

Didaktik der Geometrie

Didaktik der Geometrie

- 1 **Ziele und Inhalte**
- 2 Begriffsbildung
- 3 Konstruieren
- 4 Argumentieren und Beweisen
- 5 Problemlösen
- 6 Entdeckendes Lernen

Homepage zur Veranstaltung

<http://www.juergen-roth.de>

▶ Lehre ▶ Didaktik der Geometrie

Didaktik der Geometrie

Kapitel I: Ziele und Inhalte

Kapitel 1: Ziele und Inhalte

- 1.1 Was ist Geometrie?
- 1.2 Warum Geometrieunterricht?
- 1.3 Raumvorstellung / räumliches Denken
- 1.4 Kopfgeometrie
- 1.5 Aspekte und Ziele des
Geometrieunterrichts
- 1.6 Inhalte des Geometrieunterrichts

Kapitel 1: Ziele und Inhalte

1.1 Was ist Geometrie?

- ▶ **Geometrie ist die Wissenschaft vom uns umgebenden Raum.**
- ▶ **Geometrie ist das älteste mathematische Teilgebiet.**
 - ▷ Über viele Jahrhunderte hinweg bestand die Mathematik im wesentlichen aus Geometrie.
- ▶ **Ägypter & Babylonier (ab 3000 v. Chr.):**
 - ▷ Geometrie ist eine Naturwissenschaft.
 - ▷ Man fragte nicht nach logischer Ableitbarkeit, sondern nach Übereinstimmung mit der Realität.
 - ▷ Man „wusste“ zum Beispiel, wie man rechte Winkel konstruieren konnte, und das reichte.

▶ **Die alten Griechen entdeckten die Macht des Denkens, die Logik und damit auch die Möglichkeit der Mathematik.**

- ▶ Man kann durch reines Denken Erkenntnisse erzielen!
- ▶ Das Denken folgt gewissen Regeln, den Gesetzen der Logik.
- ▶ Wenn die Voraussetzungen eines logischen Schlusses gegeben sind, dann gilt automatisch auch die Folgerung.

▶ **Die Elemente des Euklid sind streng deduktiv aufgebaut.**

- ▶ Es wird zwischen Grundbegriffen und definierten Begriffen unterschieden.
- ▶ Ausgehend von wenigen Grundsätzen (Axiomen) werden durch logisches Schließen Folgesätze bewiesen.

▶ **„more geometrico“**

- ▶ Im Mittelalter in allen universitären Disziplinen Ausdruck für streng logisch („wissenschaftlich“) aufgebaute Argumentationsketten.

▶ Platon (427 - 347 v. Chr.)

- ▷ Es gibt zwei Welten:
 - ▶ die Welt der Ideen (die eigentliche Welt) und
 - ▶ die Welt der Erscheinungen (die nur ein Abbild / Schatten der Idealen Welt ist).

▶ Immanuel Kant (1724 - 1804)

- ▷ Geometrie ist ein Produkt unseres Verstandes:
„synthetische Urteile a priori“.

▶ David Hilbert (1862 - 1943):

- ▷ Es werden nicht die Objekte definiert (Es wird z. B. nicht erklärt was ein Punkt ist!), sondern nur die Spielregeln festgelegt, also wie mit den Objekten umzugehen ist.
- ▷ „Man muss jederzeit an Stelle von ‚Punkte, Geraden, Ebenen‘ ‚Tische, Stühle, Bierseidel‘ sagen können.“



Kapitel 1: Ziele und Inhalte

1.2 Warum

Geometrieunterricht?

▶ **Lebensvorbereitung**

- ▷ Alltag
 - ▶ Figuren und Körper benennen und charakterisieren
 - ▶ lesen von Landkarten
 - ▶ praktischen Tätigkeiten (Tapezieren, Fliesen, Holzbau, ...)
- ▷ weiterführende Schulen oder Studiengänge
- ▷ Berufsvorbereitung
 - ▶ (hauptsächlich handwerklich-technische Berufe)

▶ **Umwelt besser verstehen bzw. mit anderen Augen sehen**

- ▶ Form von Verpackungen
- ▶ Netz eines Fußballs
- ▶ Parkettierungen, Ornamente
- ▶ Brückenkonstruktion
- ▶ Bienenwaben, Kristalle, Schneckenhaus, ...

▶ **Grundlage anderer Wissenschaften**

- ▶ Geographie, Kristallographie, Physik, Astronomie, Biologie, Architektur, Kunst, ...

▶ **Altes Kulturgut**

- ▶ Entwickelt sich seit mehreren Jahrtausenden
- ▶ Wird seit der Antike in sämtlichen Kulturkreisen betrieben
- ▶ Wurzeln in praktischen Problemen der Erdvermessung
- ▶ Vorreiter für eine streng deduktiv aufgebaute, axiomatisch formulierte Mathematik
- ▶ Ästhetische Komponente

▶ **Erreichen allgemeiner Lernziele fördern**

- ▶ Erwerb psychomotorischer & zeichnerischer Fähigkeiten
- ▶ Förderung der Raumanschauung
- ▶ Fähigkeit des Argumentierens und begrifflichen Denkens
- ▶ Entwickeln von Problemlösefähigkeiten
- ▶ Entfaltung von Kreativität



Kapitel 1: Ziele und Inhalte

1.3 Raumvorstellung / räumliches Denken

▶ **Thurstone:**

Es gibt sieben Primärfaktoren der Intelligenz

- ▷ Sprachverständnis
- ▷ Wortflüssigkeit
- ▷ Rechenfertigkeit
- ▷ Wahrnehmungstempo
- ▷ *Räumliches Vorstellungsvermögen*
- ▷ Merkfähigkeit
- ▷ Logisches Denken

Standpunkt der Probanden	Dynamische Denkvorgänge Räumliche Relationen am Objekt veränderlich	Statische Denkvorgänge Räumliche Relationen am Objekt veränderlich; Relation der Person zum Objekt veränderlich
Person befindet sich außerhalb	Veranschaulichung	Räumliche Beziehungen
Person befindet sich innerhalb	Vorstellungsfähigkeit von Rotationen	Räumliche Wahrnehmung
	Räumliche Orientierung	Rechts-Links-Unterscheidung

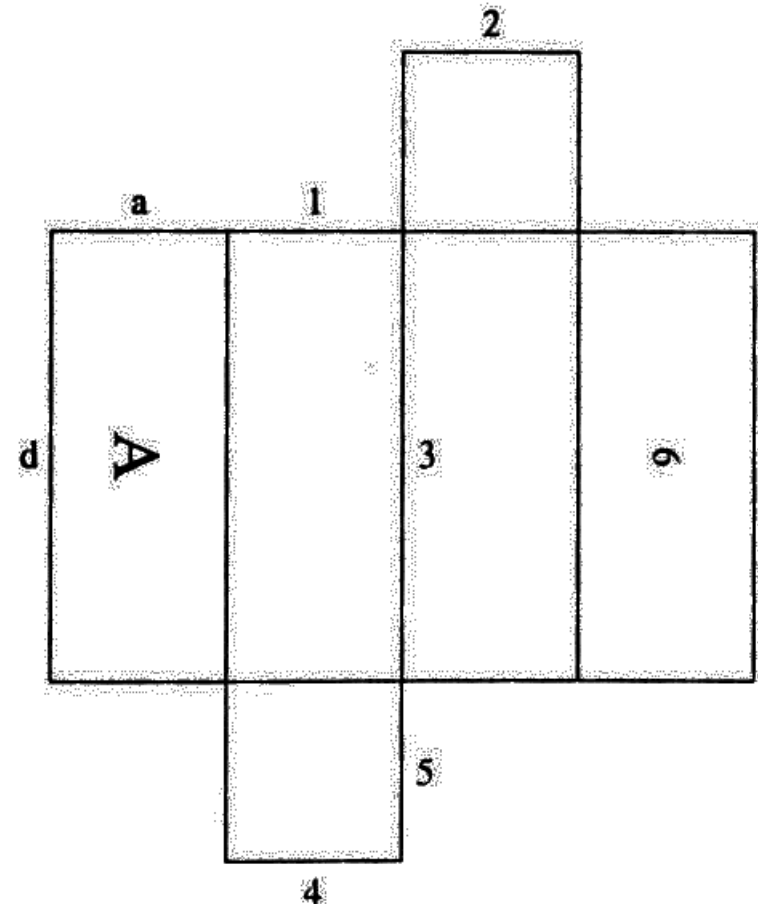
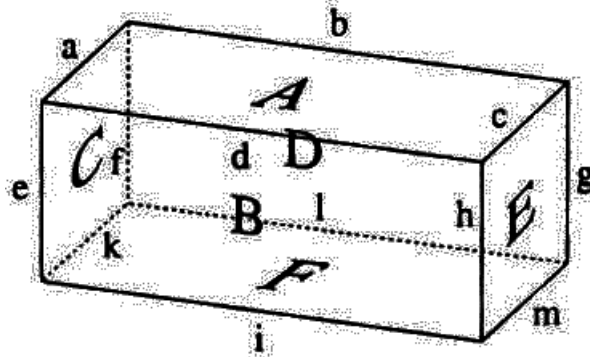
Maier (1999)

