

Jürgen Roth

# Didaktik der Analysis

## Modul 12a: Fachdidaktische Bereiche



## Didaktik der Analysis

- 0 Organisatorisches
- 1 Ziele und Inhalte
- 2 Folgen und Vollständigkeit in  $\mathbb{R}$
- 3 Ableitungsbegriff
- 4 Integralbegriff



Danckwerts & Vogel (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akad. Verlag, S. 17-44  
Büchter, A.; Henn, H.-W. (2010): Elementare Analysis. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Didaktik der Analysis

# Kapitel 2: Folgen und Vollständigkeit in $\mathbb{R}$



Danckwerts, Vogel (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag. S. 35-38

## Beschreibung iterativer Prozesse

Beispiele:

- Diskrete Modellierung
- Heron-Verfahren

Ist  $0,\bar{9} = 1$  ?

Komplementarität  
von Produkt- und  
Prozessorientierung

(Vgl. das Skript „Didaktik der  
Zahlbereichserweiterungen“,  
Kapitel 5: Reelle Zahlen  $\mathbb{R}$ )

## Folgen und Konvergenz

Intervallschachtel-  
ungssatz &  
Archimedisches  
Axiom

**Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$**   
Grundvorstellung:  
Lückenlosigkeit der  
Zahlengeraden

operative  
Fassung

## Berechnungs- & Beweisinstrument

Beispiele:

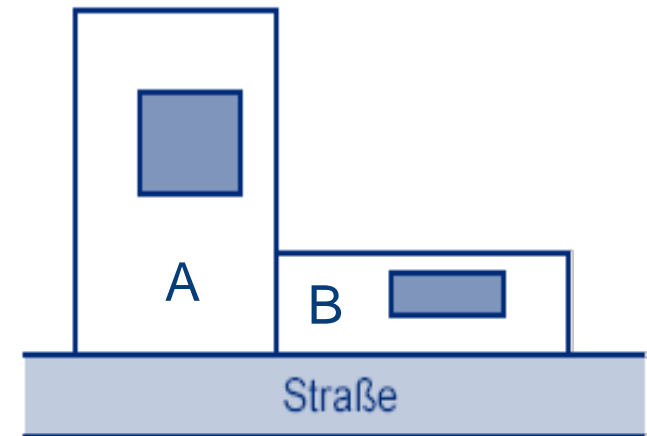
- Approximation von  $\sqrt{2}$
- Beweise: Zwischenwertsatz  
Monotoniekriterium

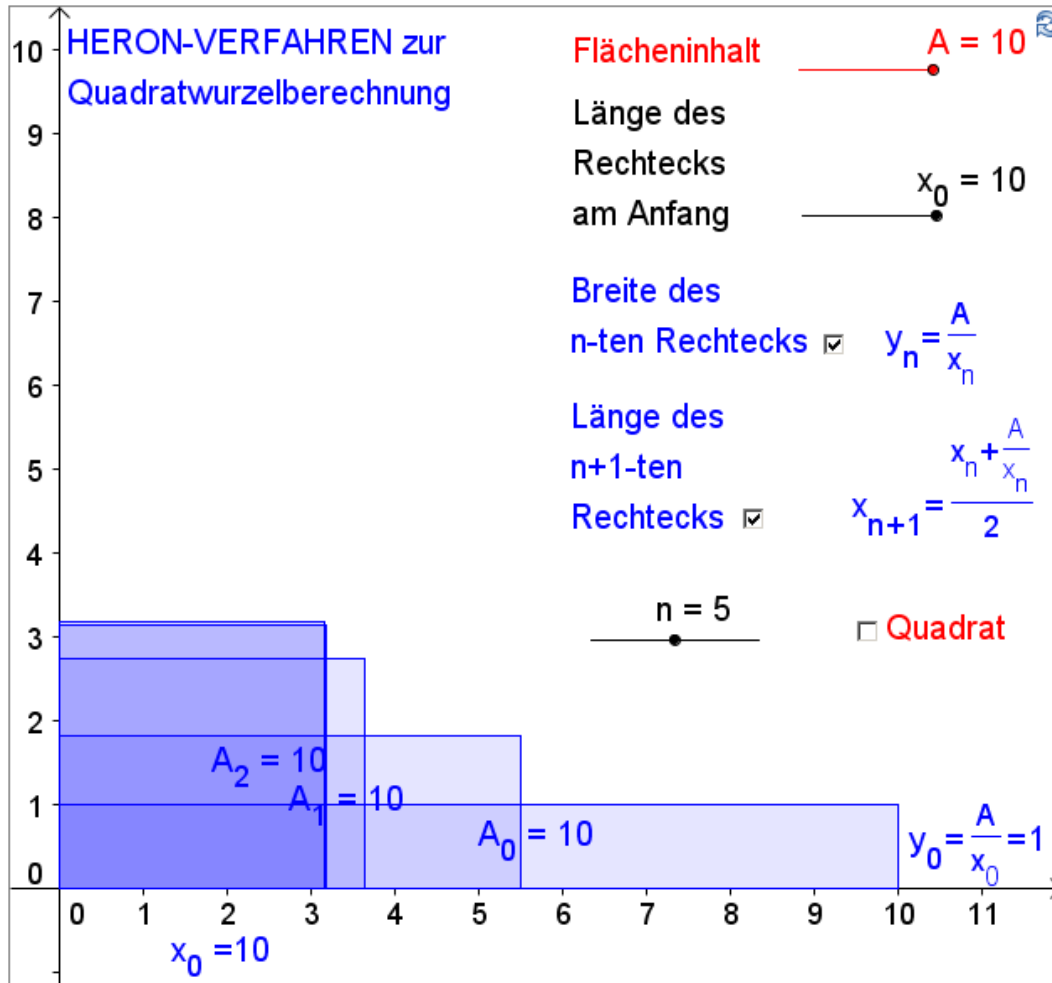
## ► Berechnungsgrundlage für Straßenreinigungsgebühren:

