Inhalte

- Prinzip und Satz von Cavalieri
- Grundlagen des Volumenbegriffs (einschließlich Satz von Dehn)
- Volumen der Pyramide und des Pyramidenstumpfs
- Kugelvolumen und Kugeloberfläche

Prinzip von Cavalieri

Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647; Astronom und Mathematiker) war ein Schüler von Galileo Galilei (1564 – 1642).

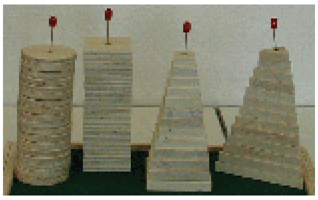
Prinzip von Cavalieri
Zwei Körper sind volumengleich, wenn sie folgende Bedingungen erfüllen:
1. Die Grundflächen sind inhaltsgleich und liegen in derselben Ebene.
2. Die Deckflächen sind inhaltsgleich und liegen in einer Ebene.
3. Jede Parallelebene zur Grundebene schneidet aus beiden Körpern inhaltsgleiche Flächen aus.

Der Satz von Cavalieri:
Zwei Körper gleicher Höhe sind volumengleich, wenn sie in jeweils gleicher Höhe flächengleiche Querschnitte haben.

Zum Beweis dieses Satzes ist die Integralrechnung notwendig, er kann also nicht durchgeführt werden.

$$\forall_{z\in[0;h]}\ A_1(z) = A_2(z) \Rightarrow V_1 = \int_0^h A_1(z)dz = \int_0^h A_2(z)dz = V_2$$

Der Satz kann aber mit Hilfe eines Stapels aus Bierdeckeln plausibel gemacht werden. Man schichtet die Bierdeckel zu einem Quader auf, den man anschließend verformen kann. Der Stapel aus Bierdeckeln veranschaulicht die Zerlegung eines Körpers in (unendlich) dünne Scheiben. Alle so erzeugten Körper sind volumengleich, da die einzelnen Bierdeckel (Scheiben) jeweils kongruent sind.



Grundlagen des Volumenbegriffs

Die theoretischen Grundlagen des Volumenbegriffs sind weitgehend analog zum Flächeninhaltsbegriff. Dem Vieleck in der Ebene entspricht als Körper der Vielflach (Polyeder), z.B. Quader, Prisma und Pyramide. Von elementargeometrischen Zerlegungen spricht man wie bei einer Fläche auch im Raum, wobei sich die Begriffe Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit analog zur ebenen Geometrie definieren lassen.
So wie sich jedes Vieleck in ein zerlegungsgleiches Quadrat umformen lässt, so kann jeder Quader in einen zerlegungsgleichen Würfel umgeformt werden.
Zum Beispiel kann ein gerades Prisma in einen zerlegungsgleichen Quader und damit, durch die Transitivität der Zerlegungsgleichheit, in einen zerlegungsgleichen Würfel umgewandelt werden.

Satz:
Zerlegungsgleiche und ergänzungsgleiche Polyeder haben den gleichen Rauminhalt.

Aber die Umkehrung gilt im Raum **nicht!** Dies besagt der

Satz von Dehn (1901):
Zwei rauminhaltsgleiche Polyeder sind im Allgemeinen weder zerlegungs- noch ergänzungsgleich.

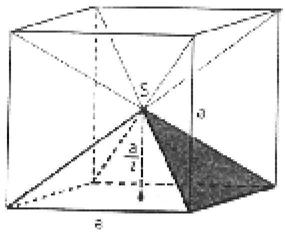
Beispiel: Zu einem Tetraeder gibt es keinen Würfel, zu dem es zerlegungsgleich oder ergänzungsgleich ist.

Es ist also nicht jeder Polyeder in einen zerlegungsgleichen Würfel verwandelbar. Jeder Polyeder ist zwar in Dreieckspyramiden zerlegbar, was der Zerlegbarkeit von Vielecken in Dreiecke entspricht, zu einer Dreieckspyramide gibt es aber nicht immer einen zerlegungsgleichen Würfel!