- ▶ **Fähigkeit die Senkrechte und Waagrechte identifizieren, also räumliche Beziehungen in Bezug auf den eigenen Körper erfassen zu können.**
- ▶ **Beispiel:** Wasseroberfläche



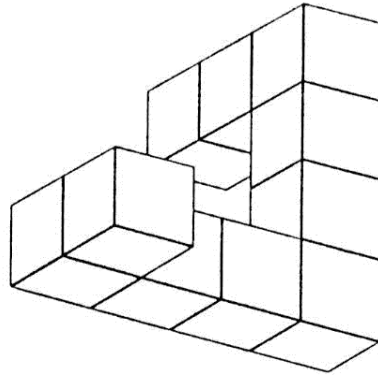
- ▶ Fähigkeit, sich gedanklich Aktivitäten wie Verschieben, Falten und Schneiden von räumlichen Objekten oder Objektteilen vorstellen zu können.

- ▶ **Beispiel:**
Welche Buchstaben des Schrägbilds entsprechen den Ziffern im Netz?

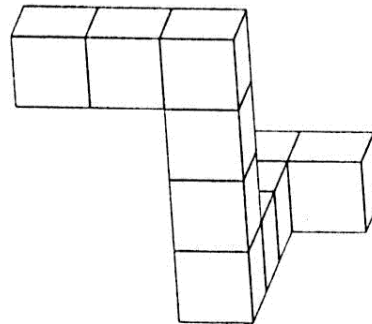
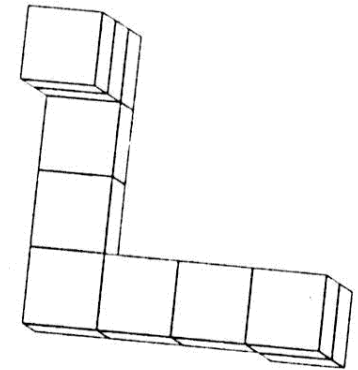


- ▶ Fähigkeit, sich Rotationen von zwei- oder dreidimensionalen Objekten vorstellen zu können.

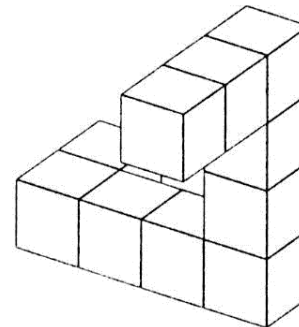
- ▶ **Beispiel:**
Welche der vier Figuren (a – d) stimmen mit der oben links überein?



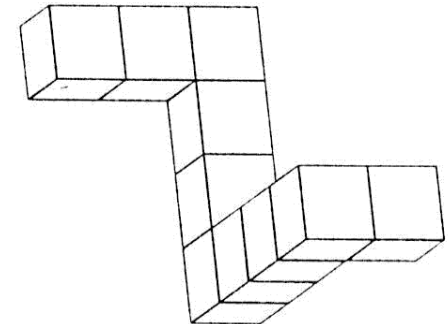
a



b



c

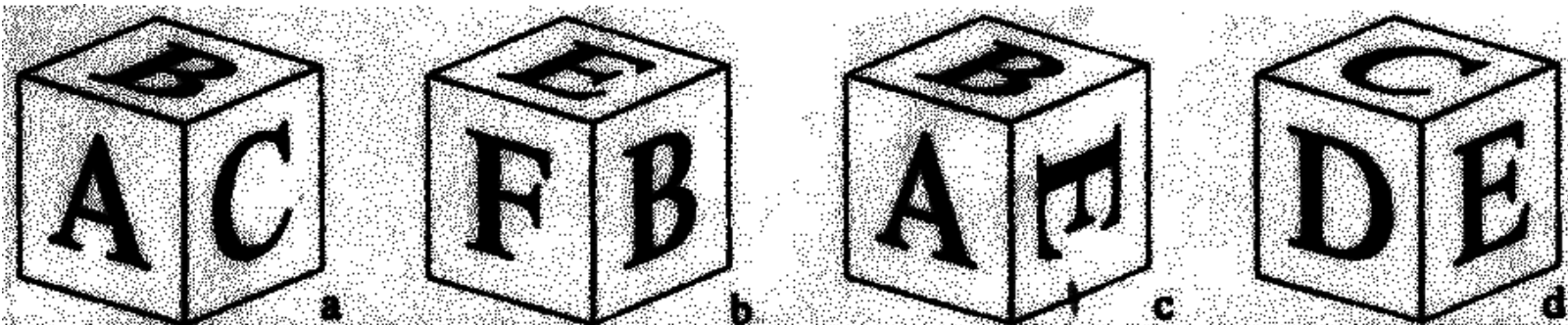


d

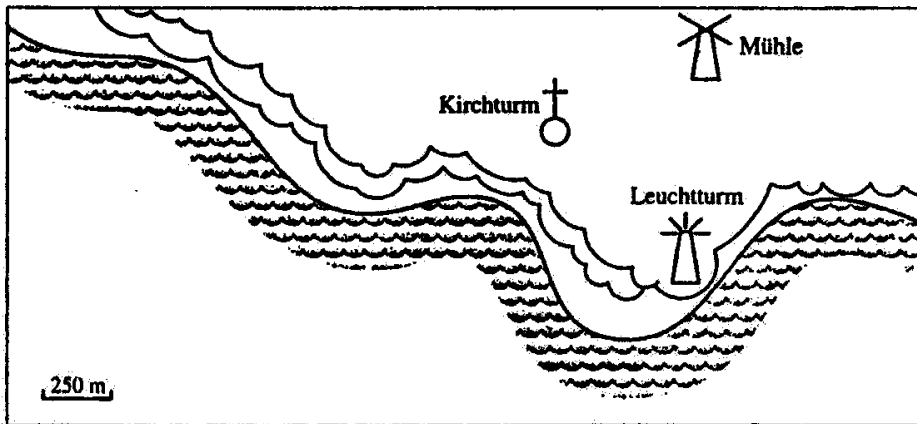
- ▶ **Fähigkeit räumliche Konfigurationen von mehreren Objekten oder Objektteilen zu erfassen.**

