

# Didaktik der Algebra

## Didaktik der Algebra

- 1 Ziele und Inhalte
- 2 Terme
- 3 Funktionen
- 4 **Gleichungen**

Didaktik der Algebra

# Kapitel 4: Gleichungen

## Kapitel 4: Gleichungen

- 4.1 Aspekte beim Umgang mit Gleichungen
- 4.2 Methoden zur Lösung von Gleichungen
- 4.3 Lineare Gleichungssysteme
- 4.4 Gleichungen in der Sekundarstufe I



Didaktik der Algebra – Kapitel 4: Gleichungen

# 4.1 Aspekte beim Umgang mit Gleichungen

## ▶ Gleichungen als Werkzeug

- ▶ zum Formulieren von Beziehungen zwischen mathematischen Objekten (z. B. Zahlen, Größen und Funktionen),
- ▶ zum Ausdrücken von Eigenschaften (Formeln zwischen Zahlen oder Größen),
- ▶ zum Formulieren von Problemen.
- ▶ Beim Lösen dieser Probleme geht es um die Frage der Existenz und um die Bestimmung von Lösungen.

$$2 + 3 = 5$$
$$5 \text{ kg} + 2 \text{ kg} = 7 \text{ kg}$$
$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$$

## ▶ Gleichungen als Objekte

- ▶ Untersuchung von Gleichungstypen:  
Existenz & Bestimmung von Lösungen
- ▶ Logik:
  - Gleichungen ohne Variable  $\Rightarrow$  Aussagen
  - Gleichungen mit Variablen  $\Rightarrow$  Aussageformen.

▶ **Im Unterricht werden Begriffe benötigt, um**

- ▶ über Gleichungen reden,
- ▶ Regeln formulieren und
- ▶ Ergebnisse interpretieren zu können.

▶ **Beschreibung von Gleichungen:**

- ▶ Variable
- ▶ Term
- ▶ Gleichung
- ▶ Aussage
  - ▶ Formulierung, die entweder wahr oder falsch ist.
- ▶ Aussageform
  - ▶ Formulierung, die beim Einsetzen eine Aussage ergibt.

## Aussagen

$$2 + 3 = 5 \quad (\text{wahr})$$

$$2 + 3 = 6 \quad (\text{falsch})$$

## Aussageformen in $\mathbb{R}$

$$2 + x = 5 \quad (\text{erfüllbar})$$

$$x + x = 2x \quad (\text{allgemeingültig})$$

$$x + 1 = x + 2 \quad (\text{unerfüllbar})$$

## ► Beschreibung von Lösungen

- ▷ Grundmenge Vorrat für Einsetzungen.
- ▷ Lösung Element der Grundmenge, das beim Einsetzen zu einer wahren Aussage führt.
- ▷ Lösungsmenge Menge aller Lösungen.

## ► Beschreibung des Lösungsverhaltens

(bzgl. einer bestimmten Grundmenge!)

- ▷ erfüllbare Aussageform  $\mathbb{L} \neq \{\}$
- ▷ unerfüllbare Aussageform  $\mathbb{L} = \{\}$
- ▷ allgemeingültige Aussageform  $\mathbb{L} = \mathbb{G}$

## ► Beschreibung von Umformungsarten

- ▷ Äquivalenzumformung  $\mathbb{L}$  ändert sich nicht.
- ▷ Gewinnumformung  $\mathbb{L}$  wird größer.
- ▷ Verlustumformung  $\mathbb{L}$  wird kleiner.

### Gewinumformung Probe!

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= x-1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{3\} \\ \sqrt{x+1} &= x-1 \quad |^2 \\ x+1 &= x^2 - 2x + 1 \quad | - (x+1) \\ x^2 - 3x &= 0 \\ x \cdot (x-3) &= 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{0; 3\} \end{aligned}$$

### Verlustumformung

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{-2; 0\} \\ x^2 + 2x &= 0 \quad | : x \\ x + 2 &= 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{-2\} \end{aligned}$$

## ▶ Einbindung in zentrale Themen

- ▶ Gleichungen nicht isoliert behandeln
- ▶ Einbinden in zentrale Themen wie z. B. Zahlen, Funktionen und Größen (Sachbezüge/Geometrie)

## ▶ Einsichtiger Umgang mit Gleichungen

- ▶ Überbetonung des Übens führt leicht zu mechanischem Umformen ohne Einsicht.
- ▶ Deshalb: Umformungen begründen und Lösungen kritisch kontrollieren (lassen).

## ▶ Akzeptanz von Näherungslösungen

- ▶ Näherungsverfahren sind
  - ▶ für alle praktischen Zwecke ausreichend genau
  - ▶ auch bei sehr komplizierten Funktionen anwendbar
  - ▶ die Regel bei Problemlösungen in Wirtschaft und Technik

Didaktik der Algebra – Kapitel 4: Gleichungen

# 4.2 Methoden zur Lösung von Gleichungen

- ▶ **Lösungsstrategien für einfache Gleichungen**
- ▶ **Streifenmethode**
- ▶ **systematisches Probieren**
- ▶ **graphische Lösungsverfahren**
- ▶ **numerisch-iterative Lösungsverfahren**
- ▶ **Gegenoperatoren**
- ▶ **Äquivalenzumformungen**
- ▶ **Anwenden von Lösungsformeln**