Volumen der Pyramide

Eine Konsequenz aus obigen Ausführungen ist, dass die so einfach aussehende Volumenformel für Pyramiden, $V = \frac{1}{3}Gh$, nicht elementar hergeleitet werden kann, sondern wie bei Körpern mit gewölbten Begrenzungsflächen (Zylinder, Kegel und Kugel) infinitesimale Methoden zu ihrer Gewinnung angewandt werden müssen.

Exkurs: Hinweise auf die Volumenformel, die keine allgemeine Begründung enthalten!



1. Betrachtung am Spezialfall:
Für einfache Berechnungen an Pyramiden reicht die Betrachtung der regelmäßigen geraden Pyramide. Deren Volumen kann als Spezialfall so bestimmt werden:
Ein Würfel mit Kantenlänge a kann in sechs solcher Pyramiden unterteilt werden, wobei die Würfelseiten die Grundflächen bilden und der Mittelpunkt des Würfels die Spitze einer jeden Pyramide darstellt. Somit sind Grundflächeninhalt $G = a^2$, Höhe $h = \frac{1}{2}a$ und das Volumen $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6}V_{\text{Würfel}}$ der Pyramide bekannt. Es folgt:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6}V_{\text{Würfel}} = \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\cdot a^2 = \frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{1}{2}a = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h.$$

2. Experimentelle Veranschaulichung:
Diese Methode ist experimenteller Natur und kann an die erste anschließen. Sie bietet außerdem die Möglichkeit für die Einbindung der Schüler zur Versuchsdurchführung.
Man benötigt ein Modell aus Plexiglas, bei dem in einen Quader eine vierseitige Pyramide eingelassen ist, und das mit Wasser gefüllt werden kann und einen geeignet großen Messbecher. Die Grundfläche G und die Höhe h von beiden sind identisch. Die Spitze der Pyramide ist der Mittelpunkt der Deckfläche des Quaders.
Das Volumen des Quaders ist $V_{\text{Quader}} = G\cdot h$.
Das Volumen der Pyramide ist $V_{\text{Pyramide}} = k\cdot V_{\text{Quader}} = k\cdot(G\cdot h)$.
Zunächst soll anhand des Modells der Faktor k geschätzt werden, wobei Werte zwischen $k = \frac{1}{4}$ und $k = \frac{1}{2}$ zu erwarten sind.
Anschließend wird die Pyramide mit Wasser gefüllt und in den Quader umgegossen. Wie viele Wasserfüllungen der Pyramide passen in den Quader?
Ergebnis: $V_{\text{Pyramide}} \approx \frac{1}{3}\cdot V_{\text{Quader}} = \frac{1}{3}G\cdot h$

Nachweis der Gültigkeit der Volumenformel mit dem Satz von Cavalieri:

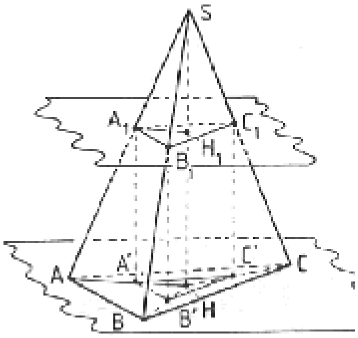
Die Tatsache, dass für alle Pyramiden die gleiche Volumenformel $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} G \cdot h$ gilt, lässt sich mit dem Satz von Cavalieri in folgenden Schritten nachweisen:

1. Nachweis: Alle dreiseitigen Pyramiden mit gleicher Grundfläche G und gleicher Höhe h besitzen dasselbe Volumen.
2. Nachweis der Pyramidenformel für besondere dreiseitige Pyramiden.
3. Nachweis der Gültigkeit der Formel bei beliebiger Eckenzahl der Grundfläche.

1. Nachweis: Alle dreiseitigen Pyramiden mit gleicher Grundfläche G und gleicher Höhe h besitzen dasselbe Volumen:

Exkurs: Zentrische Streckung im Raum

Eine dreiseitige Pyramide ABCS der Höhe h wird von einer Ebene geschnitten, die parallel zur Grundfläche der Pyramide ist. Die Schnittfläche bildet das Dreieck $\Delta A_1B_1C_1$. Die Schnittebene hat den Abstand x von der Spitze. Betrachtet man nun die einzelnen Seitenflächen, so kann man eine zentrische Streckung anwenden, da Grund- und Schnittebene parallel sind, und daher auch die jeweiligen Seiten von Grund- und Schnittdreieck. Streckungszentrum ist die Spitze S.



