Jürgen Roth

Didaktik der Algebra

Modul 5

Didaktik der Algebra

1 Ziele und Inhalte

2 Terme

3 Funktionen

4 Gleichungen

Didaktik der Algebra

Kapitel 4: Gleichungen

Kapitel 4: Gleichungen

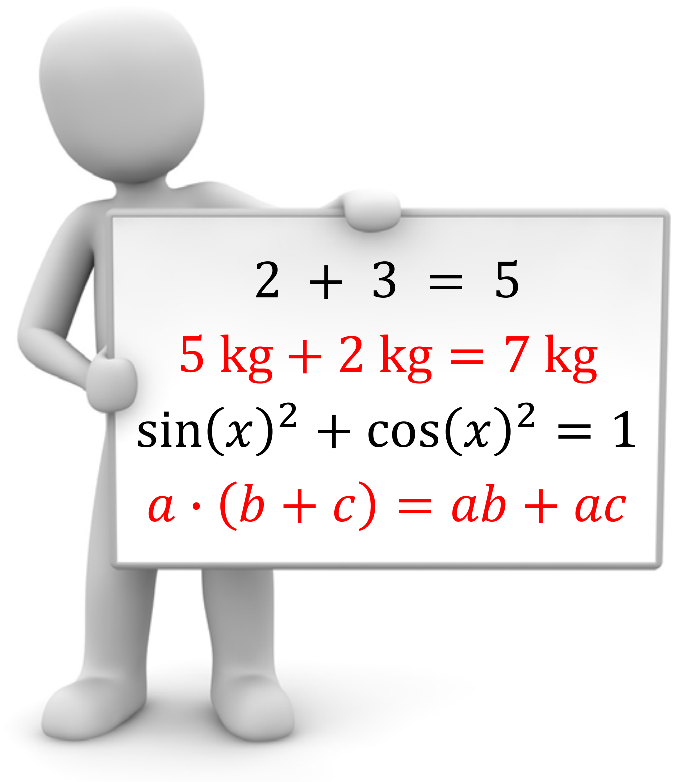
Kapitel 4: Gleichungen

4.1 Aspekte beim Umgang mit Gleichungen

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Gleichungen als Werkzeuge und Objekte

- **Gleichungen als Werkzeuge**
  - zum Formulieren von Beziehungen zwischen mathematischen Objekten (z. B. Zahlen, Größen, Funktionen),
  - zum Ausdrücken von Eigenschaften,
  - zum Formulieren und Lösen von Problemen.



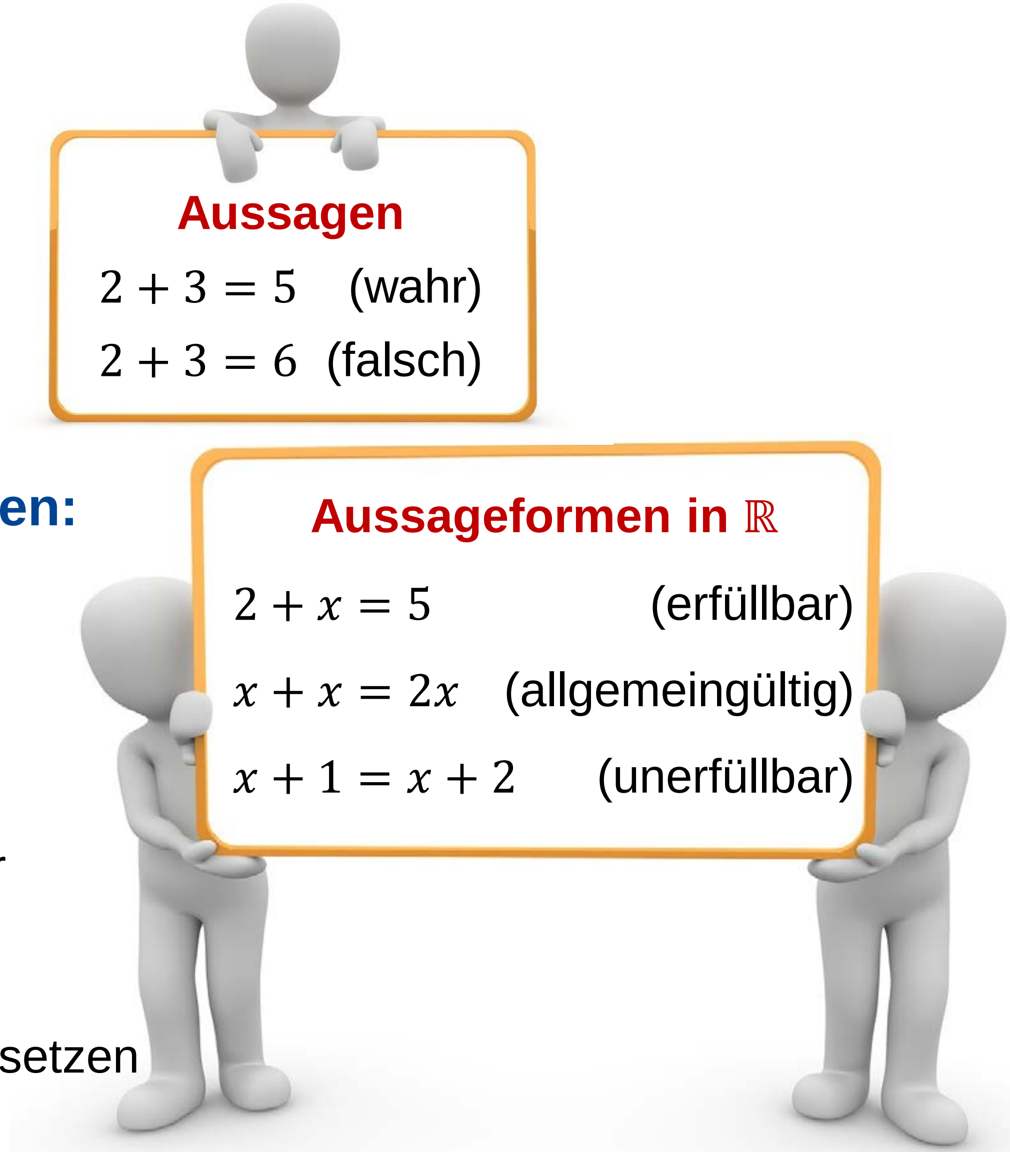
- **Gleichungen als Objekte**
  - Untersuchung von Gleichungstypen
    - Existenz und Bestimmung von Lösungen
  - Logik
    - Gleichungen ohne Variable → Aussagen
    - Gleichungen mit Variablen → Aussageformen