$$26 + x = 107$$

**Betrachte  
verwandte Gleichung  
mit gleicher Struktur**

$$2 + x = 5$$

$$2 + 3 = 5$$

also

$$26 + 81 = 107$$

$$26 + x = 107$$

**Zerlegung**

$$26 + x = 26 + 81$$

also

$$x = 81$$

$$26 + x = 107$$

**Umkehraufgabe**

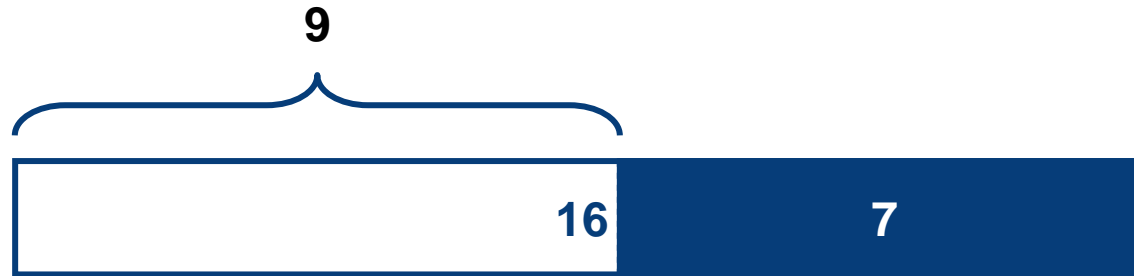
$$107 - 26 = x$$

$$81 = x$$

also

$$x = 81$$

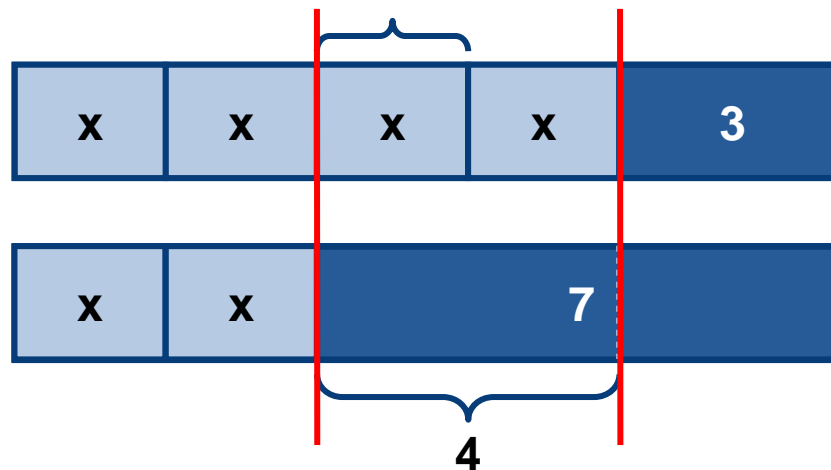
$$3x + 7 = 16$$



$$x = 9 : 3 = 3$$

$$4x + 3 = 2x + 7$$

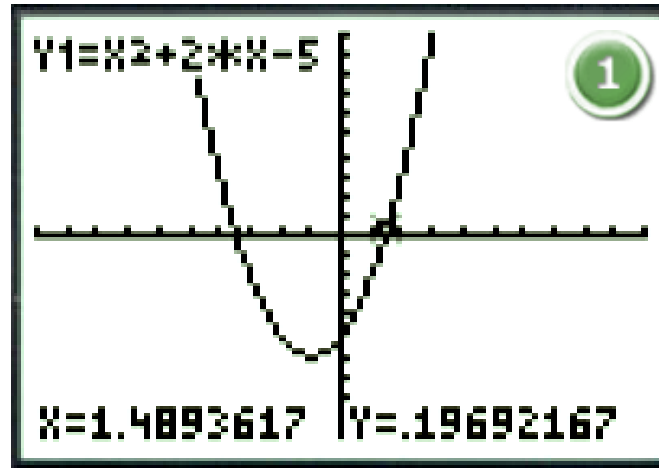
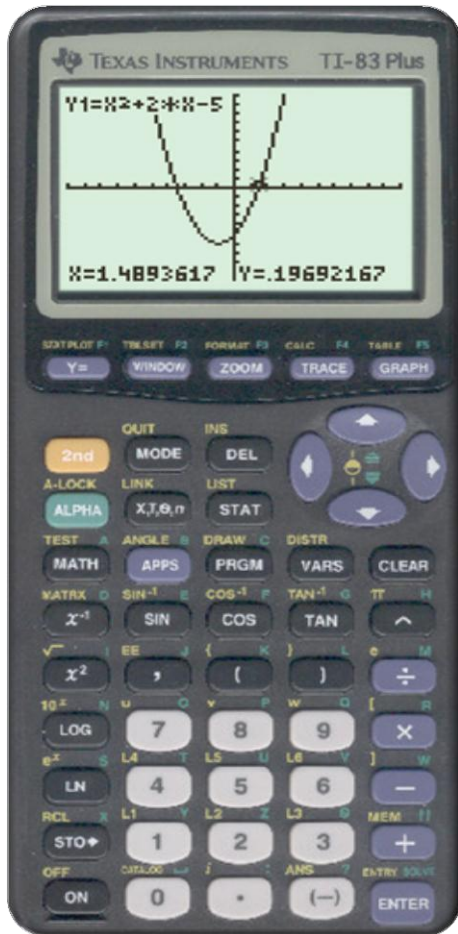
$$x = 4 : 2 = 2$$



$$x^3 + x^2 - 1 = 0$$

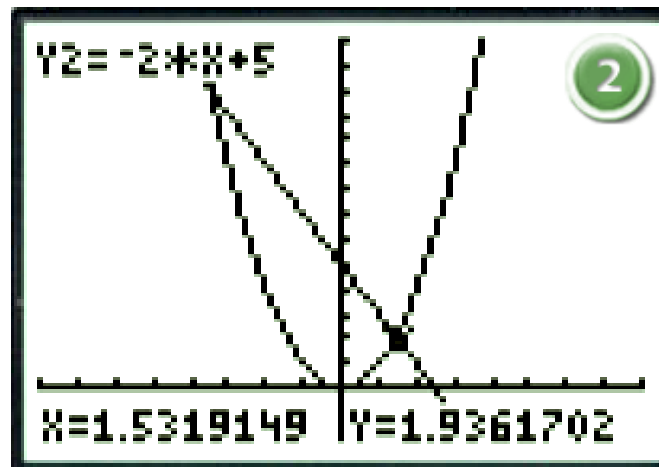
<b>x</b>	<b><math>x^3+x^2-1</math></b>
0	-1
1	1
0,5	-0,625
0,8	0,125
0,7	-0,167
0,75	-0,015625
0,77	0,049433
0,76	0,016576
0,755	0,0003939
0,753	-0,006033
0,754	-0,002823
0,7545	-0,001215
0,7547	-0,000572

$$x^2 + 2x - 5 = 0$$



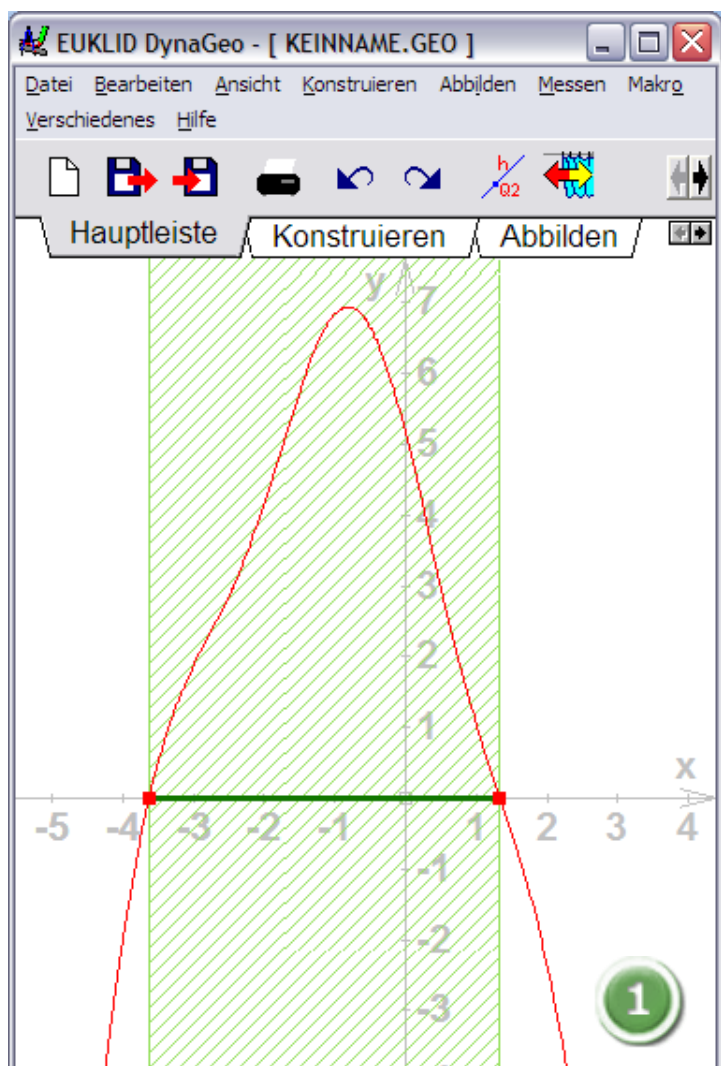
$$x^2 + 2x - 5 = 0$$

$x$ -Koordinaten der Schnittpunkte des zum (Funktions-) Term  $x^2 + 2x - 5$  gehörenden Graphen mit der  $x$ -Achse



$$x^2 = -2x + 5$$

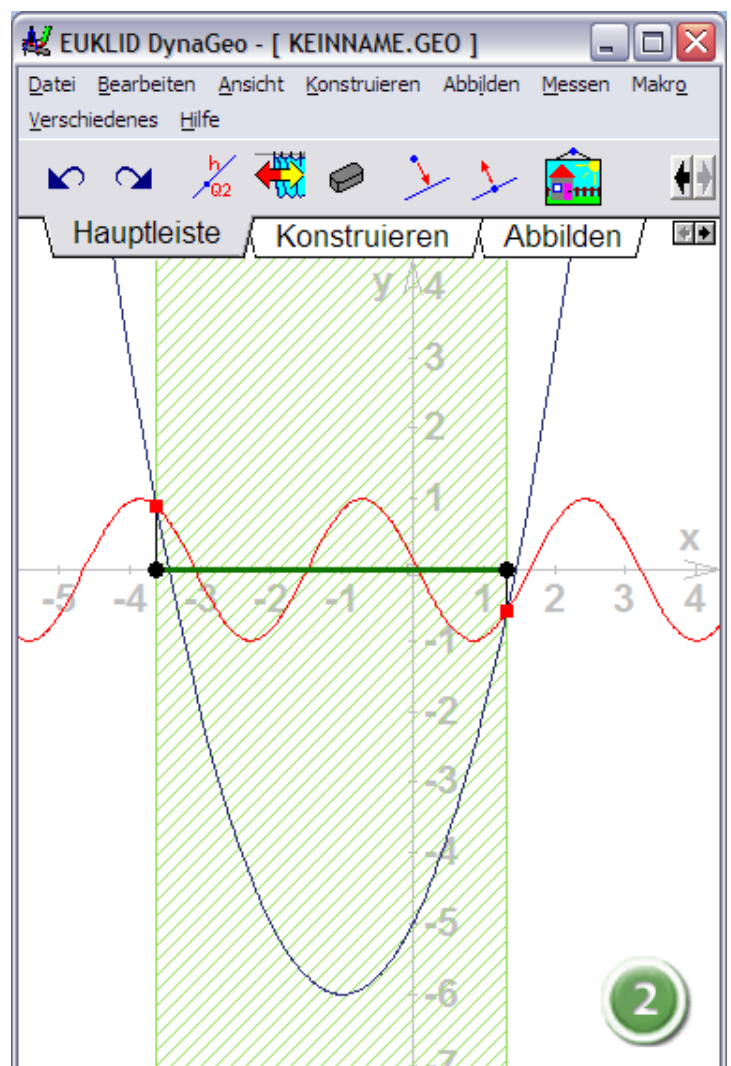
$x$ -Koordinaten der Schnittpunkte der zu den (Funktions-) Termen  $x^2$  und  $-2x + 5$  gehörenden Graphen



$$\sin(2x + 3) - (x^2 + 2x - 5) = 0$$

$$\sin(2x + 3) \geq x^2 + 2x - 5$$

Ungleichungen lassen sich *auch* graphisch lösen!