So lässt sich zeigen:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{AC}} = \frac{x}{h} =: k \text{ (Streckungsfaktor)}$$

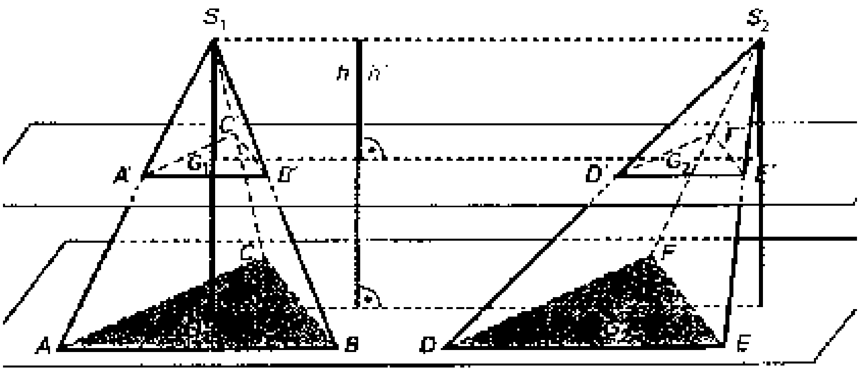
Analog folgt auch für die Höhen h_G und h_{G_1} der Dreiecke ΔABC und $\Delta A_1B_1C_1$:

$$\frac{h_{G_1}}{h_G} = k$$

Damit folgt für die Flächeninhalte der Dreiecke ΔABC und $\Delta A_1B_1C_1$:

$$\frac{A_{\Delta A_1B_1C_1}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2} g_{G_1} h_{G_1}}{\frac{1}{2} g_G h_G} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{A_1B_1} \cdot h_{G_1}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_G} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(k \cdot \overline{AB}\right) \cdot \left(k \cdot h_G\right)}{\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_G} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_G}{\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_G} \cdot k^2 = k^2$$

Anmerkung: Es ist auch möglich das Schnittdreieck in die Grundfläche zu projizieren. Streckungszentrum ist dann der Höhenfußpunkt H. („Normale" zentrische Streckung in der Ebene!)



Es werden zwei Pyramiden mit inhaltsgleicher Grundfläche und gleicher Höhe betrachtet. Nach Cavalieri sind sie volumengleich, wenn jede Parallelebene zur Grundfläche aus beiden Körpern inhaltsgleiche Flächen ausschneidet. Wir betrachten zwei Dreiecke $\Delta A'B'C'$ und $\Delta D'E'F'$ die als Schnittfiguren einer zur gemeinsamen „Grundebene" parallelen Ebene mit den Pyramiden entstehen. Der Abstand der Pyramidenspitzen S_1 und S_2 zu dieser Ebene ist jeweils h'.

S_1 und S_2 können als Zentren räumlicher zentrischer Streckungen aufgefasst werden, die ΔABC auf $\Delta A'B'C'$ bzw. ΔDEF auf $\Delta D'E'F'$ abbilden.

Für beide Streckungen gilt: $\dfrac{\text{Bildfläche}}{\text{Urfläche}} = \left(\dfrac{h'}{h}\right)^2 = k^2$

Daraus folgt für die Inhalte der Flächen G_1, G_2, G_1' und G_2':

$$G_1' = k^2 \cdot G_1 \overset{G_1=G_2 \text{ nach Vor.}}{=} k^2 \cdot G_2 = G_2'$$

Damit ist die 3. Bedingung des Prinzips von Cavalieri erfüllt.
Es folgt:

> Alle (dreiseitigen) Pyramiden mit inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind volumengleich. (*)

2. Nachweis der Pyramidenformel für besondere dreiseitige Pyramiden:
Man zerlegt ein dreiseitiges Prisma mit dem Grundflächeninhalt A_G und der Höhe h wie im Bild dargestellt in drei Pyramiden P_I, P_{II} und P_{III}.