- ▷ An die Straße grenzende Grundstückslänge (**Frontmetermaßstab**).
- ▷ Der Eigentümer von Grundstück B muss mehr bezahlen als der von Grundstück A, obwohl Grundstück A größer ist.
- ▷ Gemeinderat: Für ein größeres Grundstück mehr zahlen.

## ► Lösung: Quadratwurzelmaßstab als Bemessungsgrundlage

- ▷ Straßenreinigungsgebühren werden aus der Seitenlänge eines zum Grundstück flächeninhaltsgleichen Quadrats berechnet.
- ▷ **Frage:** Wie findet man die Seitenlänge dieses Quadrats?





	A	B	C
1	n	$x_n$	$y_n = A/x_n$
2	0	10	1
3	1	5.5	1.8181818182
4	2	3.6590909091	2.7329192547
5	3	3.1960050819	3.1289061637
6	4	3.1624556228	3.1620997075
7	5	3.1622776652	3.1622776552
8	6	3.1622776602	3.1622776602
9	7	3.1622776602	3.1622776602
10	8	3.1622776602	3.1622776602
11	9	3.1622776602	3.1622776602
12	10	3.1622776602	3.1622776602
13			
14			
15			



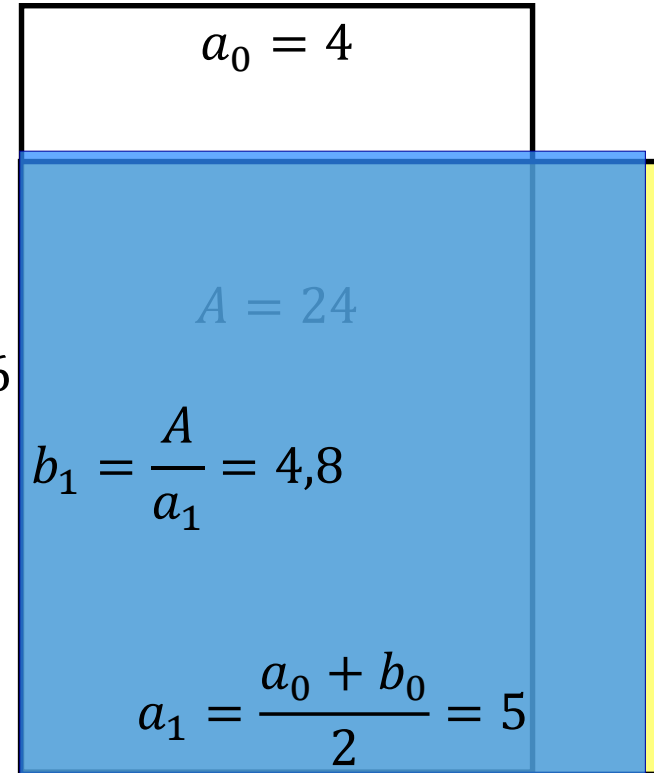
Gesucht:  $\sqrt{A}$

Anfangswert:  $a_0$

$$b_n = \frac{A}{a_n}$$

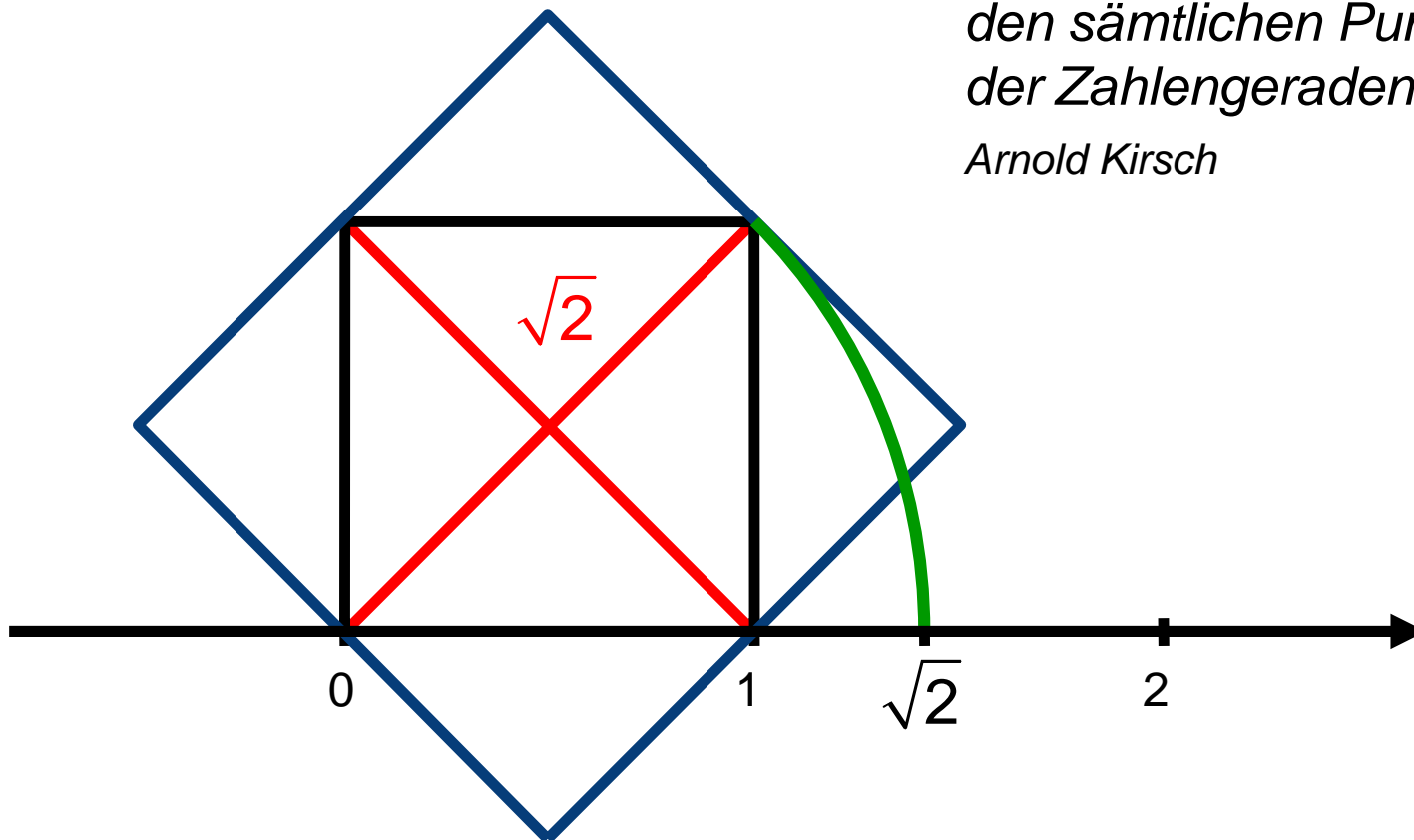
$$b_0 = \frac{A}{a_0} = \frac{24}{4} = 6$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{a_n + \frac{A}{a_n}}{2}$$