$$\sin(2x + 3) = x^2 + 2x - 5$$

$$1,5^x = 3 \cdot \cos(x)$$

## Algorithmus:

1. Berechnung einer Wertetabelle für ein Intervall
2. Auswahl eines Teilintervalls, das eine Lösung der Gleichung enthält
3. das Teilintervall spreizen und eine neue Wertetabelle berechnen
4. Auswahl eines Teilintervalls, das eine Lösung der Gleichung enthält
5. Wiederholen von 2. bis 4. solange bis die Lösung genau genug ist



x	$1,5^x$	$3 \cdot \cos(x)$	$T_1(x) - T_2(x)$
-6	0,0878	2,8805	-2,7927
-5	0,1317	0,8510	-0,7193
-4	0,1975	-1,9609	2,1585
-3	0,2963	-2,9700	3,2663
-2	0,4444	-1,2484	1,6929
-1	0,6667	1,6209	-0,9542
0	1,0000	3,0000	-2,0000
1	1,5000	1,6209	-0,1209
2	2,2500	-1,2484	3,4984
3	3,3750	-2,9700	6,3450
4	5,0625	-1,9609	7,0234



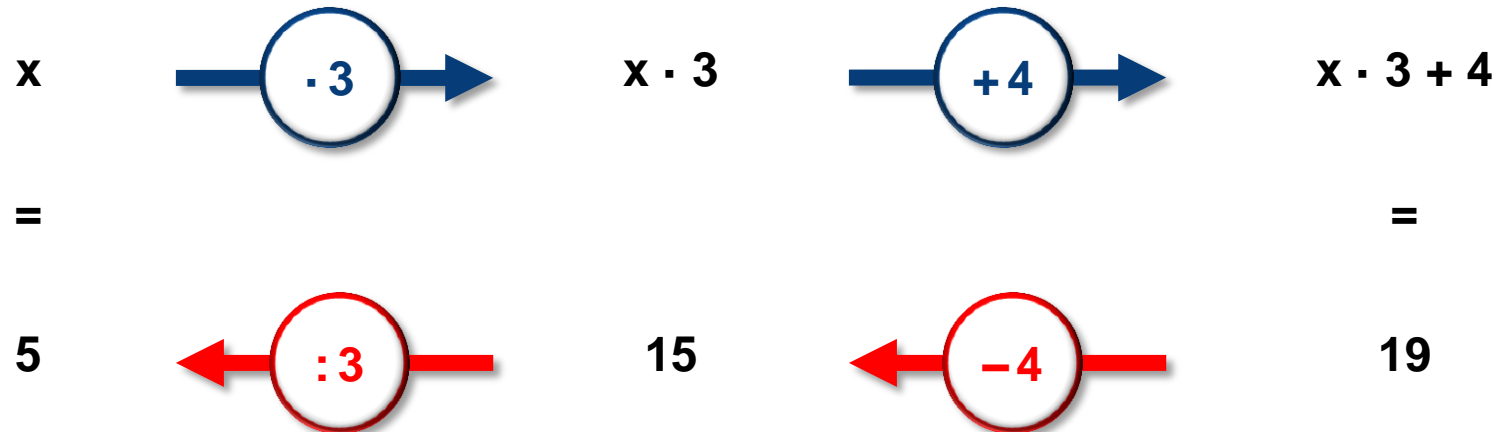
x	$1,5^x$	$3 \cdot \cos(x)$	$T_1(x) - T_2(x)$
-2	0,4444	-1,2484	1,6929
-1,9	0,4628	-0,9699	1,4327
-1,8	0,4820	-0,6816	1,1636
-1,7	0,5019	-0,3865	0,8885
-1,6	0,5227	-0,0876	0,6103
-1,5	0,5443	0,2122	0,3321
-1,4	0,5669	0,5099	0,0570
-1,3	0,5903	0,8025	-0,2122
-1,2	0,6147	1,0871	-0,4723
-1,1	0,6402	1,3608	-0,7206
-1	0,6667	1,6209	-0,9542

x	$1,5^x$	$3 \cdot \cos(x)$	$T_1(x) - T_2(x)$
-1,4	0,5669	0,5099	0,0570
-1,39	0,5692	0,5394	0,0297
-1,38	0,5715	0,5689	0,0025
-1,37	0,5738	0,5983	-0,0246
-1,36	0,5761	0,6277	-0,0516
-1,35	0,5785	0,6570	-0,0786
-1,34	0,5808	0,6863	-0,1054
-1,33	0,5832	0,7154	-0,1323
-1,32	0,5855	0,7445	-0,1590
-1,31	0,5879	0,7736	-0,1856
-1,3	0,5903	0,8025	-0,2122

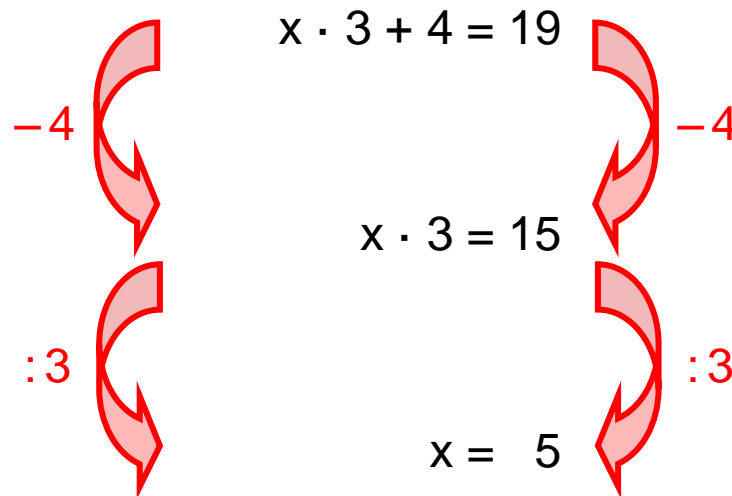
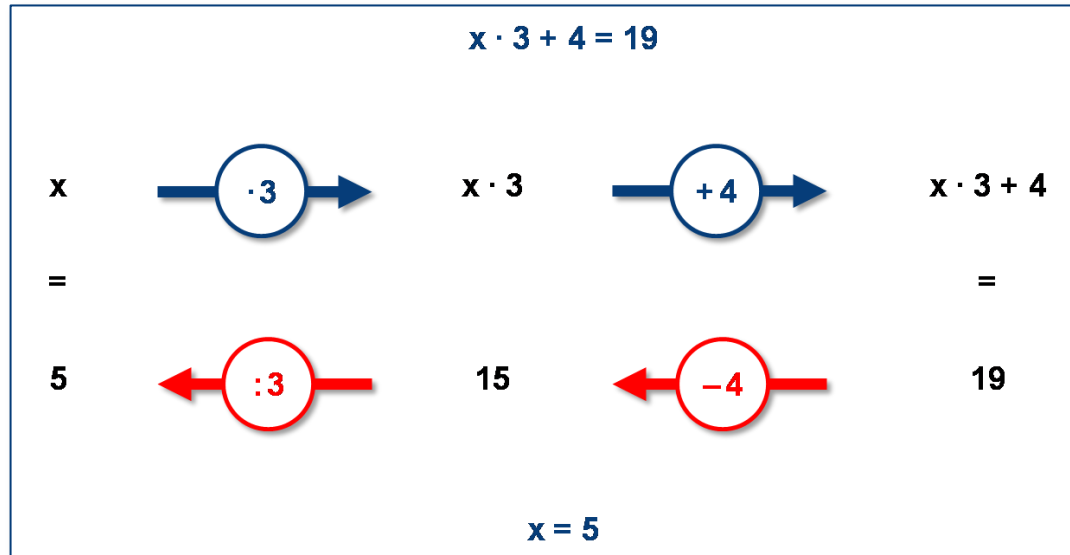
- ▷ liefern im Prinzip beliebig viele Dezimalstellen einer Lösung
- ▷ funktionieren nicht, wenn Gleichung von Parametern abhängt
- ▷ liefern Lösungen nicht als geschlossene Terme, sondern als abbrechende Dezimalbrüche vorgegebener Länge
- ▷ liefern nur Lösungen aus einem endlichen abgeschlossenen Startintervall
- ▷ beantworten nicht die Frage nach *allen* Lösungen einer Gl.
- ▷ genügen für die meisten praktischen Anwendungen
- ▷ werden interaktiv vom Benutzer gesteuert
  - ▶ Rechenpraxis: Automatisch ablaufende Verfahren.
  - ▶ Probleme: Startintervall, Konvergenzgeschwindigkeit, ...