Vergleich der Pyramiden P_I, P_{II} und P_{III}:

- $G_I = A_{\Delta PQR} \overset{\text{Grund- und Deckfläche des Prismas}}{=} A_{\Delta P'Q'R'} = G_{II}$

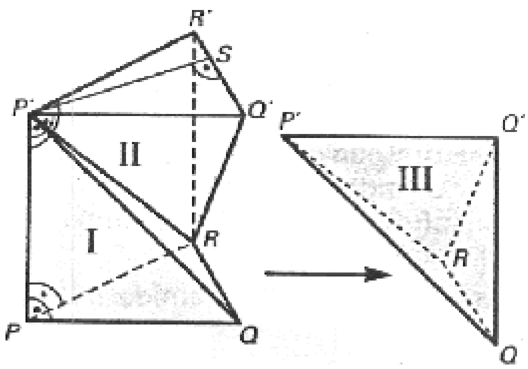
  $h_I = \overline{PP'} = h_{Prisma} = \overline{RR'} = h_{II}$

  $\overset{(*)}{\Rightarrow} V_I = V_{II}$

- $G_{II'} = A_{\Delta RQ'R'} \overset{\text{Hälfte eines Rechtecks}}{=} A_{\Delta RQQ'} = G_{III}$

  $h_{II} = \overline{SP'} = h_{III}$
  (Gleiche Grundflächenebene und gleiche Spitze!)

  $\overset{(*)}{\Rightarrow} V_{II} = V_{III}$

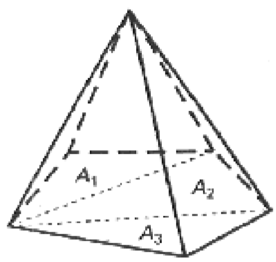


$\Rightarrow V_I = V_{II} = V_{III} =: V_{Pyramide}$

$\Rightarrow V_{Prisma} = 3 \cdot V_{Pyramide}$

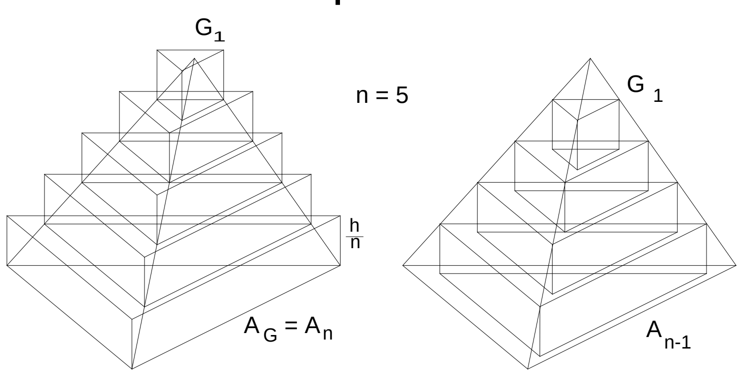
$\Rightarrow V_{Pyramide} = \frac{1}{3} V_{Prisma} = \frac{1}{3} A_G h$

3. Nachweis der Gültigkeit der Formel bei beliebiger Eckenzahl der Grundfläche:
Jede n-seitige Pyramide lässt sich in n-2 dreiseitige Pyramiden gleicher Höhen zerlegen. Daher folgt:



$$V_{Pyramide} = \tfrac{1}{3} A_1 \cdot h + \tfrac{1}{3} A_2 \cdot h + \ldots + \tfrac{1}{3} A_{n-2} \cdot h = \tfrac{1}{3}\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-2}\right) \cdot h = \tfrac{1}{3} G \cdot h$$

Nachweis der Gültigkeit der Volumenformel mit Stufenkörpern:
Man verwendet dazu umbeschriebene und einbeschriebene Treppenkörper aus Prismen.
Die Grundflächen der Treppenkörper sind ähnlich zur Grundfläche der Pyramide. Für ihren Flächeninhalt ergibt sich mit dem Strahlensatz für k = 1, 2, ..., n:



$$\frac{A_k}{A_G} = \left(\frac{\frac{k \cdot h}{n}}{h}\right)^2 = \frac{k^2}{n^2}$$