- ▶ **Beispiel:**

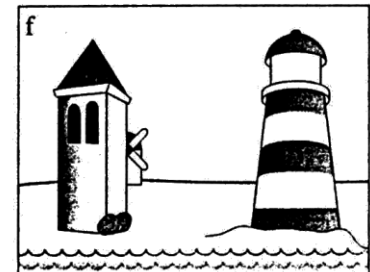
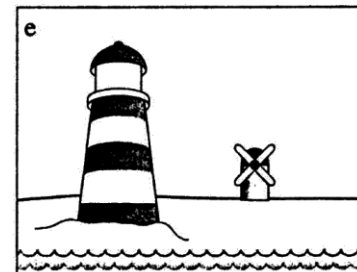
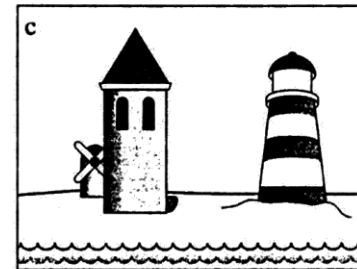
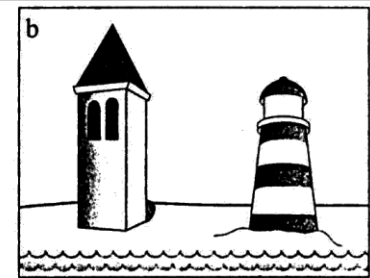
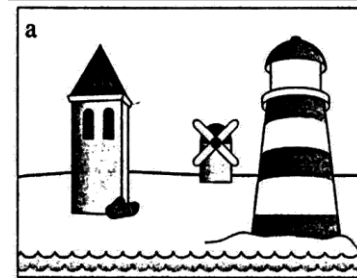
Drei der vier Schrägbilder zeigen den selben Würfel.
Welches Bild zeigt einen anderen?



- ▶ Fähigkeit, den Standort der eigenen Person, also die Perspektive unter der etwas betrachtet wird, zu wechseln.



- ▶ **Beispiel:**
Ein Urlauber ist mit dem Boot von Westen kommend die Küste entlanggefahren. In welcher Reihenfolge hat er die sechs Fotos aufgenommen?



Kapitel 1: Ziele und Inhalte

1.4 Kopfgeometrie

- ▶ **kommt als hilfsmittelfreie Geometrie ohne gegenständliche Modelle oder Bilder aus**
- ▶ **„Handwerkszeug“: Nur Vorstellungen und Wissen über geometrische Objekte**
- ▶ **Aufgaben werden mündlich oder schriftlich gestellt (evtl. auch bildhaft oder handelnd), aber nur im Kopf gelöst (ohne Papier & Bleistift, Computer, ...)**
- ▶ **Die Ergebnisse werden mündlich oder schriftlich dargestellt (evtl. auch bildhaft oder handelnd).**

- ▶ **Kopfrechnen und Kopfgeometrie unterscheiden sich wesentlich voneinander!**

- ▷ Kopfrechnen:
 - ▶ An elementaren Aufgaben werden Algorithmen abgearbeitet und automatisiert.

- ▷ Kopfgeometrie:
 - ▶ Das Lösen geometrischer Aufgaben im Kopf erfordert die Fähigkeit sich geometrische Gebilde vorstellen zu können, ihre Lage, ihre Größe und ihre Form zu variieren, sie zu kombinieren und dabei das Wissen über sie anzuwenden.

1. Phase: Aufgabenstellung

- Sprache oder Text
- Sprache + Gestik
- Sprache + Bild bzw. Modell

2. Phase: Räumliches Vorstellen, Operieren im Kopf

- Ohne Hilfsmittel

3. Phase: Ergebnispräsentation

- Sprache (oder Text)
- Sprache + Gestik
- Sprache + Bild bzw. Modell

Je nachdem welche Mittel in der 1. und 3. Phase erlaubt sind, ergibt sich eine Abstufung des Schwierigkeitsgrades.

▶ **PIAGET (1971):**

- ▶ Denken basiert auf verinnerlichte Handlungen.

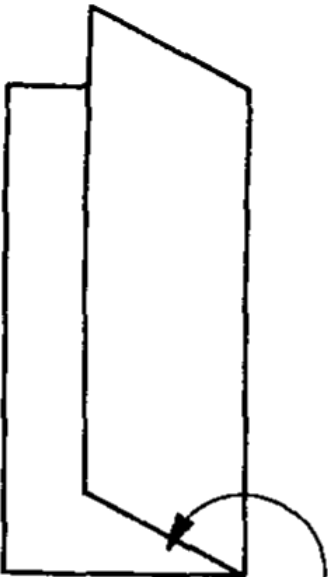
▶ **Empirische Untersuchungen belegen:**

- ▶ Handlungsorientiertes und experimentelles Arbeiten mit Modellen ist wichtig für die Entwicklung der Raumvorstellung.
- ▶ Durch sinnliche Wahrnehmungen entstehen Vorstellungsbilder, die mental verfügbar sind und gedanklich verändert werden können.

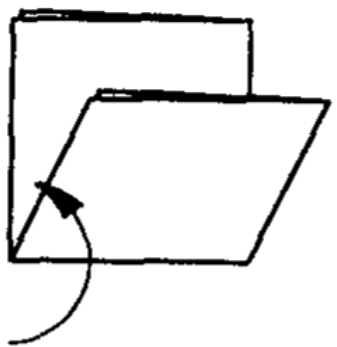
- ▶ Ausbildung und Stärkung der räumlichen Vorstellung durch operative Aktivitäten (z. B. Arbeiten mit konkreten Materialien, Anfertigen von Zeichnungen, ...)

▶ **Bei Vorstellungsproblemen:**

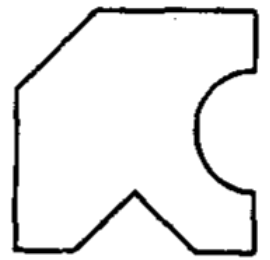
- ▶ Auf die handelnde Ebene mit Materialien zurückgreifen.



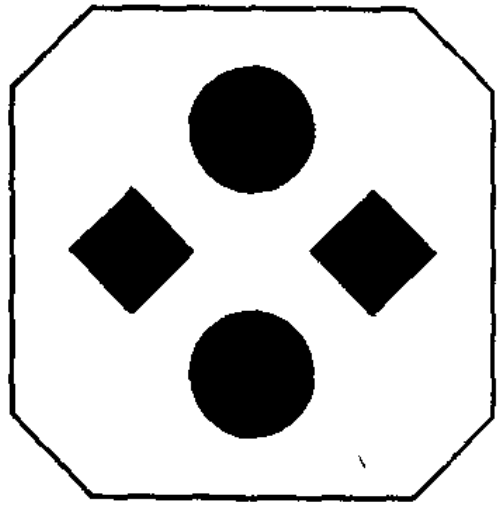
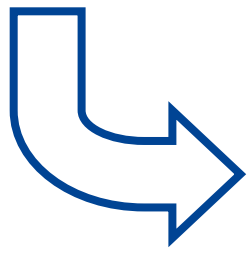
Quadrat
falten