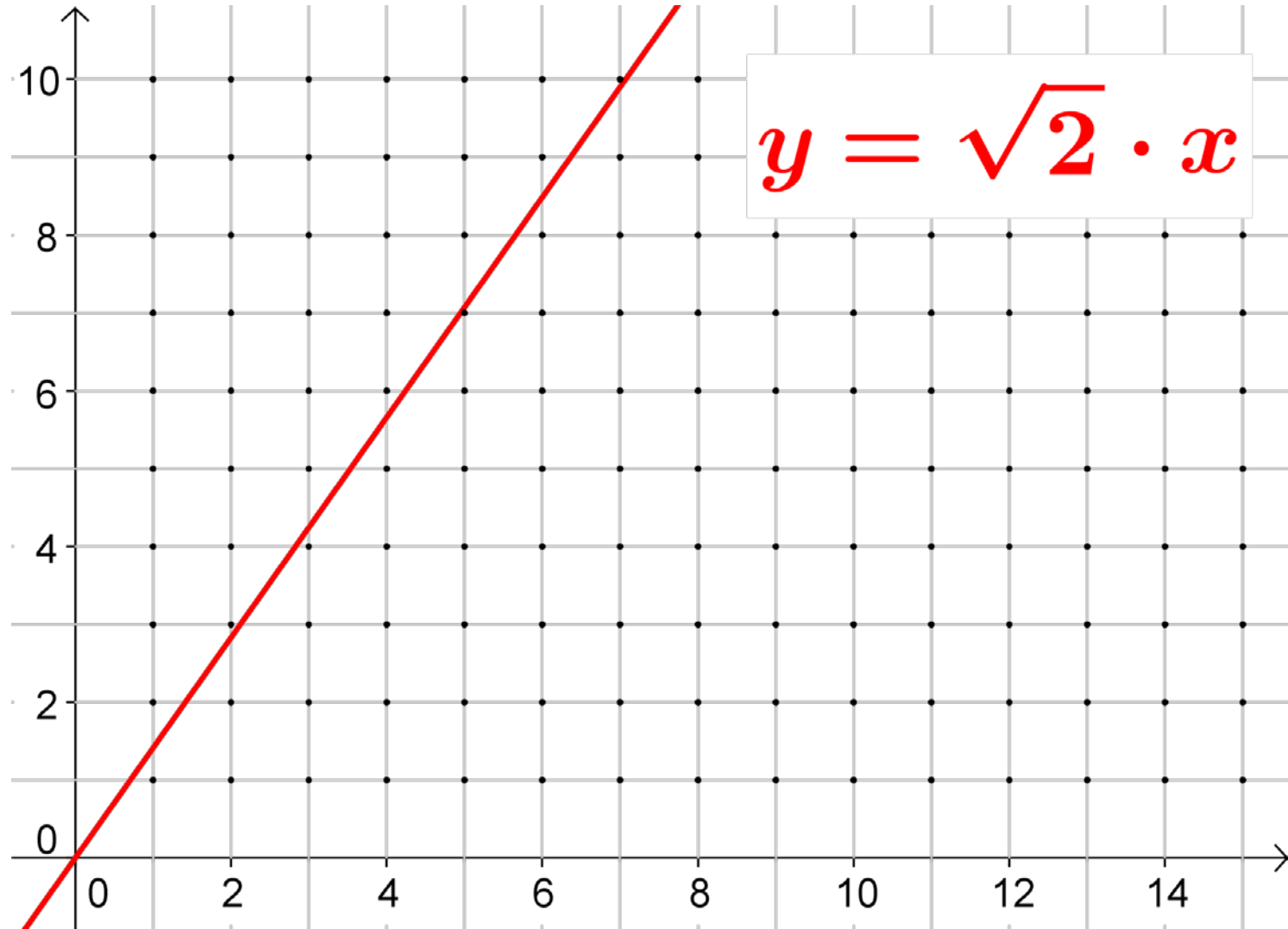
Heron-Verfahren			
Berechnung der Seitenlänge eines Quadrates der Fläche A bzw. Berechnung der Quadratwurzel von A (Näherungsverfahren!)			
Fläche A		Wurzel aus A	
66,00		8,1240384046	
n	a	b = A / a	a - b
1	3,00	22,0000000000	19,0000000000
2	12,5000000000	5,2800000000	7,2200000000
3	8,8900000000	7,4240719910	1,4659280090
4	8,1570359955	8,0911742987	0,0658616968
5	8,1241051471	8,1239716627	0,0001334843
6	8,1240384049	8,1240384044	0,0000000005
7	8,1240384046	8,1240384046	0,0000000000

Schnell konvergierende  
Intervallschachtelung.



*Die reellen Zahlen  
entsprechen eineindeutig  
den sämtlichen Punkten  
der Zahlengeraden.  
Arnold Kirsch*





## Definition

Eine reelle Zahl  $x$  heißt

- ▷ **rational**, wenn sie sich in der Form  $x = \frac{m}{n}$  mit  $m \in \mathbb{Z}$  und  $n \in \mathbb{N}$  schreiben lässt,
- ▷ andernfalls **irrational**.

## Satz

- ▷ Es gibt keine rationale Zahl  $x$  mit  $x^2 = 2$ .