**Ein Startintervall für diese Verfahren kann wie beim graphischen Lösen von Gleichung bestimmt werden.**

$$x \cdot 3 + 4 = 19$$



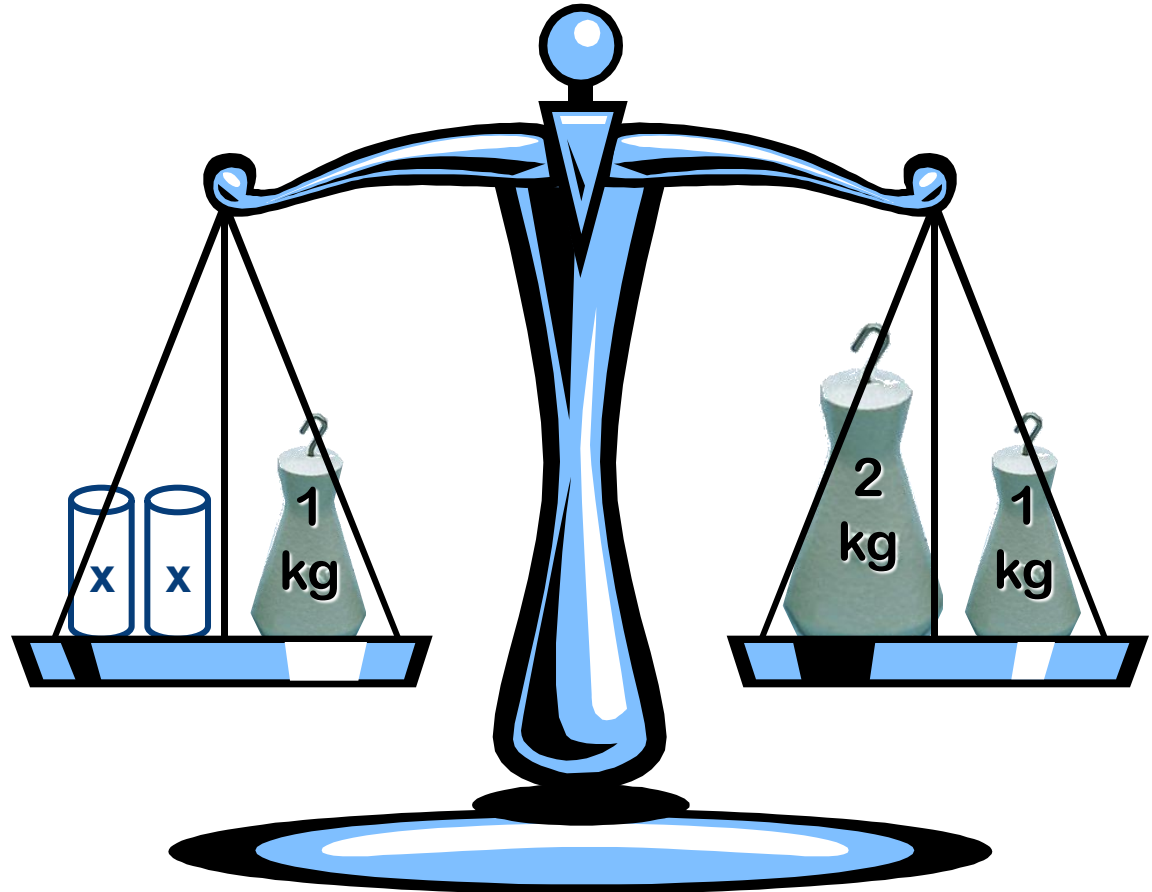
$$x = 5$$



## Waagemodell

$$2x + 1 = 3$$

1 kg auf beiden  
Seiten wegnehmen.



$$2x + 1 = 3$$

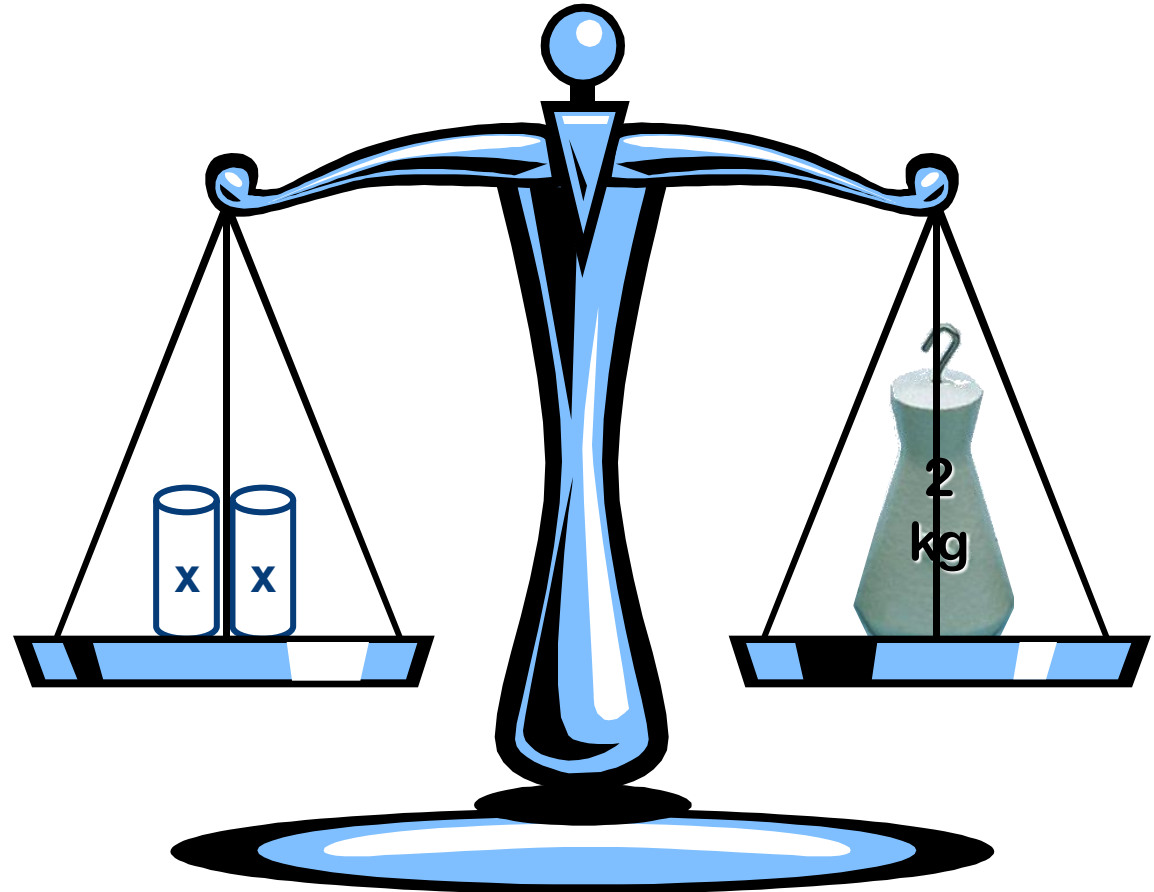
## Waagemodell

$$2x + 1 = 3$$

1 kg auf beiden  
Seiten wegnehmen.

$$2x = 2$$

Massen auf beiden  
Seiten halbieren.