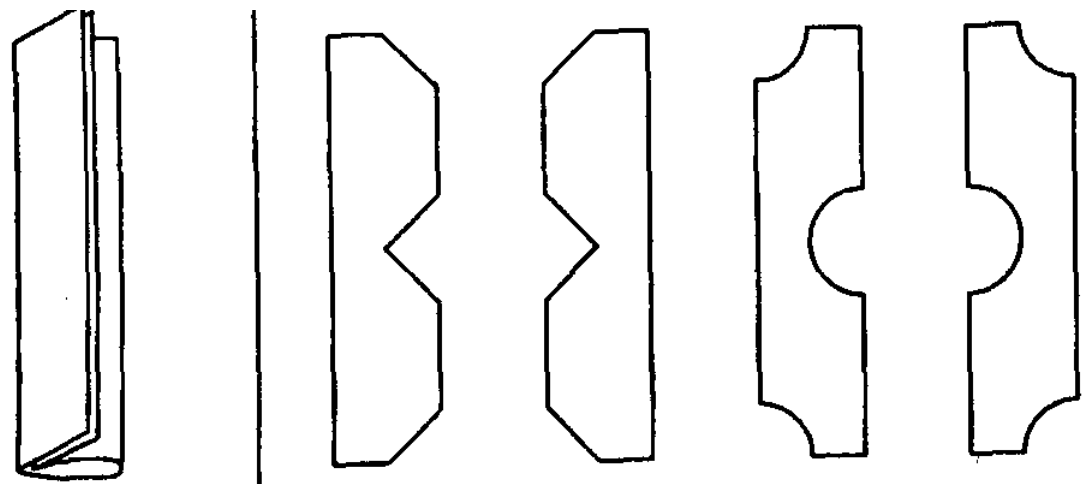
falten



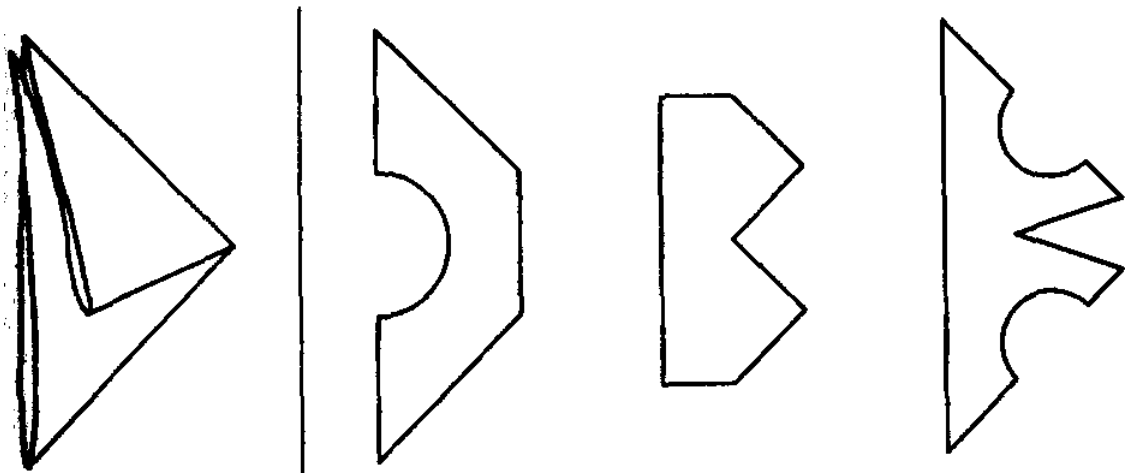
einschneiden

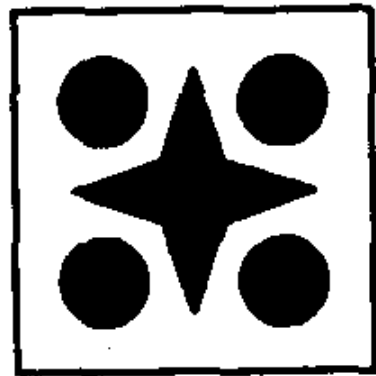
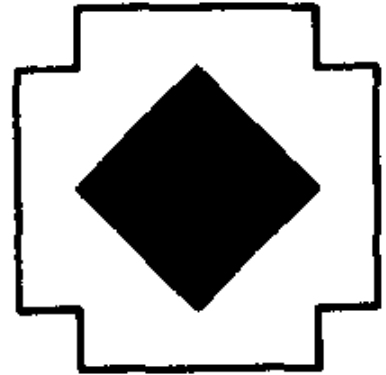
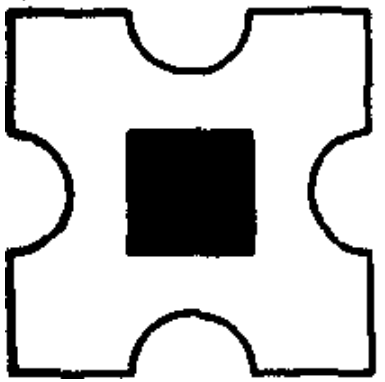
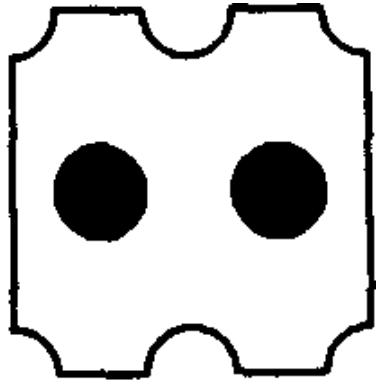
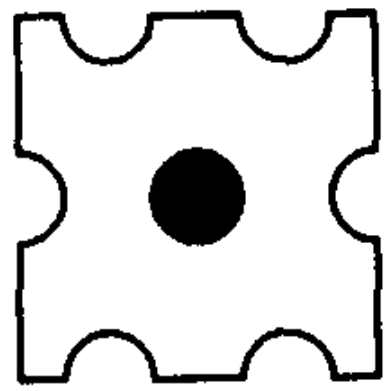
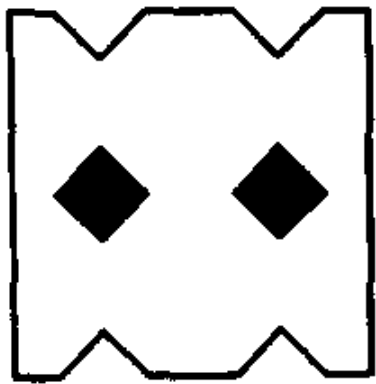
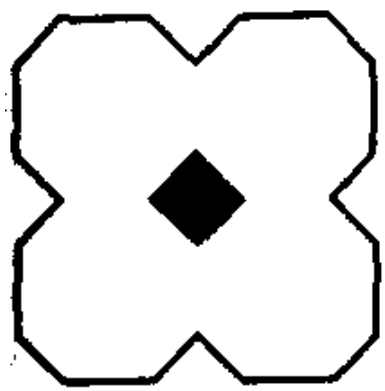


Wie sieht das
aufgefaltete Papier
nun aus?



Wie sieht das
aufgefaltete
Papier jeweils
anschließend
aus?