## Beweis (Widerspruchsbeweis)

„Wenn  $x^2 = 2$  ist, dann gilt für alle Lösungen  $x$  dieser Gleichung  $x \notin \mathbb{Q}$ .“

Annahme:  $p(x) \wedge \neg q(x)$

⇒ Es gibt o. B. d. A. einen Bruch  $\frac{m}{n}$  mit  $m, n \in \mathbb{N}$  für den gilt:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

$$\Rightarrow m^2 = 2n^2$$

$$\Rightarrow m \cdot m = 2 \cdot n \cdot n$$

In der Primfaktorzerlegung von  $m \cdot m$  tritt die Zahl 2 in einer geraden Anzahl auf, in der von  $2 \cdot n \cdot n$  tritt die Zahl 2 dagegen in einer ungeraden Anzahl auf.

❗ **Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung!**

⇒ Es kann keine rationale Zahl  $x$  mit  $x^2 = 2$  geben. ■

## ► Beweis

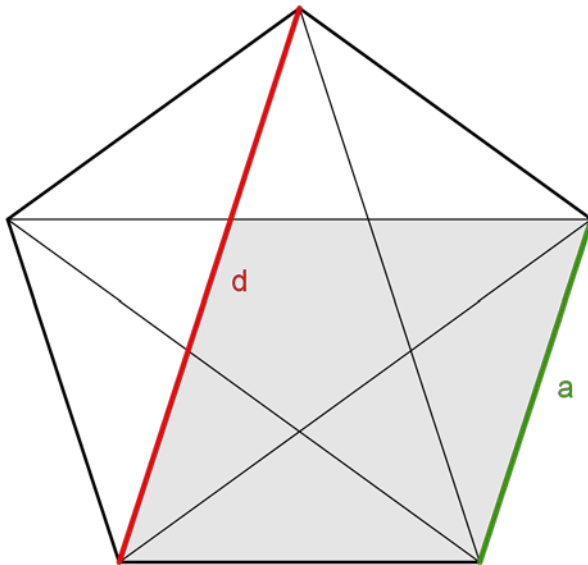
- ▷ Annahme: Es gibt natürliche Zahlen mit mehreren unterschiedlichen Zerlegungen.
- ▷ Dann gibt es darunter eine kleinste Zahl  $n$ .
- ▷  $n$  kann keine Primzahl sein (Warum?).
- ▷ Zwei Zerlegungen von  $n$  können keinen gemeinsamen Primfaktor  $p$  enthalten, da dann auch  $\frac{n}{p}$  zwei verschiedene Zerlegungen hätte und kleiner als  $n$  wäre.

💣 **Widerspruch zu  $n$  ist minimal.**

- ▷ Es gilt also:
 
$$n = p \cdot a = q \cdot b$$
 mit  $p, q \in \mathbb{P} \wedge p \neq q \wedge a \neq b$
- ▷ Das letzte Argument ist das Lemma von Euklid: Teilt eine Primzahl ein Produkt, so auch mindestens einen der Faktoren.  $p|(a \cdot b) \Rightarrow p|a \vee p|b$ .
- ▷ Da  $n$  durch  $p$  teilbar ist, muss einer der Faktoren der anderen Zerlegung durch  $p$  teilbar sein und das ist  $b$ , denn  $q$  ist prim.
- ▷ Also taucht ein beliebiger Primfaktor stets in beiden Zerlegungen auf und damit sind sie identisch. #

## ► Pentagon

- ▷ Es gibt kein gemeinsames Maß für die Diagonale  $d$  und die Seite  $a$  des regelmäßigen Fünfecks.



$$d = 1 \cdot a + d_1$$

$$d = 1 \cdot a + d_1$$

$$a = 1 \cdot d_1 + a_1$$

Im zweiten Fünfeck:

$$d_1 = 1 \cdot a_1 + d_2$$

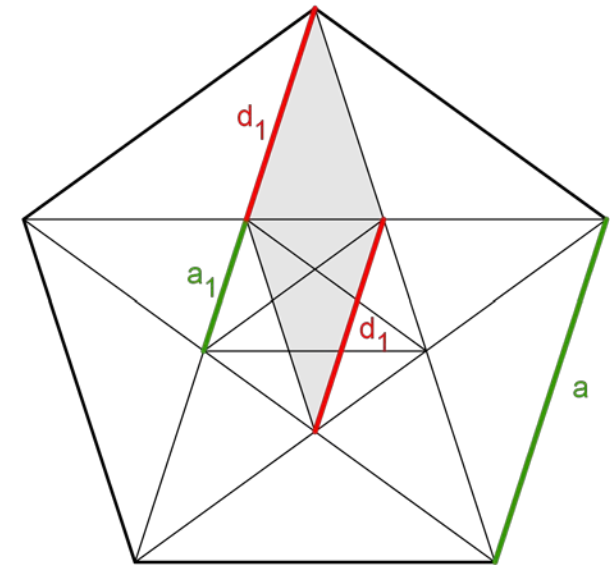
$$a_1 = 1 \cdot d_2 + a_2$$

Im dritten Fünfeck:

$$d_2 = 1 \cdot a_2 + d_3$$

$$a_2 = 1 \cdot d_3 + a_3$$

...