$$2x = 2$$

## Waagemodell

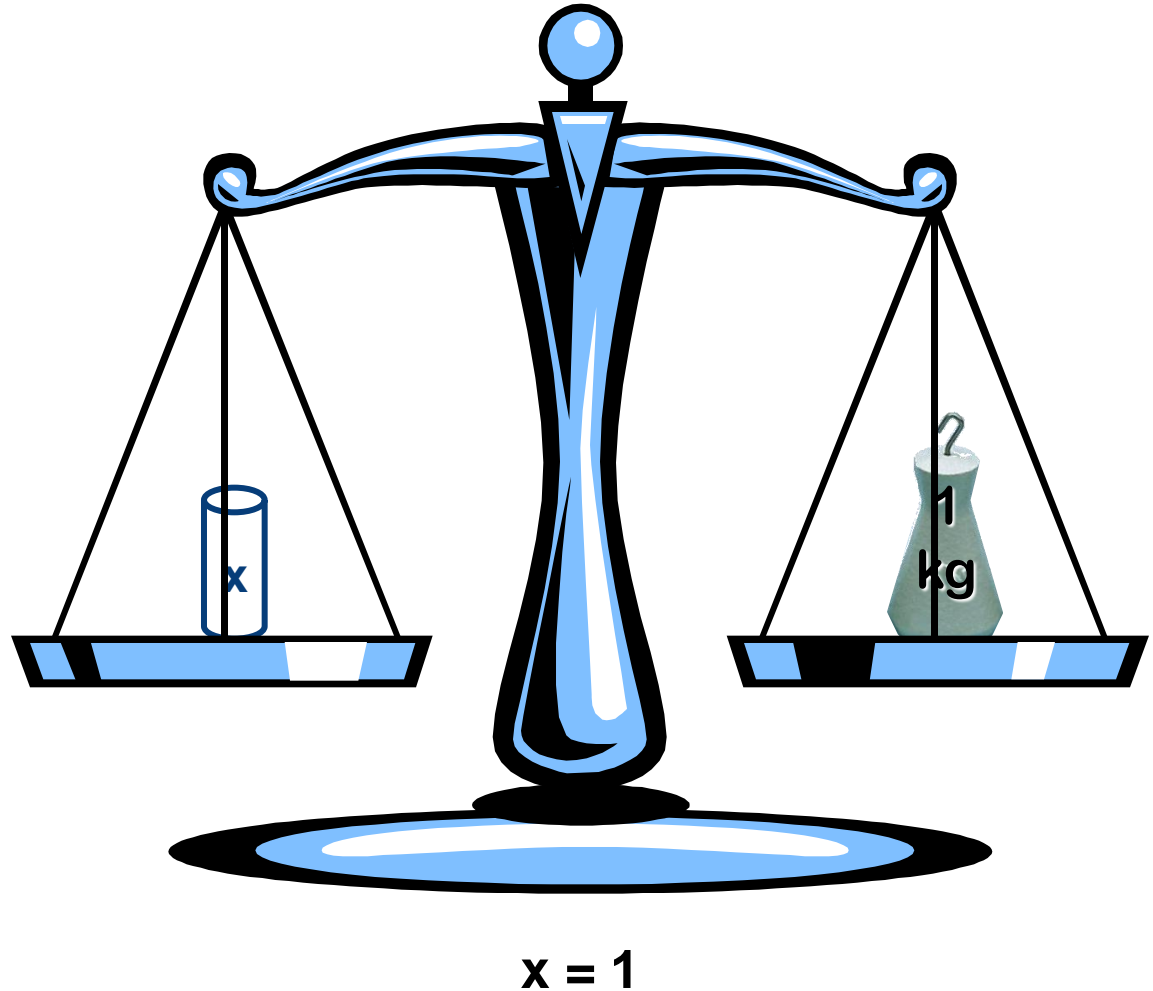
$$2x + 1 = 3$$

1 kg auf beiden  
Seiten wegnehmen.

$$2x = 2$$

Massen auf beiden  
Seiten halbieren.

$$x = 1$$



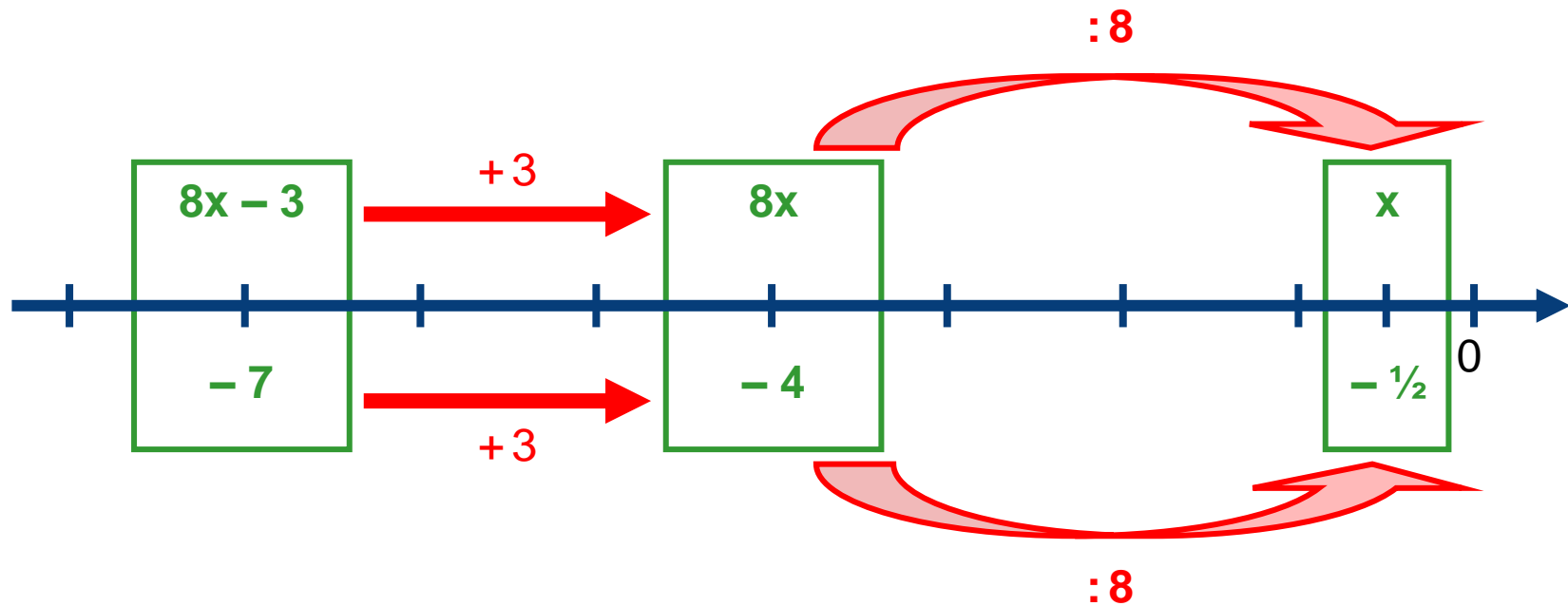
## Waagemodell

- ▶ lässt sich in einfachen Fällen gut zur Veranschaulichung nutzen.
- ▶ ist, wie jedes Modell, nur begrenzt nutzbar!  
(vgl. etwa negative Zahlen, irrationale Zahlen, schwierig bei Bruchzahlen, Division, Multiplikation, ...)



## Modell: Zahlengerade

$$8x - 3 = -7$$



$$x = -\frac{1}{2}$$

$$8x + 2 - 3x + 5 = 17$$

**Zusammenfassen:**

$$5x + 7 = 17$$

**Beidseitig 7 subtrahieren:**

$$5x + 7 = 17 \quad | - 7$$

$$5x = 10$$

**Beidseitig durch 5 dividieren:**

$$5x = 10 \quad | : 5$$

$$x = 2$$

## Umformungsregeln

$a = b$  ist äquivalent zu  $a + c = b + c$

$a = b$  ist äquivalent zu  $a - c = b - c$

$a = b$  ist für  $c \neq 0$  äquivalent zu  $a \cdot c = b \cdot c$

$a = b$  ist für  $c \neq 0$  äquivalent zu  $a : c = b : c$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

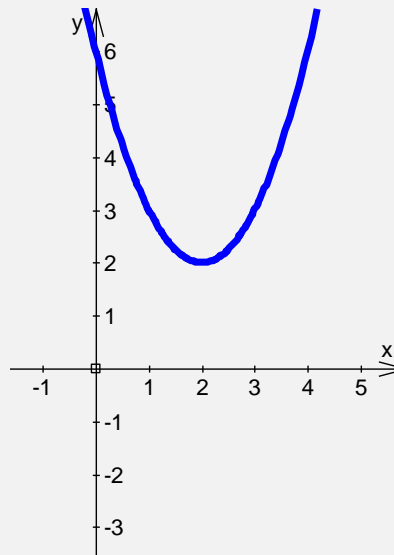
$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

oder

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

keine  
Lösung

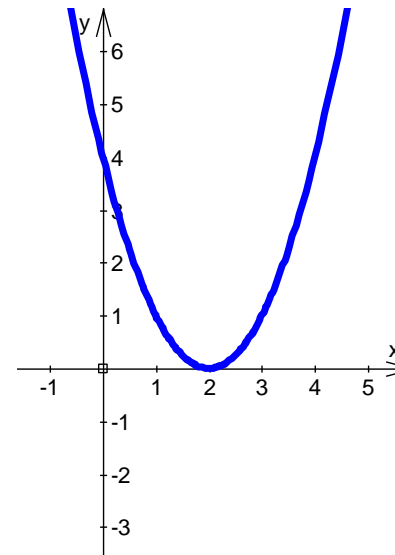
$$b^2 - 4ac < 0$$



$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$$

eine  
Lösung

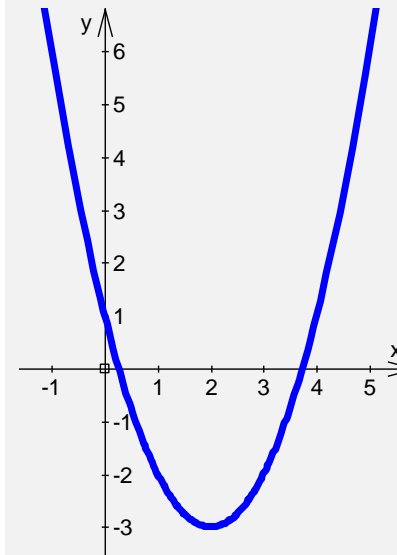
$$b^2 - 4ac = 0$$



$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$$

zwei  
Lösungen

$$b^2 - 4ac > 0$$



$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$$



## ► Grundsätzliches:

- Jede quadratische Gleichung lässt sich in die Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit  $a \neq 0$  (Sonst ist die Gleichung nicht quadratisch.).