Begriffe rund um Gleichungen

- **Begriffe werden benötigt, um**
  - über Gleichungen reden,
  - Regeln formulieren und
  - Ergebnisse interpretieren

  zu können.

- **Beschreibung von Gleichungen:**
  - Variable
  - Term
  - Gleichung
  - Aussage
    - Formulierung, die entweder wahr oder falsch ist.
  - Aussageform
    - Formulierung, die beim Einsetzen eine Aussage ergibt.



Begriffe rund um Gleichungen

Beschreibung von Lösungen

- Grundmenge — Vorrat für Einsetzungen.
- Lösung — Element der Grundmenge, das beim Einsetzen zu einer wahren Aussage führt.
- Lösungsmenge — Menge aller Lösungen.

Beschreibung des Lösungsverhaltens

(bzgl. einer bestimmten Grundmenge $\mathbb{G}$!)

- erfüllbare Aussageform $\mathbb{L} \neq \{\}$
- unerfüllbare Aussageform $\mathbb{L} = \{\}$
- allgemeingültige Aussageform $\mathbb{L} = \mathbb{G}$

Gewinnumformung Probe!

$$\sqrt{x+1} = x - 1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{3\}$$

$$\sqrt{x+1} = x - 1 \mid {}^2$$

$$x + 1 = x^2 - 2x + 1 \mid -(x+1)$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x \cdot (x-3) = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{0; 3\}$$

Beschreibung von Umformungsarten

- Äquivalenzumformung
- Gewinnumformung
- Verlustumformung

Verlustumformung

$$x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{-2; 0\}$$

$$x^2 + 2x = 0 \mid : x$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{-2\}$$

Umgang mit Gleichungen im Unterricht

- **Gleichungen vernetzt lernen**
  - Gleichungen *nicht* isoliert behandeln
  - Einbinden in zentrale Themen wie Zahlen, Funktionen, Größen Geometrie und Sachbezüge
- **Einsichtig mit Gleichungen umgehen**
  - Überbetonung des Übens führt leicht zu mechanischem Umformen ohne Einsicht.
  - Deshalb: Umformungen begründen und Lösungen kritisch kontrollieren (lassen)
- **Näherungslösungen für Gleichungen akzeptieren**
  - Für alle praktischen Zwecke ausreichend genau
  - Auch bei sehr komplizierten Gleichungen anwendbar
  - Die Regel bei Problemlösungen in Wirtschaft und Technik

Kapitel 4: Gleichungen

4.2 Methoden zur Lösung von Gleichungen

Methoden zur Lösung von Gleichungen

$$sin(x) = 3^x$$

$$4x + 2 = x + 11$$

$$2^x = x^2$$

$$2x^2 + 3x + 5 = 0$$

- Lösungsstrategien für einfache Gleichungen
- Streifenmethode
- systematisches Probieren
- graphische Lösungsverfahren
- numerisch-iterative Lösungsverfahren
- Gegenoperatoren
- Äquivalenzumformungen
- Lösungsformeln anwenden