$$a = 1 \cdot d_1 + a_1$$

- ▷ Wäre  $e$  ein gemeinsames Maß von  $d$  und  $a$ , dann auch für jedes Paar  $(d_n, a_n)$ . Die Längen nehmen aber bei jedem Schritt um mehr als die Hälfte ab und werden damit sicher kleiner als jedes  $e$ .



► **Definition**

- ▷ Eine **Folge** ist eine Funktion, die jedem Element der Menge der natürlichen Zahlen genau ein Element der Menge der reellen Zahlen zuordnet.

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n$$

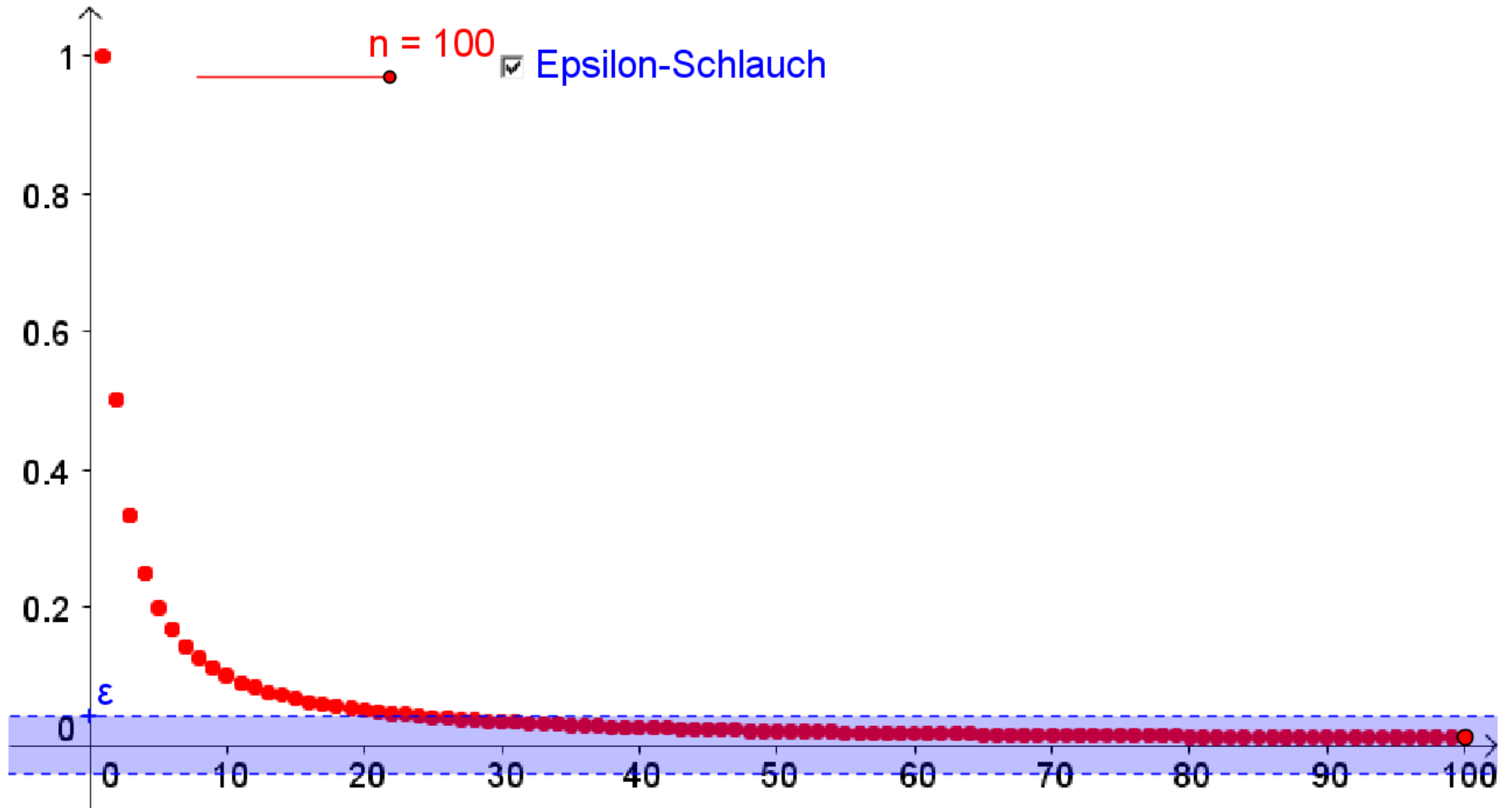
► **Definition**

- ▷ Eine **Folge**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **konvergent** gegen  $a$ , wenn es zu jeder Toleranz  $\varepsilon > 0$  eine Nummer  $n_0$  gibt, so dass für alle  $n \geq n_0$  gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