- Die Gleichung muss so umgeformt werden, dass nur ein quadratisches „x-Glied“ vorkommt, aber kein zusätzliches lineares.
- **Idee:** Anwendung der „Plusformel“/1. Binomischen Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + \boxed{2ab} + b^2 (*)$$

- Um die binomische Formel von rechts nach links anwenden zu können, muss der Summenterm quadratisch ergänzt werden.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad |:a \text{ mit } a \neq 0$$

$$(a + b)^2 = a^2 + \boxed{2ab} + b^2 (*)$$

$$x^2 + \boxed{\frac{b}{a}}x + \frac{c}{a} = 0 \quad | -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \boxed{\frac{b}{a}}x = -\frac{c}{a} \quad \left| + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right. \quad (\text{quadratische Ergänzung})$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \quad |\text{Anwendung der binom. Formel } (*)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \quad |\text{Quadrat auf rechter Seite auflösen}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \quad |\text{rechte Seite auf einen Bruch bringen}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad |\sqrt{\quad}$$

Die Wurzel darf nur gezogen werden, wenn  
 $b^2 - 4ac \geq 0$ . Wegen  $\sqrt{x^2} = |x|$  gilt dann:

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}$$

Hier sind genau genommen vier Fallunterscheidungen notwendig, von denen aber je zwei zusammen fallen. Damit ergibt sich:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, & \text{falls } \left(x + \frac{b}{2a} \geq 0 \wedge a > 0\right) \vee \left(x + \frac{b}{2a} < 0 \wedge a < 0\right) \\ x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, & \text{falls } \left(x + \frac{b}{2a} < 0 \wedge a > 0\right) \vee \left(x + \frac{b}{2a} \geq 0 \wedge a < 0\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, & \text{falls } \left(x + \frac{b}{2a} \geq 0 \wedge a > 0\right) \vee \left(x + \frac{b}{2a} < 0 \wedge a < 0\right) \\ x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, & \text{falls } \left(x + \frac{b}{2a} < 0 \wedge a > 0\right) \vee \left(x + \frac{b}{2a} \geq 0 \wedge a < 0\right) \end{cases}$$



Didaktik der Algebra – Kapitel 4: Gleichungen

# 4.3 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

## ► Tarif 1: Geringe Grundgebühr

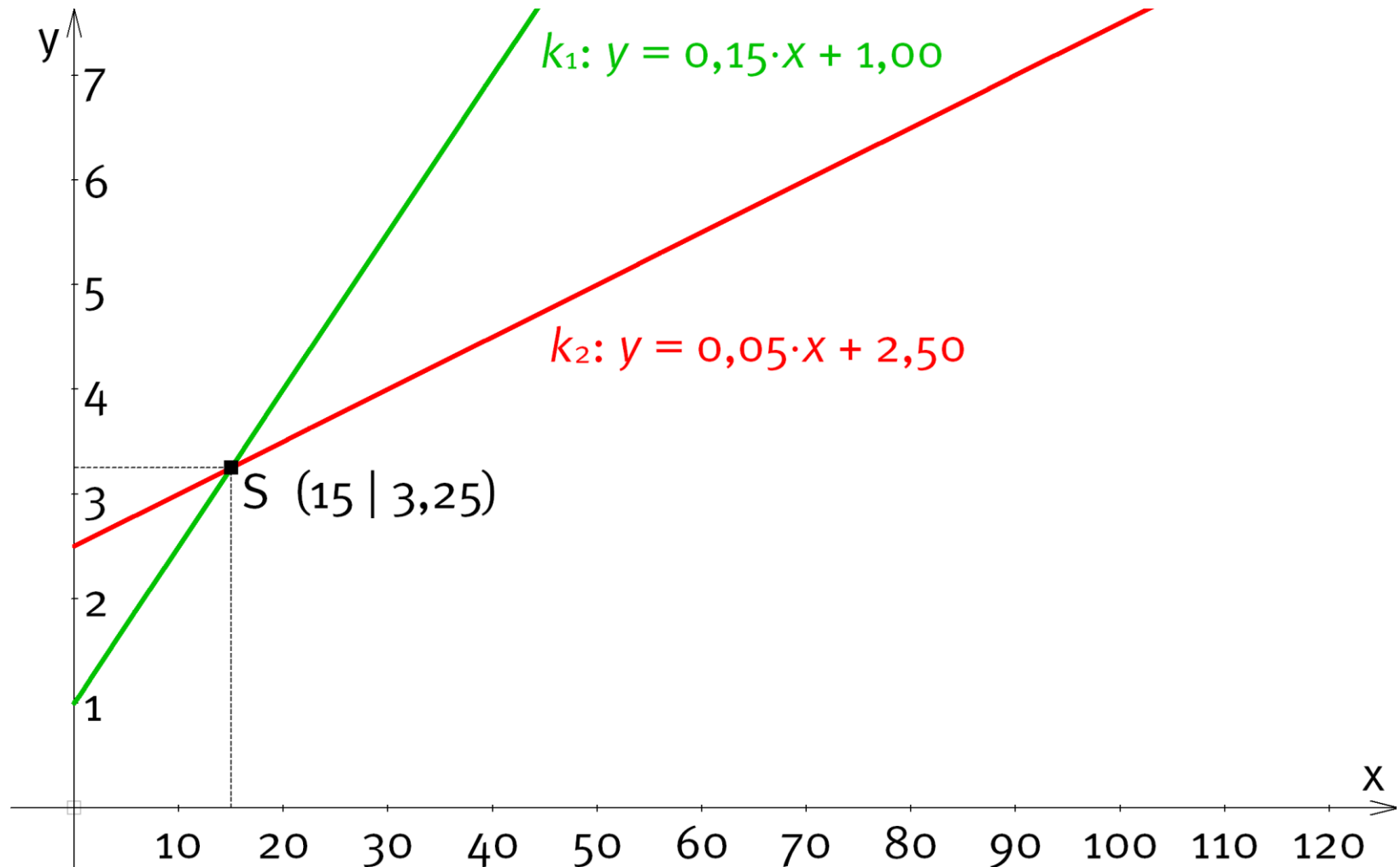
- ▷ Monatliche Grundgebühr  $g_1$ : 1,00 €
- ▷ Preis pro Einheit, „Minutenpreis“  $m_1$ : 0,15 €
- ▷ Telefoneinheiten (Minuten)  $x$
- ▷ Monatliche Kosten:  $k_1(x) = m_1x + g_1$



## ► Tarif 2: Geringer Minutenpreis

- ▷ Monatliche Grundgebühr  $g_2$ : 2,50 €
- ▷ Preis pro Einheit, „Minutenpreis“  $m_2$ : 0,05 €
- ▷ Telefoneinheiten (Minuten)  $x$
- ▷ Monatliche Kosten:  $k_2(x) = m_2x + g_2$

## ► Ab wie vielen Telefoneinheiten ist Tarif 2 günstiger?



## ► **Gesucht**

ist zunächst ein Paar  $(x|y)$ ,  
das die beiden Gleichungen

$$k_1: y = 0,15x + 1 \quad (\text{I})$$

$$k_2: y = 0,05x + 2,5 \quad (\text{II})$$

gleichzeitig erfüllt, also eine  
Lösung für dieses **lineare  
Gleichungssystem** darstellt.

## ► **Lösungsverfahren (Sek. I)**

für lineare Gleichungssysteme  
mit zwei Gleichungen und zwei  
Variablen (Unbekannten):

- ▷ Gleichsetzungsverfahren
- ▷ Additionsverfahren
- ▷ Einsetzungsverfahren

## ► **Ziel:**

Dabei soll jeweils eine Variable  
eliminiert werden, um zu einer  
Gleichung mit einer Unbekann-  
ten zu kommen, die einfach  
gelöst werden kann.

$$(I) y = 0,15x + 1$$

$$(II) y = 0,05x + 2,5$$

### ► Gleichsetzungsverfahren

- Gleichsetzen von (I) und (II) liefert:

$$\begin{array}{r} 0,15x + 1 = 0,05x + 2,5 \quad | - (0,05x + 1) \\ 0,1x = 1,5 \quad | \cdot 10 \\ x = 15 \end{array}$$

- Einsetzen in (II) liefert:

$$\begin{aligned} y &= 0,05 \cdot 15 + 2,5 \\ &= 0,75 + 2,5 \\ &= 3,25 \end{aligned}$$

- Die Lösung ist das geordnete Paar (15|3,25)

### ► Additionsverfahren

- Subtraktion der Gleichung (II) von der Gleichung (I), also (I) – (II), liefert:

$$\begin{array}{r} 0 = 0,1x - 1,5 \quad | + 1,5 \\ 0,1x = 1,5 \quad | \cdot 10 \\ x = 15 \end{array}$$