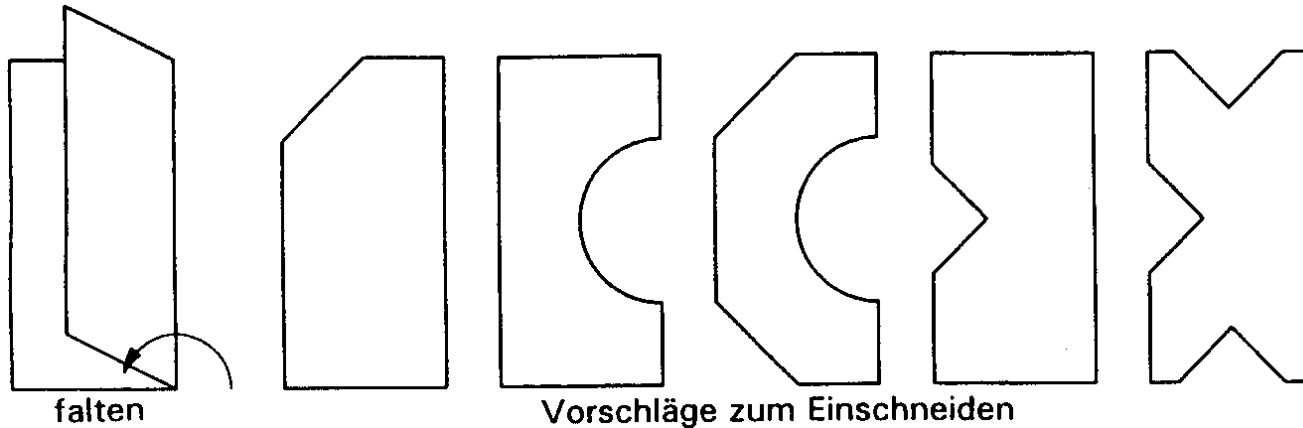




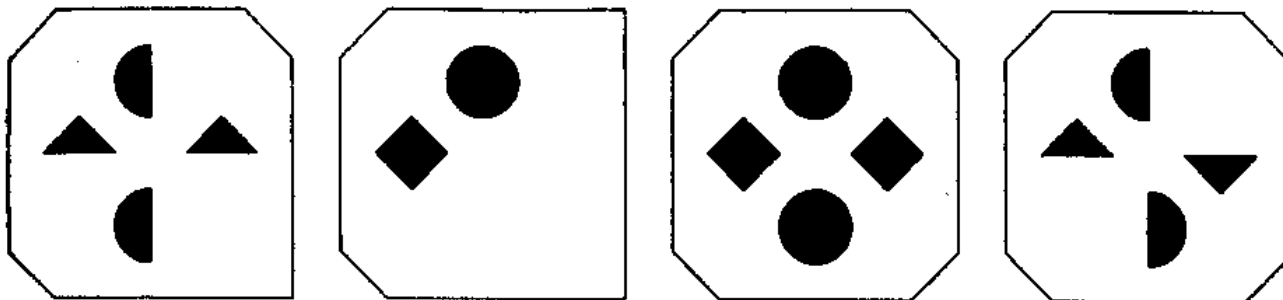
Lösungen

► Abstufung des Schwierigkeitsrades

- ▷ bei „Faltaufgaben“ z. B. zunächst nur einmal falten



► Bei Schwierigkeiten evtl. Kontrollinformationen anbieten von denen nur eine richtig ist.

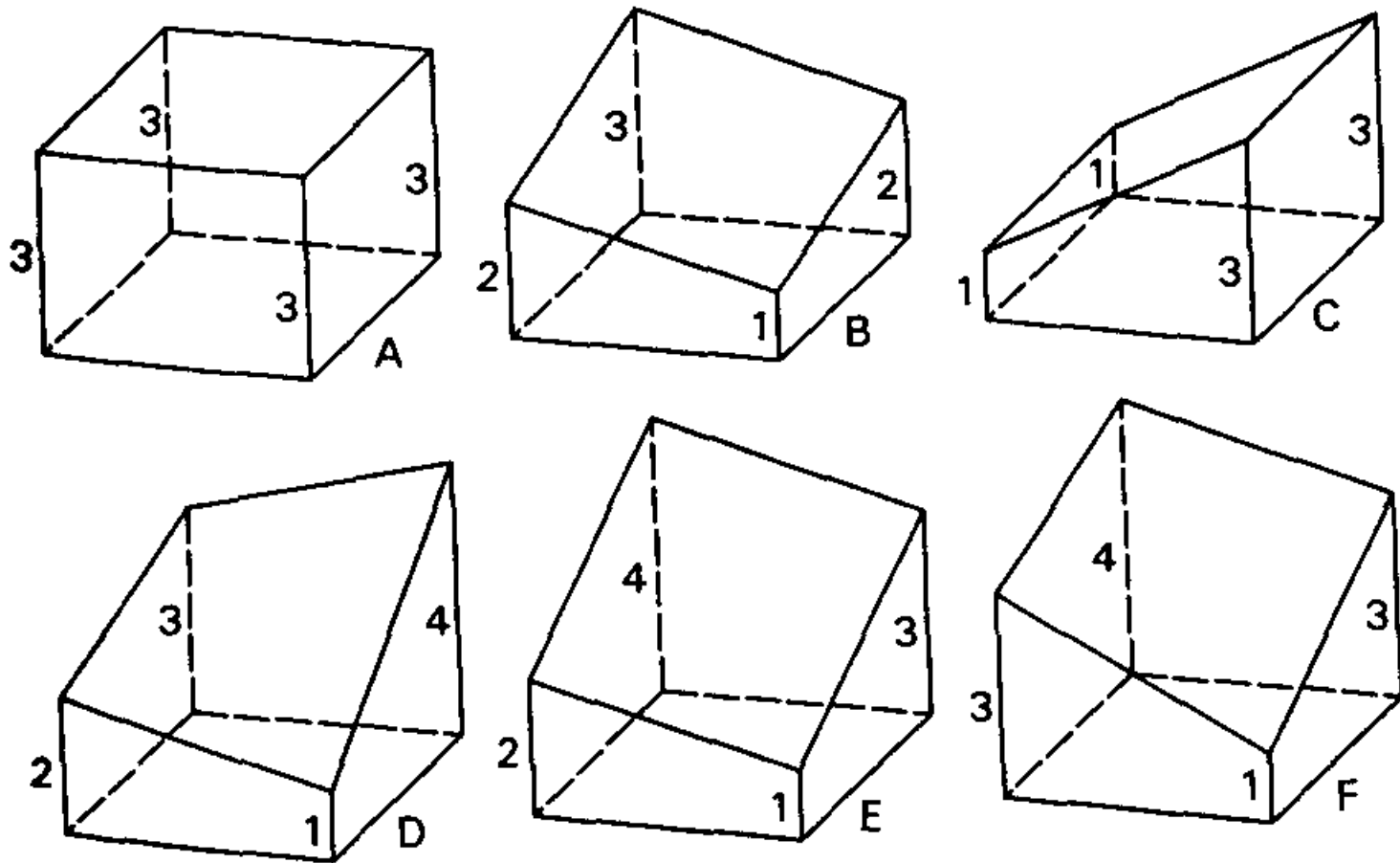


▶ **Kontrollfragen der Lehrkraft**

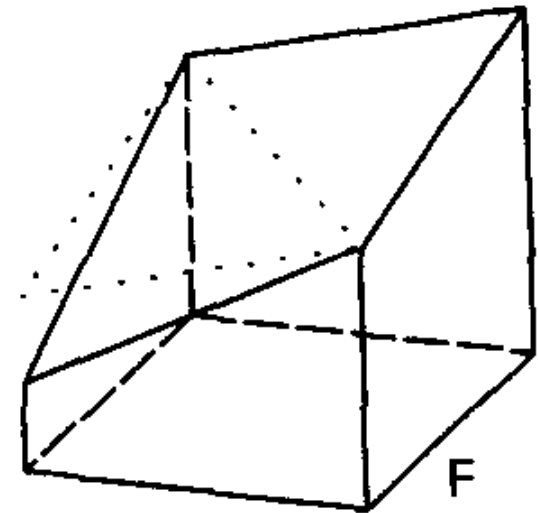
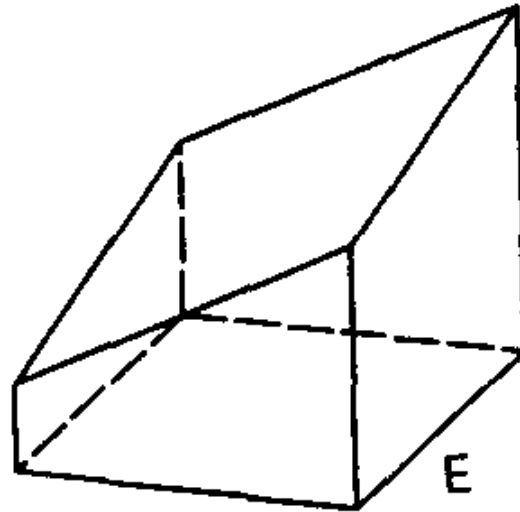
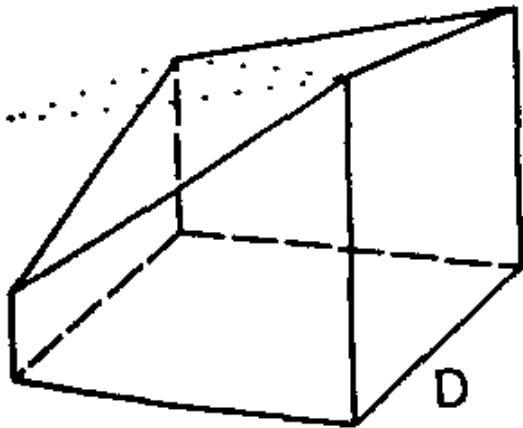
- ▷ Wie viel Schichten Papier liegen nach dem Falten übereinander?
- ▷ Wo befinden sich beim zusammengefalteten Papier
 - ▶ die Faltachsen?
 - ▶ die Ränder des aufgefalteten Blattes?
- ▷ Wie würde das aufgefaltete Blatt aussehen, wenn man nach dem Falten nur die Ecken abgeschnitten hätte?

