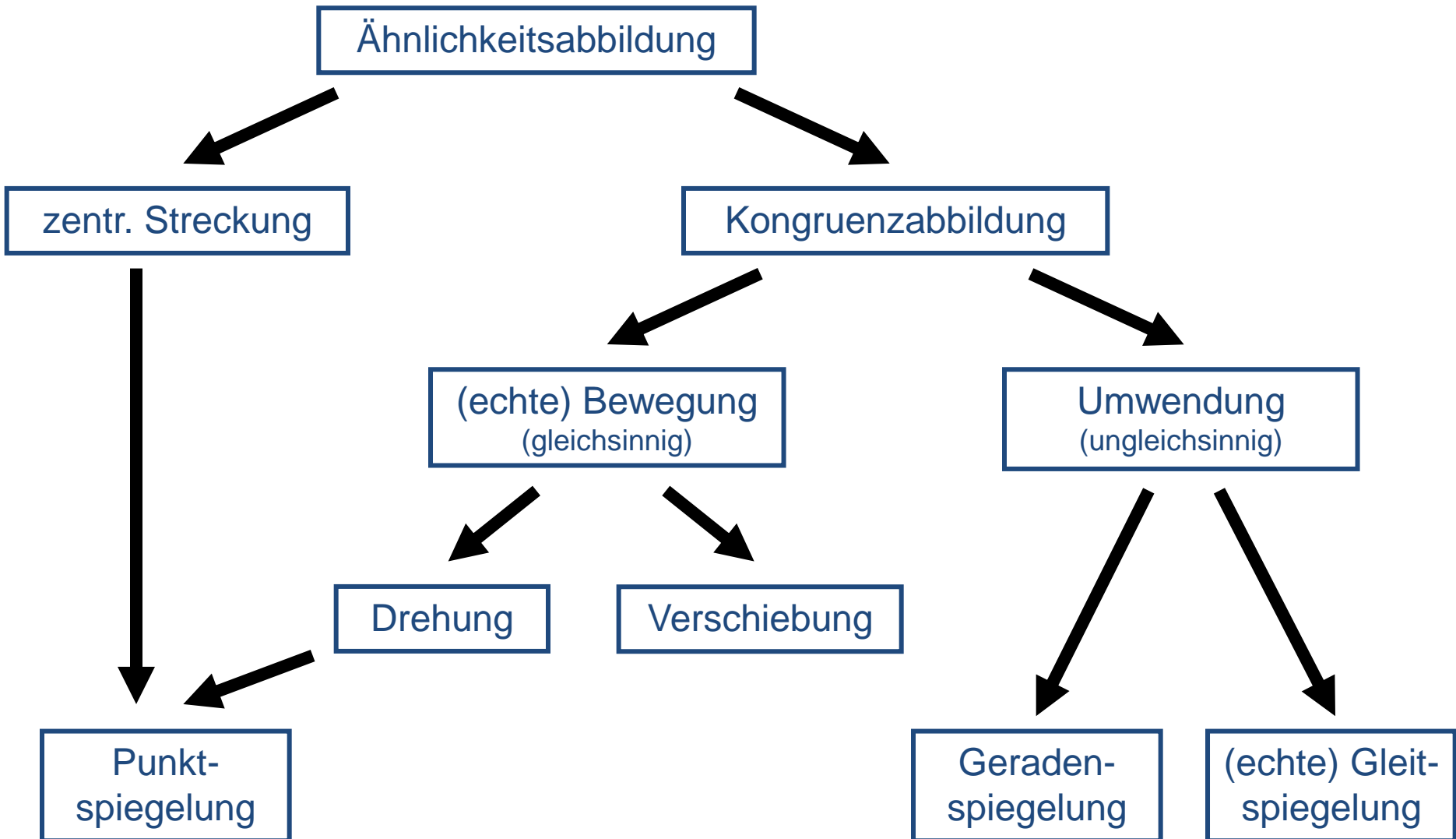
60°

42°

P, P', Q, Q', R, R', S, Z

DYNAGEO



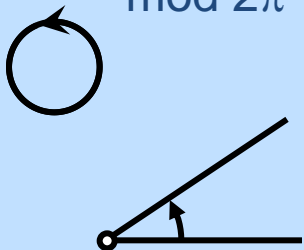


## Kapitel 2: Begriffsbildung

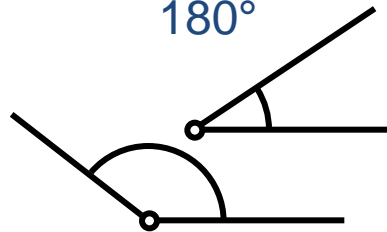
# 2.8 Winkelbegriff

gonio-  
metrisch

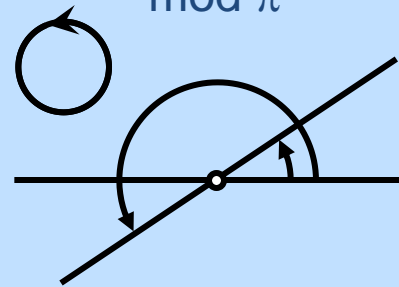
Winkel eines  
geordneten  
Paares von  
Halbgeraden  
in  
orientierter  
Ebene,  
bestimmt  
mod  $2\pi$

elementar-  
geometrisch

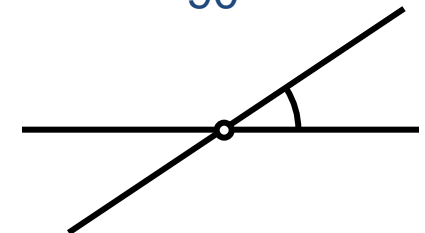
Winkel eines  
ungeordneten  
Paares von  
Halbgeraden  
in  
unorientierter  
Ebene,  
bestimmt  
zwischen  $0^\circ$  und  
 $180^\circ$

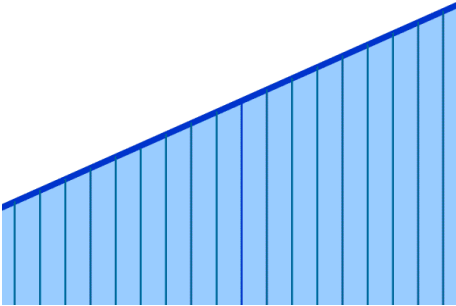
analytisch-  
geometrisch

Winkel eines  
geordneten  
Paares von  
Geraden  
in  
orientierter  
Ebene,  
bestimmt  
mod  $\pi$

stereo-  
metrisch

Winkel eines  
ungeordneten  
Paares von  
Geraden  
in  
unorientierter  
Ebene,  
bestimmt  
zwischen  $0^\circ$  und  
 $90^\circ$





Durch eine Gerade  $g$  werden in der Zeichenebene zwei Halbebenen bestimmt. Eine Halbebene ist die Menge aller Punkte, die auf einer Seite von  $g$  liegen, einschließlich  $g$  selbst.

Die Schnitt- bzw. Vereinigungsmenge zweier Halbebenen, deren Randgeraden sich in einem Punkt  $S$  schneiden, heißt spitzer bzw. überstumpfer Winkel.

Eine Halbgerade nennt man auch Nullwinkel, eine Halbebene auch gestreckter Winkel.