- Einsetzen in (II) liefert:

$$\begin{aligned} y &= 0,05 \cdot 15 + 2,5 \\ &= 0,75 + 2,5 \\ &= 3,25 \end{aligned}$$

- Die Lösung ist das geordnete Paar (15|3,25)

$$(I) y = 0,15x + 1$$

$$(II) y = 0,05x + 2,5$$

### ► Einsetzungsverfahren

- Auflösen der Gleichung (II) nach  $x$  liefert:

$$y = 0,05x + 2,5 \quad | -2,5$$

$$y - 2,5 = 0,05x \quad | :0,05$$

$$\frac{1}{0,05} \cdot (y - 2,5) = x$$

- Einsetzen in (I) liefert:

$$y = \frac{0,15}{0,05} \cdot (y - 2,5) + 1$$

$$y = 3y - 7,5 + 1$$

$$y = 3y - 6,5 \quad | -y + 6,5$$

$$6,5 = 2y \quad | :2$$

$$3,25 = y$$

- Einsetzen in (II) liefert:

$$3,25 = 0,05x + 2,5 \quad | -2,5$$

$$0,75 = 0,05x \quad | :0,05$$

$$15 = x$$

- Die Lösung ist das geordnete Paar  $(15|3,25)$

► **Textaufgabe:**

- ▷ Eine sehr alte Textaufgabe aus Mesopotamien (ca. 2000 v. Chr.) lautet:

„Ein Viertel der Breite zur Länge addiert ergibt 7 Handbreiten, Länge und Breite addiert macht 10 Handbreiten.“

Bestimmen Sie die Länge und Breite (des Tisches) in Handbreiten.

- ▷ Man wird dazu zunächst zwei Gleichungen aufstellen:

- Ein Viertel der Breite zur Länge addiert ergibt 7 Handbreiten:

$$(I) \quad x + \frac{1}{4}y = 7$$

- Länge und Breite addiert macht 10 Handbreiten:

$$(II) \quad x + y = 10$$

- ▷ Lösen Sie dieses Gleichungssystem mit einem der drei aus der Schule bekannten Verfahren.

▶ **Satz:**

▷ Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

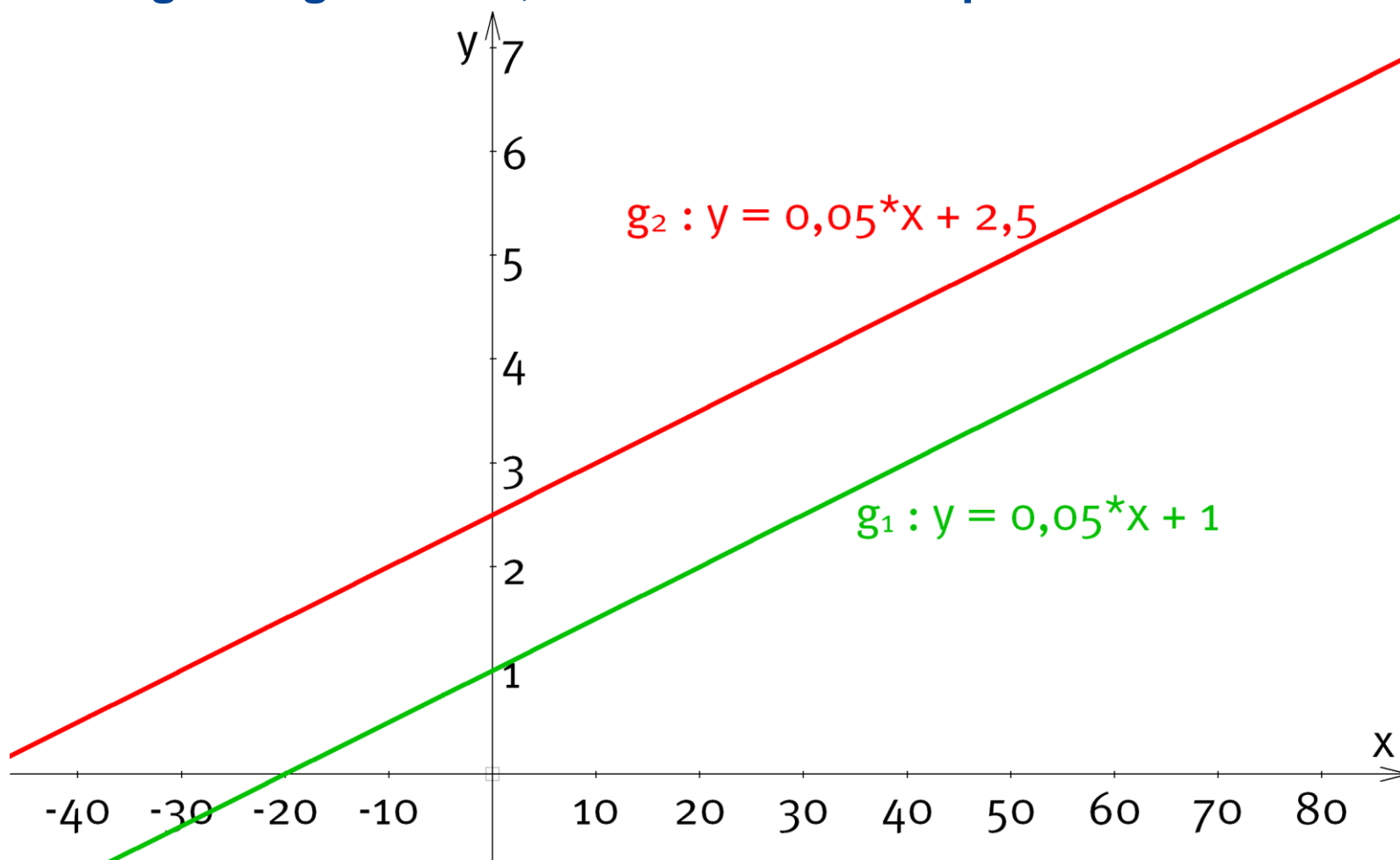
Die zugehörige Lösungsmenge ist entweder

- ▶ leer,
- ▶ ein geordnetes Zahlenpaar  $(x|y)$  oder
- ▶ eine unendliche Menge von Zahlenpaaren.