▶ **Vorstellungen konkretisieren**

- ▷ Beim vorgestellten Operieren die Augen schließen.
- ▷ Vorstellend kinästhetisch arbeiten.
 - ▶ (imaginäres Blatt mit den Händen falten, Schnitte ausführen z. B. durch deuten mit dem Zeigefinger auf die Schnittkanten)
- ▷ Solche Vorstellungen helfen wirklich! Probieren Sie es aus.

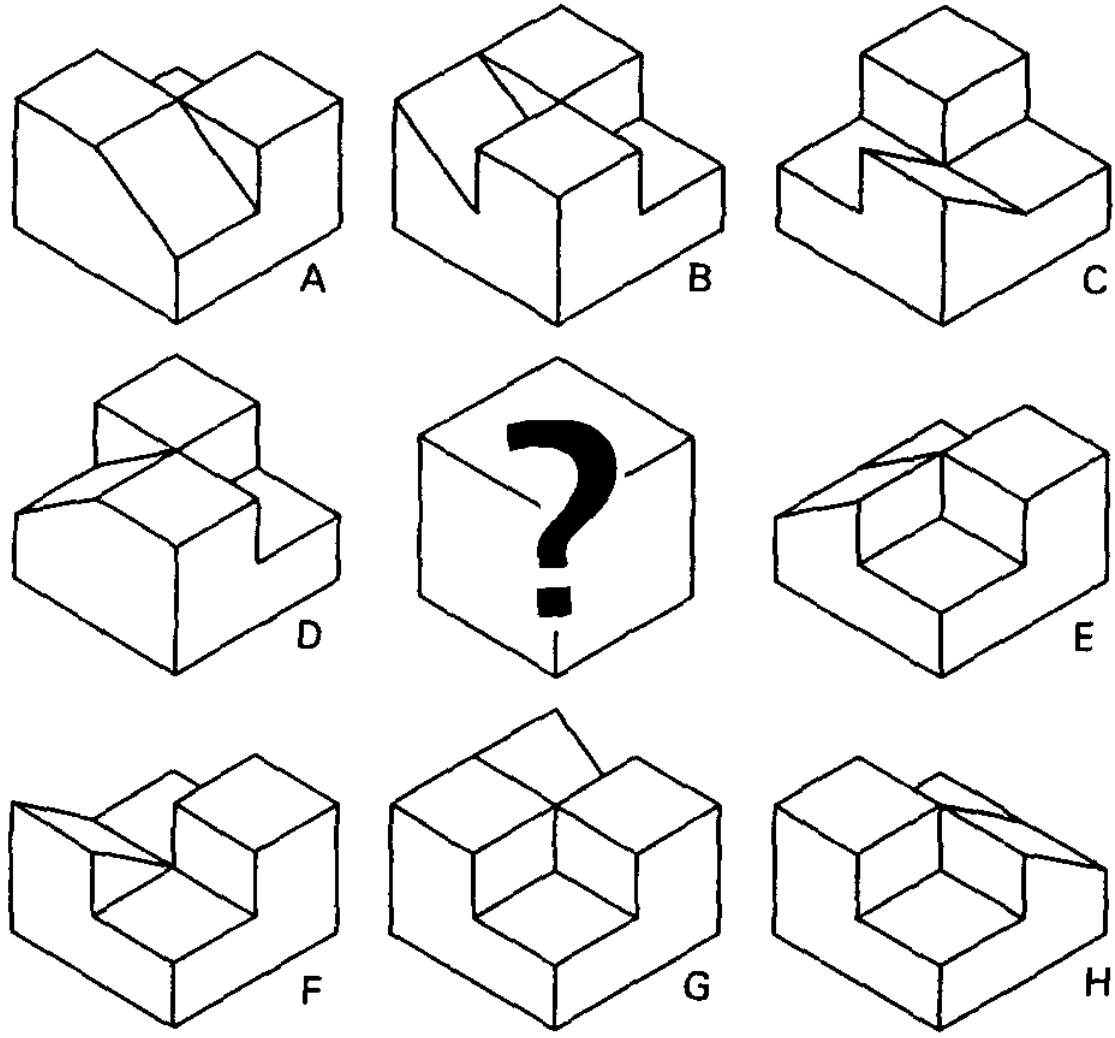


Lassen sich die Schnittflächen der geschnittenen
Würfel mit einem Schnitt erzeugen?





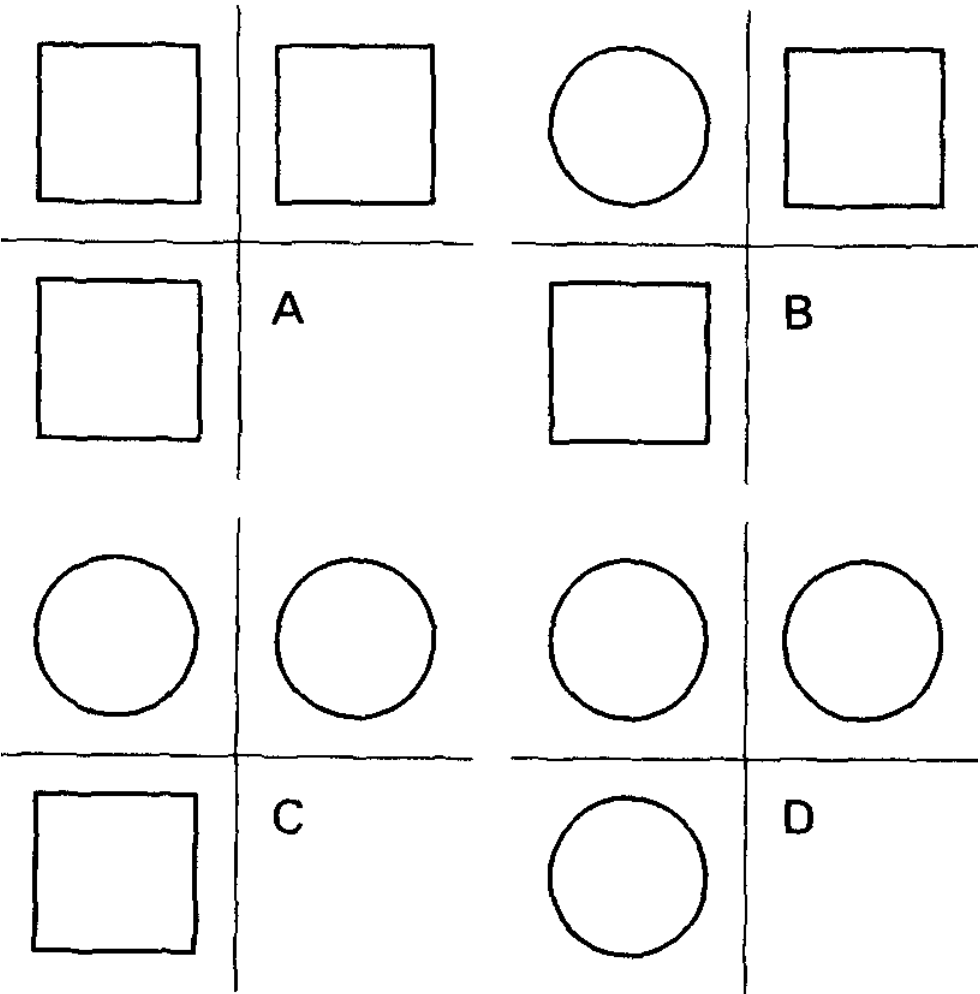
Welche der acht
Teile lassen sich zu
einem Würfel
zusammensetzen?