Umbeschriebener Treppenkörper:

$$V_u = \sum_{k=1}^{n} V_{Prisma_k} = \sum_{k=1}^{n}\left(A_k \cdot \frac{h}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n^2} A_G \cdot \frac{h}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n^2} A_G \cdot \frac{h}{n}\right) = \frac{A_G \cdot h}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Einbeschriebener Treppenkörper (Eine, die unterste Stufe fehlt gerade!):

$$V_e = \sum_{k=1}^{n-1} V_{Prisma_k} = \frac{A_G \cdot h}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

Es ist $V_e < V_{Pyramide} < V_u$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(V_u - V_e) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{A_G \cdot h}{n^3}\cdot n^2\right) = A_G \cdot h \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Daraus folgt, dass sich das Volumen der Pyramide berechnen lässt durch:

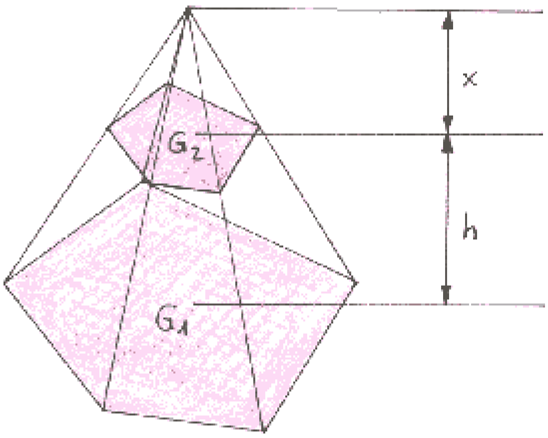
$$V_{Pyramide} = \lim_{n\to\infty} V_u = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{A_G \cdot h}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{A_G \cdot h}{n^3}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{A_G \cdot h}{6}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{A_G \cdot h}{6}\cdot 2 = \tfrac{1}{3} A_G \cdot h$$

Volumen des Pyramidenstumpfs

Es wird nur die Herleitung der Formel gebracht, aber keine Unterrichtseinheit.

$$\begin{aligned} V_{Pyramidenstumpf} &= V_{Pyramide_{groß}} - V_{Pyramide_{klein}} \\ &= \tfrac{1}{3} G_1 (h+x) - \tfrac{1}{3} G_2 x \\ &= \tfrac{1}{3}\cdot\left[G_1 h + G_1 x - G_2 x\right] \\ &= \tfrac{1}{3}\cdot\left[G_1 h + (G_1 - G_2)\cdot x\right] \quad (*) \end{aligned}$$



Aufgrund der räumlichen, zentrischen Streckung (siehe oben) gilt außerdem:

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{x^2}{(h+x)^2}$$

$$\frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1}} = \frac{x}{h+x}$$

$$h\cdot\sqrt{G_2} + x\cdot\sqrt{G_2} = x\cdot\sqrt{G_1}$$

$$h\cdot\sqrt{G_2} = x\cdot\left(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{h\cdot\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}} = \frac{h\cdot\sqrt{G_2}\cdot\left(\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2}\right)}{\left(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}\right)\cdot\left(\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2}\right)} = \frac{h\cdot\left(\sqrt{G_1 G_2} + G_2\right)}{G_1 - G_2}$$