- ▷  $a$  heißt dann **Grenzwert** der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und man schreibt:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$



► **Konvergenz der Folge**  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

## Sprechweisen

- (1) „ $\frac{1}{n}$  kommt mit wachsendem  $n$  der 0 beliebig nahe.“
- (2) „ $\frac{1}{n}$  strebt gegen 0 für  $n$  gegen  $\infty$ .“
- (3) „ $\frac{1}{n}$  kommt mit wachsendem  $n$  der 0 immer näher.“
- (4) „ $\frac{1}{n}$  kommt der 0 immer näher ohne sie jemals zu erreichen.“

► **Verbale Vereinfachung**  
↔ **Verfälschung**

## Welche davon sind geeignet?

- (1) Ohne Einschränkung geeignet.
- (2) Ohne Einschränkung geeignet.
- (3) Problematisch!  $\frac{1}{n}$  kommt auch der  $-1$  immer näher, aber nicht *beliebig nahe* (vgl. (1))!
- (4) Grenze zur inhaltlichen Verfälschung deutlich überschritten! Auch konstante Folgen sind konvergent!

## ▶ Intervallschachtelungssatz

Zu jeder Intervallschachtelung

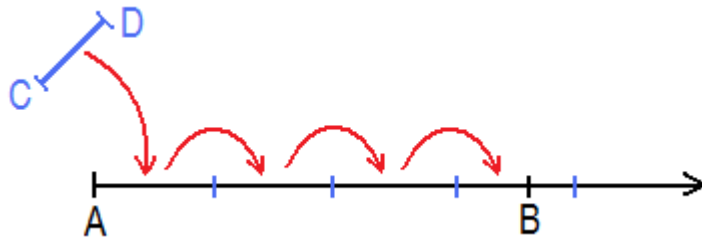
$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$$

(wobei  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  und die Intervalllänge  $b_n - a_n$  beliebig klein wird)

gibt es ein  $x \in \mathbb{R}$ , das in allen Intervallen enthalten ist. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt also:  $a_n \leq x \leq b_n$

## ▶ Archimedisches Axiom

Zu je zwei Größen  $y > x > 0$  existiert eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \cdot x > y$ .



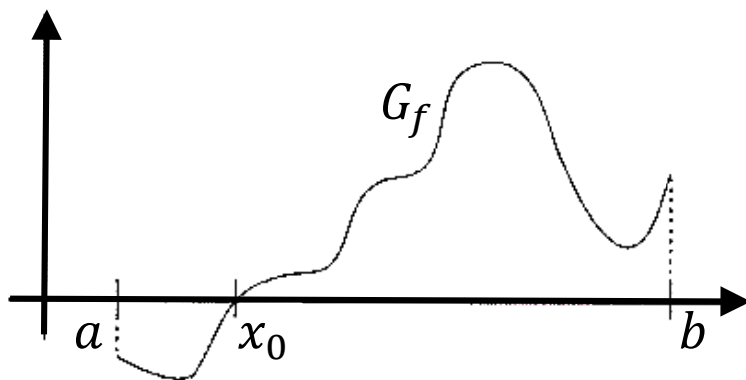
## ▶ Bemerkungen

- ▶ Die Eigenschaft, dass keine Intervallschachtelung auf der Zahlengeraden ins Leere trifft, präzisiert die Vorstellung von der Lückenlosigkeit.
- ▶ Die Intervallschachtelung greift auf die Folgen der Intervallgrenzen zurück und wird zum Werkzeug zur näherungsweisen Berechnung „neuer“ reeller Zahlen.
- ▶ Wird bereits in der Sek. I zu Umfangs, Flächeninhalts- und Volumenberechnung genutzt.