A-C; B-H; D-F; E-G

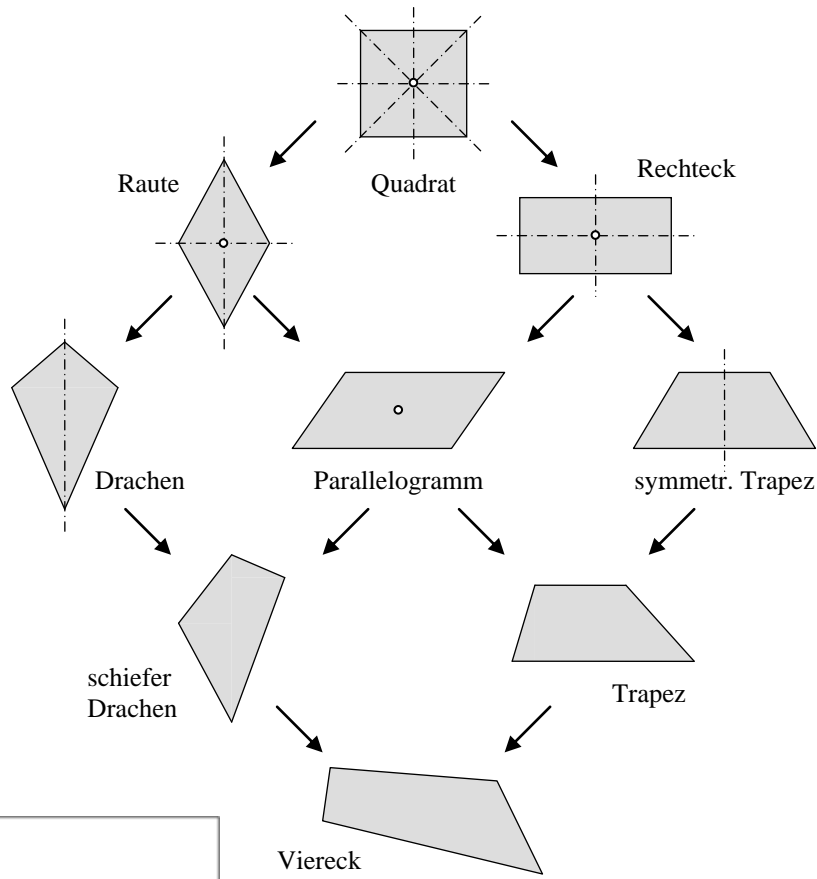
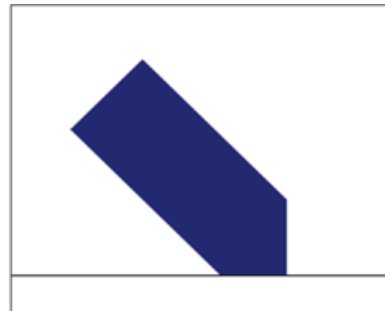
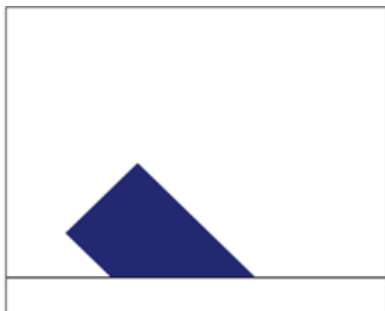
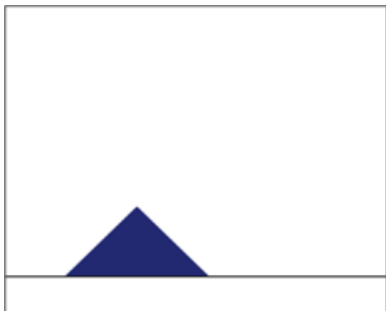


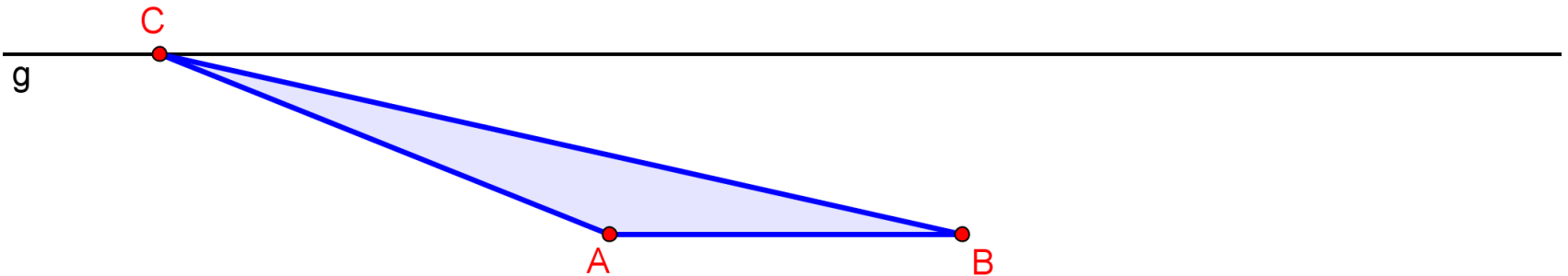
Existiert der jeweilige Körper?





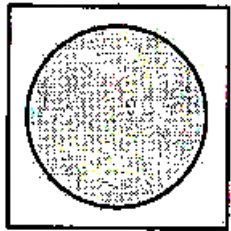
Um welche Vierecke könnte es sich jeweils handeln?





- ▶ Der Punkt C wird entlang der eingezeichneten Kurve nach rechts bewegt.
- ▶ Welche Dreiecksgrundformen nimmt das Dreieck dabei der Reihe nach an?

- ▷ Ein Würfel steht auf einer Ebene, die Vorderfläche zeigt zu dir.
- ▷ Zeichne die beiden Diagonalen der rechten Fläche.
Ihr Schnittpunkt heißt M .
- ▷ Der Würfeckpunkt H liegt links, hinten, oben.
- ▷ Zeichne eine Gerade g durch H und M ,
sie schneidet die Ebene, auf der der Würfel steht, im Punkt S .
- ▷ Wie weit ist S vom Würfel entfernt?
- ▷ Kannst du die Lage von S genauer beschreiben?



a



b



c



d



e



f



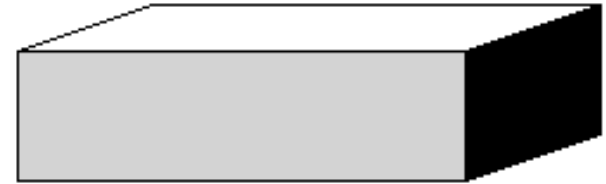
g



h

Aus welchen drei Teilen kann die Figur auf der linken Seite jeweils zusammengesetzt werden?

- ▶ Der abgebildete Quader soll gekippt werden, erst nach rechts, dann nach hinten und schließlich noch zweimal nach rechts.
- ▶ Der Quader ist in der Anfangslage vorn grau, rechts schwarz, hinten grün, links rot, oben weiß und unten gelb. Kippt nun *in Gedanken* den Quader wie oben beschrieben.
- ▶ Ihr dürft den Quader ansehen, aber nicht in die Hand nehmen. Notiert für jede Zwischenlage und die Endlage die Farben der Flächen vorne, rechts hinten, links, oben und unten.