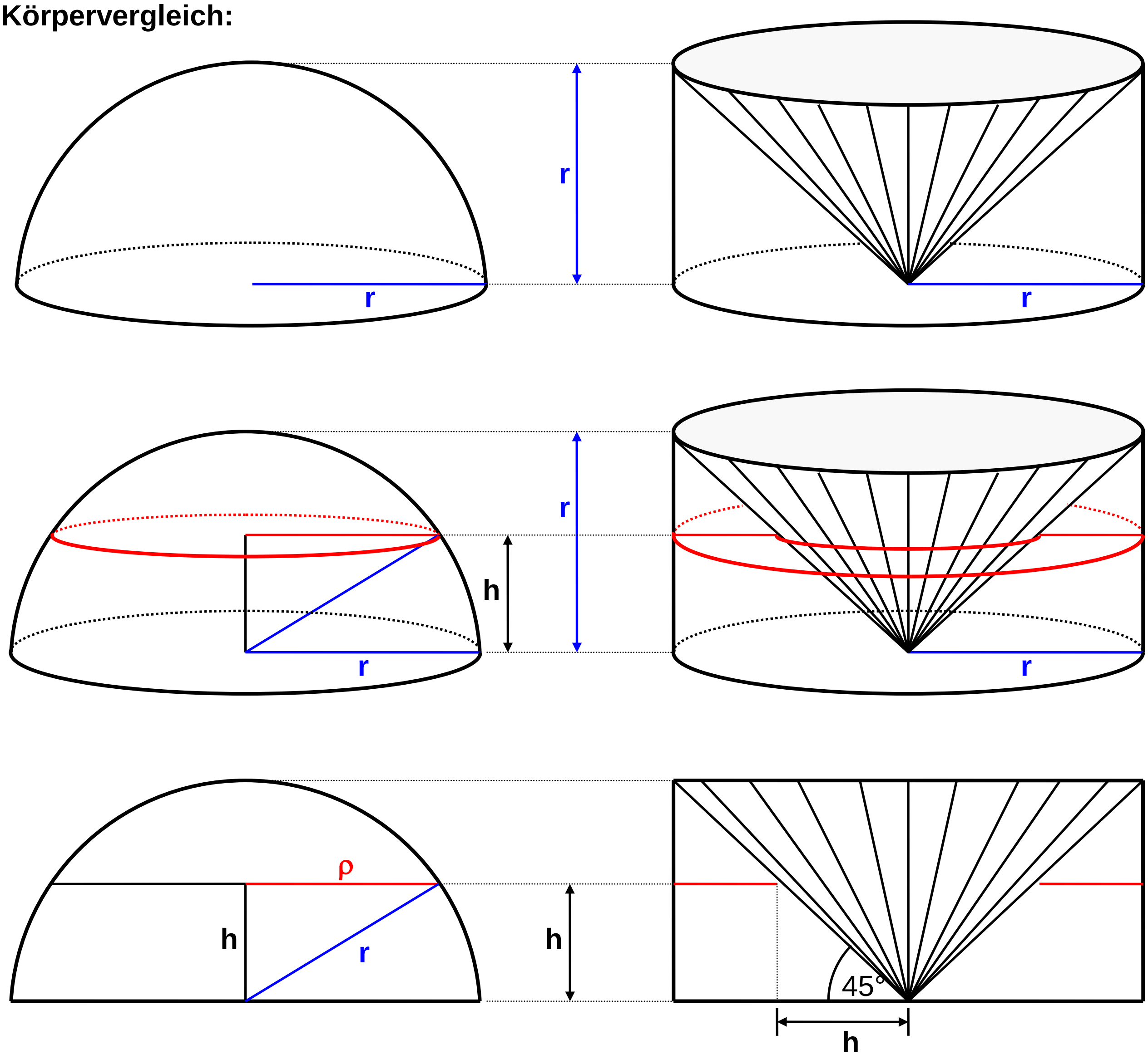
Einsetzen in (*) liefert:

$$\begin{aligned} V_{Pyramidenstumpf} &= \tfrac{1}{3}\cdot\left[G_1 h + (G_1 - G_2)\cdot x\right] \\ &= \tfrac{1}{3}\cdot\left[G_1 h + (G_1 - G_2)\cdot\frac{h\cdot\left(\sqrt{G_1 G_2} + G_2\right)}{G_1 - G_2}\right] \\ &= \tfrac{1}{3}\cdot\left[G_1 h + h\cdot\left(\sqrt{G_1 G_2} + G_2\right)\right] \\ &= \tfrac{1}{3}\cdot\left(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2\right)\cdot h \end{aligned}$$

Das Kugelvolumen

Prinzip von Cavalieri:
Stehen zwei Körper auf derselben Ebene E und erzeugt jede zu E parallele Ebene bei beiden Körpern gleich große Schnittflächen, dann haben beide Körper dasselbe Volumen.

Körpervergleich:



Es muss noch gezeigt werden, dass die Schnittflächen in der Höhe h in beiden Körpern gleich groß sind.