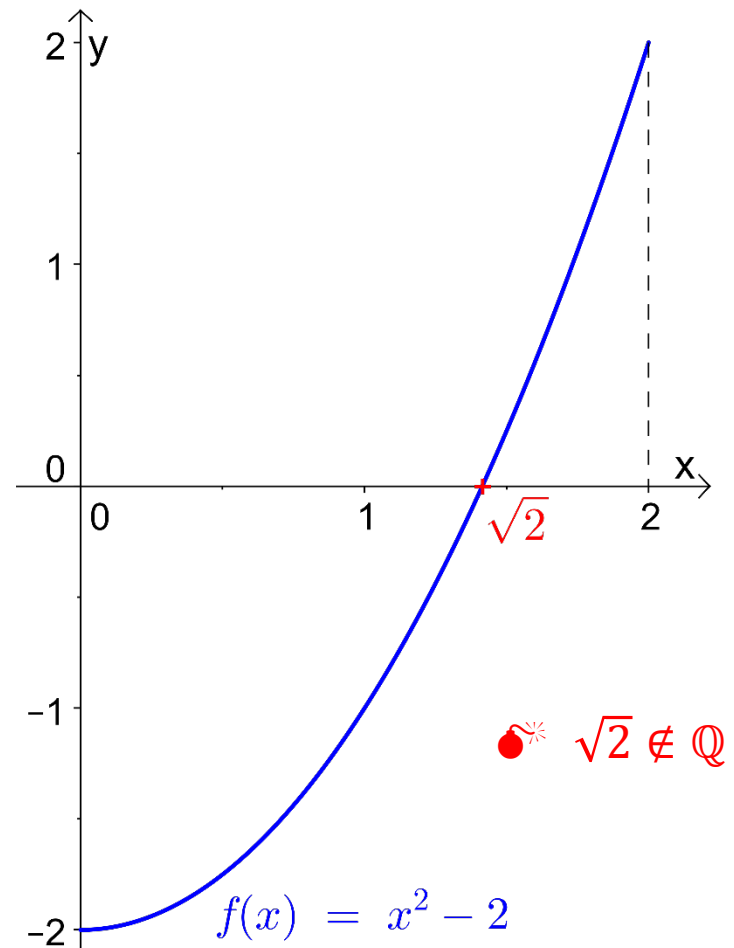
## ► Zwischenwertsatz

- ▷ Wechselt eine in einem Intervall stetige Funktion ihr Vorzeichen, dann hat sie dort mindestens eine Nullstelle.
- ▷ Ist  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f(a) < 0 < f(b)$  oder  $f(a) > 0 > f(b)$  dann gibt es mindestens ein  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = 0$ .



## ► Beispiel: $I = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 2\}$

- ▷  $f: [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 2$

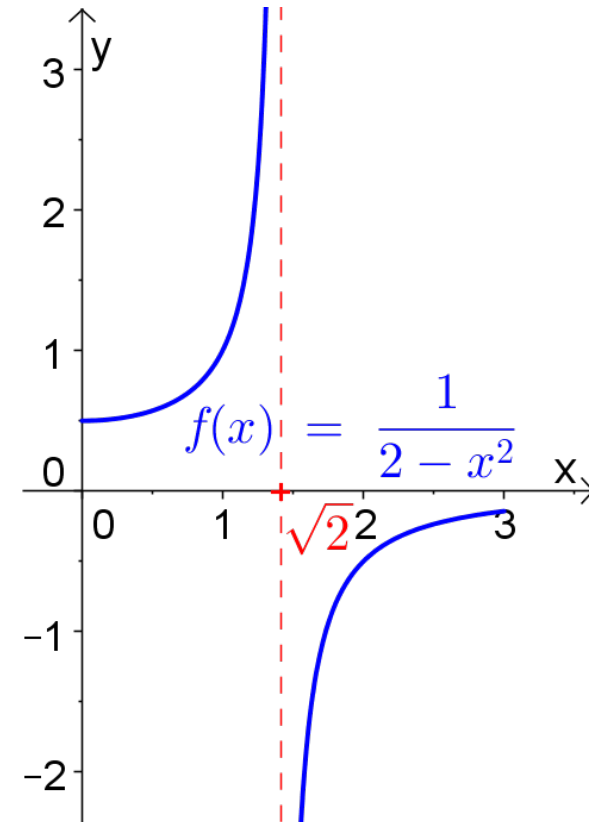


## ► Monotoniekriterium

- ▷ Eine auf einem Intervall differenzierbare Funktion mit überall positiver Ableitung ist dort streng monoton wachsend.
- ▷ Ist  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in [a, b]$ , dann folgt für alle  $x_1, x_2 \in [a, b]$  mit  $x_1 < x_2$ , dass gilt:  
$$f(x_1) < f(x_2)$$

## ► Beispiel: $I = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 3\}$

- ▷  $f: I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2-x^2}$
- ▷  $f'(x) = \frac{2x}{(2-x^2)^2} > 0$



●\* **Strenge  
Monotonie  
verletzt!**