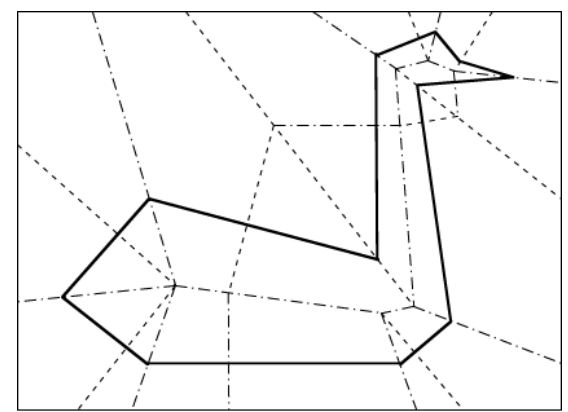
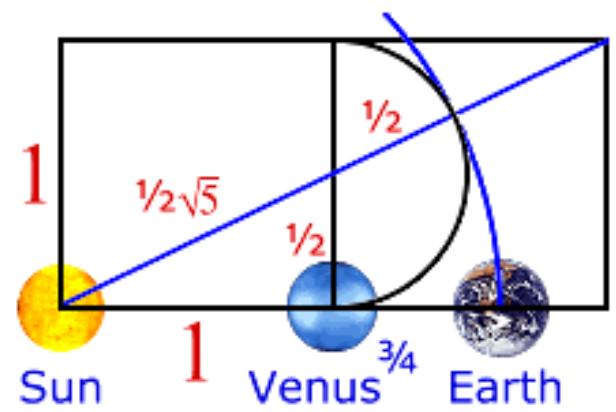
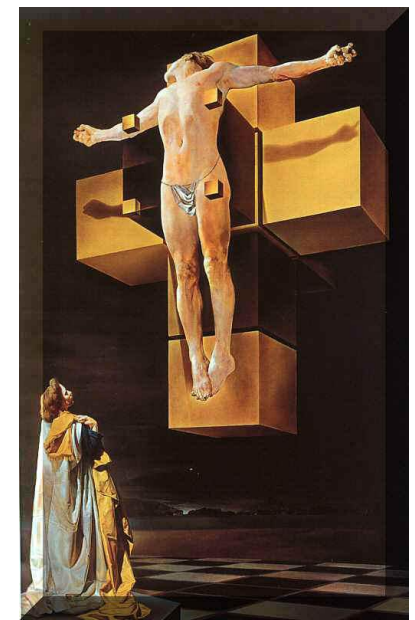
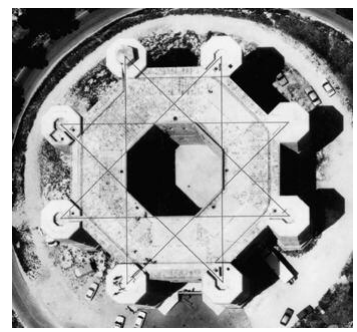
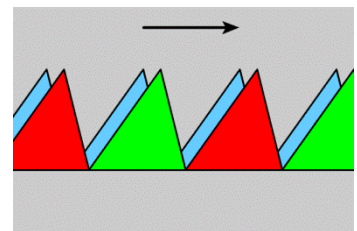
Kapitel 1: Ziele und Inhalte

1.5 Aspekte und Ziele des Geometrieunterrichts

- ▶ **Lehre vom Anschauungsraum**
- ▶ **Beispiel einer deduktiven Theorie**
- ▶ **Übungsfeld für das Problemlösen**
- ▶ **Vorrat an mathematischen Strukturen**

Relevanz für die
eigene Schulart?

- ▶ **Symmetrie**
- ▶ **Muster /
Strukturen**
- ▶ **Messen**
- ▶ **Konstruieren**
- ▶ **Formen**
- ▶ **Operieren
mit Formen**
- ▶ **Beweisen**
- ▶ **Geometrisieren**



► **Inhaltsziele**

Kenntnisse von

- ▷ Begriffen
- ▷ Sätzen
- ▷ Formeln
- ▷ Verfahren
- ▷ Definitionen
- ▷ Beweisen

Fertigkeiten bei Anwendungen
der Kenntnisse

► **Prozessziele**

Fähigkeit zum

- ▷ Entdecken
- ▷ Formalisieren
- ▷ Definieren
- ▷ Beweisen
- ▷ Analysieren
- ▷ Algorithmisieren
- ▷ Problemlösen
- ▷ Mathematisieren

Kapitel 1: Ziele und Inhalte

1.6 Inhalte des Geometrieunterrichts

▶ Raumerfahrung / Raumvorstellung

- ▶ einfache Grundrisszeichnungen, Pläne, Skizzen, Maßstab (z. B. 1:2; 1:10; 1:50; 1:100)

▶ Flächen- / Körperformen

- ▶ Viereck, Dreieck, Kreis, Rechteck, Quadrat; Figuren und Ornamente; Parkettierungen
- ▶ Würfel, Quader, Kugel; Zusammenhang Quader ↔ Quadernetz; räumlich dargestellte Gegenstände
- ▶ Zylinder, Pyramide, Kegel; Dreiecksprisma (zusätzlicher Lerninhalt für leistungsstärkere Schüler)

► Symmetrie

- ▷ Figuren beschreiben und erstellen
- ▷ Achsensymmetrie, einfache Figuren nach Vorschrift drehen bzw. verschieben

► Geometrische Figuren zeichnen

- ▷ Linien und Strecken zeichnen, abmessen; dabei z. B. parallele und senkrechte Geraden zeichnen, rechte Winkel herstellen, Winkel am Zeichendreieck entdecken
- ▷ Zeichnen mit Zeichendreieck und Zirkel (Muster entwerfen, z. B. über Symmetrien nachdenken)

▶ Geometrische Figuren

- ▶ Geraden, Halbgeraden, Strecken, Vielecke, Winkel, Kreise
- ▶ Parallele und orthogonale Geraden
- ▶ Würfel und Quader

▶ Abbildungen/Symmetrie

- ▶ Geradenspiegelungen und Achsensymmetrie
- ▶ Drehungen und Drehsymmetrie
- ▶ Verschiebungen und Streifenornamente
- ▶ Ebenensymmetrie im Raum

▶ Messen

- ▶ Länge von Strecken und Streckenzügen
- ▶ Flächeninhalt von Rechtecken
- ▶ Oberfläche und Volumen von Würfeln und Quadern
- ▶ Winkelgröße eines Winkels



▶ **Figurenlehre**

- ▶ Dreiecke, Schnittpunktsätze
- ▶ Vierecke,
Symmetrieeigenschaften
- ▶ Kreis & Kreistangente
- ▶ Winkelsätze
- ▶ Geometrische Körper,
Lagebeziehungen im Raum

▶ **Kongruenzgeometrie**

- ▶ Kongruente Figuren,
Kongruenzsätze
- ▶ Kongruenzabbildungen

▶ **Messen**

- ▶ Flächeninhalt von
Parallelogramm,
Dreieck, Trapez



▶ Ähnlichkeitsgeometrie

- ▷ Strahlensätze
- ▷ Ähnliche Figuren
- ▷ Zentrische Streckung
- ▷ Ähnlichkeitssätze für Dreiecke
- ▷ Ähnlichkeitsabbildungen

▶ Satzgruppe des Pythagoras

- ▷ Satz des Pythagoras,
Höhensatz & Kathetensätze

▶ Vektorvervielfachung, Skalarprodukt

▶ Messen

- ▷ Flächeninhalt & Umfang des Kreises
- ▷ Oberfläche & Volumen von Zylinder, Pyramide, Kegel & Kugel

▶ Trigonometrie

- ▷ im rechtwinkligen und im beliebigen Dreieck
- ▷ Winkelfunktionen

▶ Vektoren

- ▷ Additive Gruppe der Vektoren