$A_{Schnittfläche} = \rho^2 \cdot \pi = \left(r^2 - h^2\right) \cdot \pi$

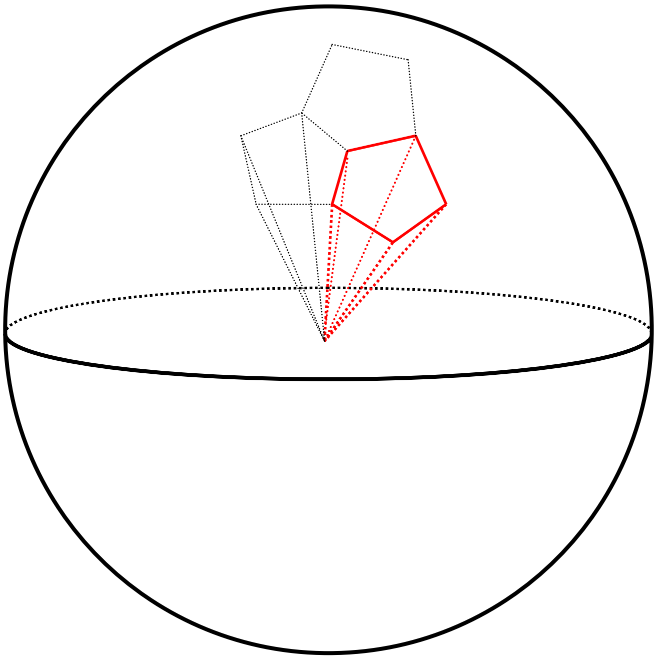
$A_{Schnittfläche} = r^2 \cdot \pi - h^2 \cdot \pi = \left(r^2 - h^2\right) \cdot \pi$

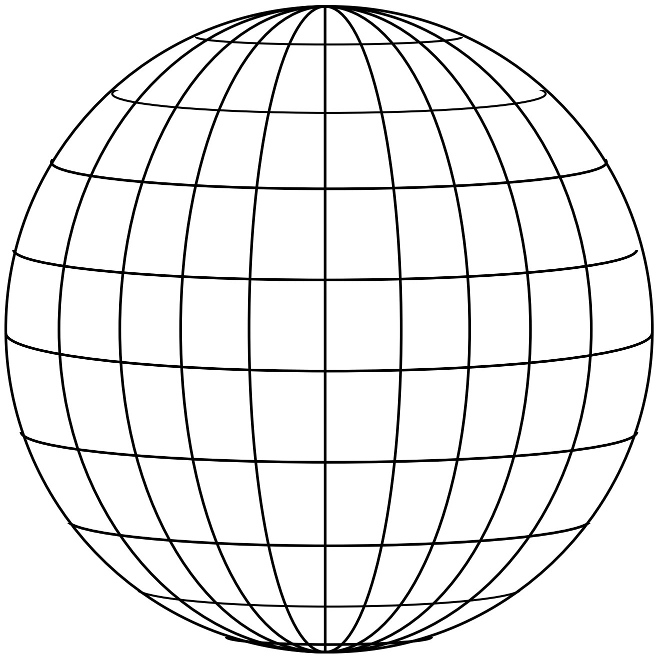
Nach dem Prinzip von Cavalieri gilt also:

$$V_{Halbkugel} = V_{Zylinder} - V_{Kegel} = G \cdot r - \frac{1}{3} \cdot G \cdot r = \frac{2}{3} \cdot G \cdot r = \frac{2}{3} \cdot r^2 \pi \cdot r = \frac{2}{3} \cdot r^3 \pi$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{Kugel} = \frac{4}{3} r^3 \pi}$$

Die Kugeloberfläche





Die Kugeloberfläche wird in n kleine Flächenstücke A_i zerlegt. Verbindet man alle Eckpunkte mit der Kugelmitte, so entstehen Pyramiden mit der Höhe r. Die Summe der Grundflächen G_i der Pyramiden bildet gerade die Kugeloberfläche, und die Summe ihrer Rauminhalte das Kugelvolumen. Es gilt also:

$$V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} G_1 r + \frac{1}{3} G_2 r + \frac{1}{3} G_3 r + \ldots + \frac{1}{3} G_n r = \frac{4}{3} r^3 \pi \quad \Big| \cdot \frac{3}{r}$$

$$\underbrace{G_1 + G_2 + G_3 + \ldots + G_n}_{O_{Kugel}} = 4r^2 \pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{O_{Kugel} = 4r^2 \pi}$$