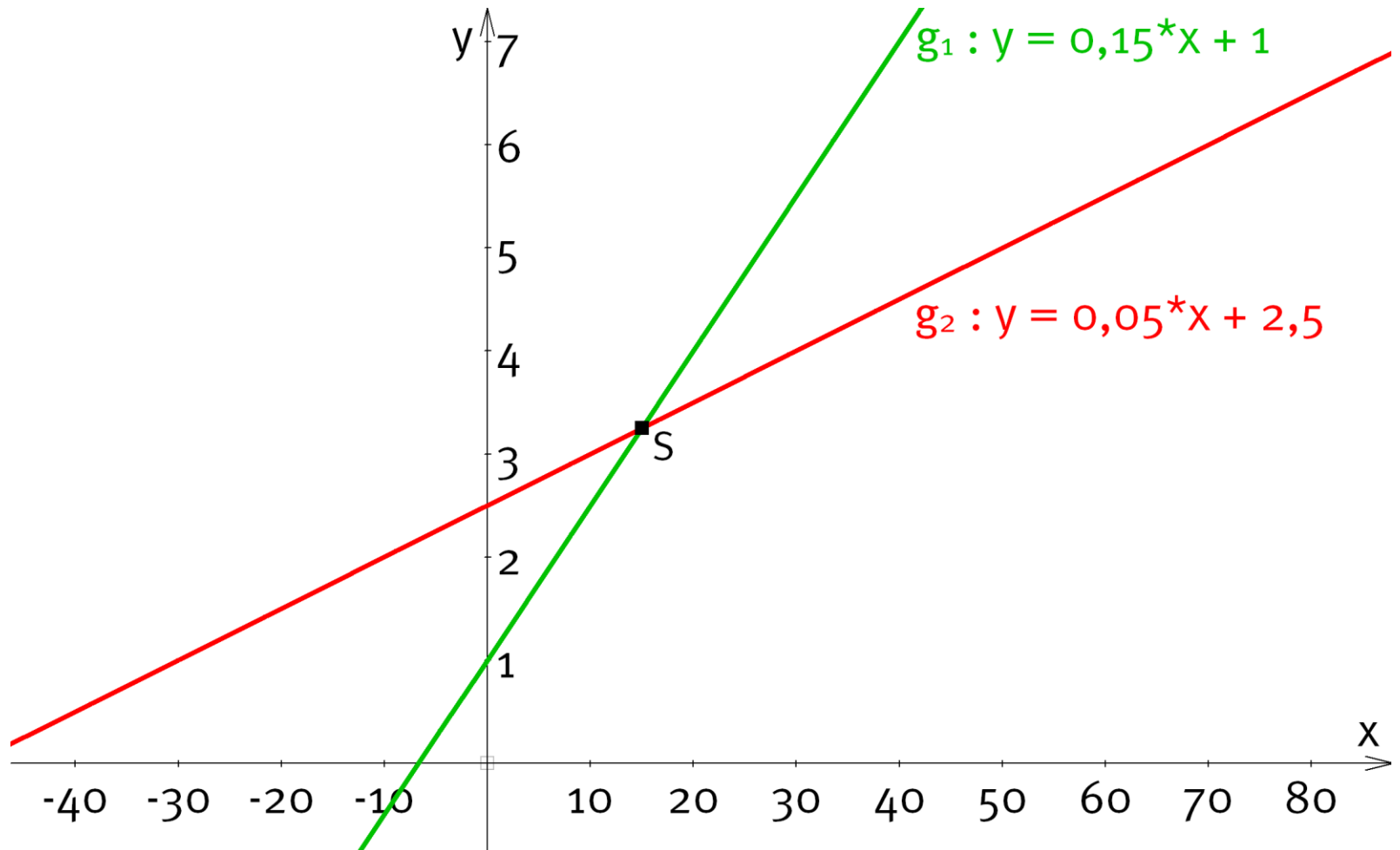
▶ **Bemerkung:**

▷ Graphisch interpretiert entsprechen diese drei Fälle genau den möglichen Lagebeziehungen der beiden durch  $a_1x + b_1y = c_1$  und  $a_2x + b_2y = c_2$  gegebenen Geraden.

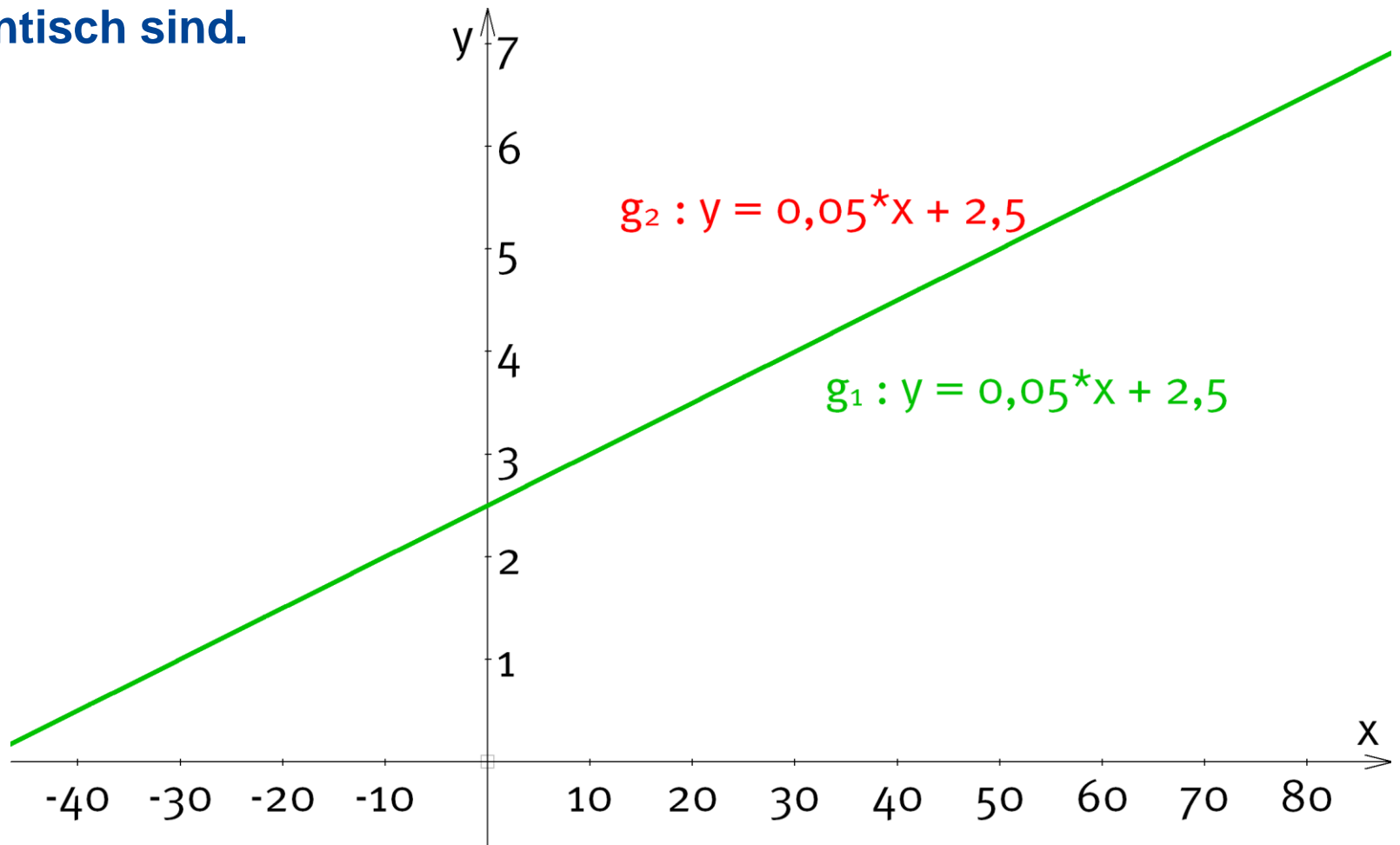
- Die Lösungsmenge ist leer, wenn die Geraden parallel sind.



- ▶ Die Lösungsmenge ist ein geordnetes Paar (ein Punkt), wenn die Geraden sich schneiden.



- ▶ Die Lösungsmenge ist unendliche Menge von geordneten Zahlenpaaren (alle Punkte der Geraden), wenn die Geraden identisch sind.



Didaktik der Algebra – Kapitel 4: Gleichungen

# 4.4 Gleichungen in der Sekundarstufe I

## ► Orientierungsstufe

- ▷ Einfache Gleichungen (mit einer Variablen) lösen

## ► 7./8. Klasse

- ▷ Wertetabellen zu Termen; Grundmenge (ggf. Definitionsmenge)
- ▷ Äquivalenz von Termen und von Gleichungen bzw. Ungleichungen; Grundmenge (ggf. Definitionsmenge)
- ▷ Gleichungen und Ungleichungen über verschiedenen Grundmengen, Lösungsmenge, Intervalle
- ▷ Äquivalenzumformungen (ÄU) bei Gleichungen der Form  $ax + b = c$
- ▷ ÄU bei Gleichungen und Ungleichungen der Form  $ax + b = c$
- ▷ Sachaufgaben (SA) (auch offene Aufgaben, Aufgabenvariation)
- ▷ Proportionalität: fehlende Größen berechnen, SA, grafische Lös.

## ▶ 7./8. Klasse (Fortsetzung)

- ▶ lineare Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen
- ▶ Textaufgaben; Lösen ggf. mithilfe einer Text-Term-Tabelle
- ▶  $\wedge$ -Verknüpfung bzw.  $\vee$ -Verknüpfung von linearen Gleichungen bzw. Ungleichungen
- ▶ einfache Bruchgleichungen mit einer Variablen
- ▶ Relation und Umkehrrelation: Zusammenhang zwischen deren Gleichungen bzw. Ungleichungen; Umkehrfunktion
- ▶ Funktionen mit Gleichungen der Form  $y = mx$  und der Form  $y = mx + t$
- ▶ lineare Ungleichungen mit zwei Variablen
- ▶ Funktionen mit Gleichungen der Form  $y = kx$
- ▶ einfache Bruchgleichungen mit einer Variablen  $\frac{T_1(x)}{T_2(x)} = \frac{T_3(x)}{T_4(x)}$

## ▶ 9./10. Klasse

- ▷ Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen:
  - ▶ grafische und algebraische Lösung (Gleichsetzungsverfahren, Einsetzungsverfahren, Additionsverfahren);
  - ▶ auch Aufgaben mit geometrischen Problemstellungen algebraisch lösen
- ▷ Systeme linearer Ungleichungen mit zwei Variablen:
  - ▶ grafische Lösung
- ▷ quadratische Gleichungen:
  - ▶ grafische Lösung, Lösen mit quadratischer Ergänzung, Lösungsformel; Diskriminante und Lösbarkeit
  - ▶ quadratische Gleichungen mit Parametern; Satz des Vieta mit Anwendungen; quadratische Ungleichungen
- ▷ einfache Wurzelgleichungen
  - ▶ Beachtung der Definitionsmenge; Äquivalenzumformungen

## ▶ 9./10. Klasse (Fortsetzung)

- ▷ Berechnen der Koordinaten der Schnittpunkte von Funktionsgraphen
  - ▶ (maximal quadratische Bestimmungsgleichungen mit maximal einem Parameter)
- ▷ Tangentialprobleme und Diskriminante
- ▷ Gleichungen der Form  $a \cdot b^{x+c} + d = 0$
- ▷ goniometrischen Gleichungen