Lösungsstrategien für einfache Gleichungen

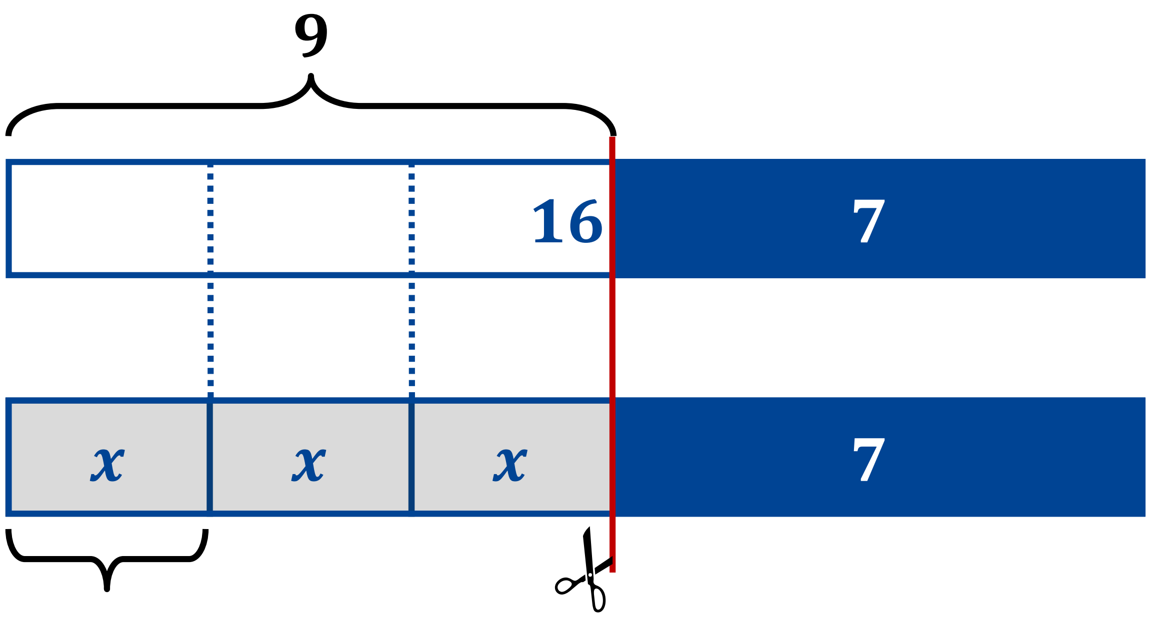
$26 + x = 107$	$26 + x = 107$	$26 + x = 107$
Verwandte Gleichung mit gleicher Struktur betrachten	**Zerlegung**	**Umkehraufgabe**
$2 + x = 5$	$26 + x = 26 + 81$	$107 - 26 = x$
$2 + 3 = 5$		$81 = x$
also	also	also
$26 + 81 = 107$	$x = 81$	$x = 81$

Aus der Grundschule:
Umkehr- und Tauschaufgaben

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\boxed{26+x=107} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Tauschaufgabe}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Umkehraufgabe}"] & \boxed{x+26=107} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Umkehraufgabe}"] \\
\boxed{26=107-x} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Tauschaufgabe}"] & \boxed{x=107-26}
\end{tikzcd}$$

Streifenmethode für lineare Gleichungen

$$3x + 7 = 16$$



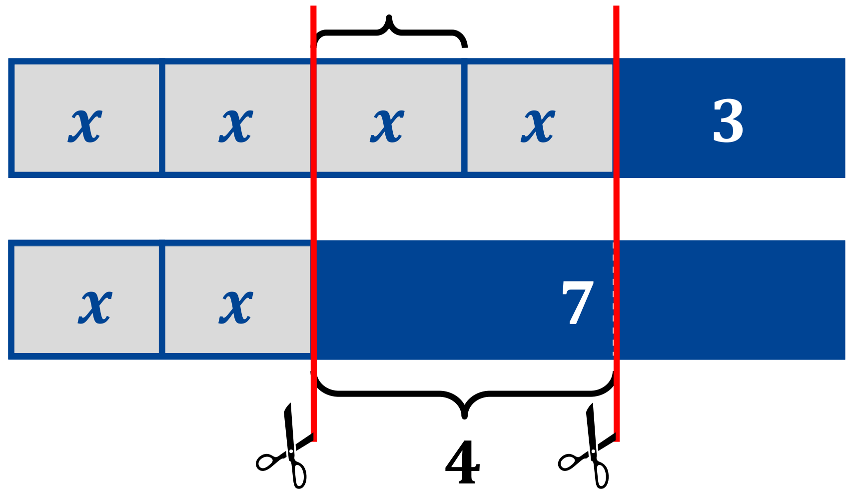
$$x = 9 : 3 = 3$$

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Streifenmethode für lineare Gleichungen

$$4x + 3 = 2x + 7$$

$$x = 4 : 2 = 2$$



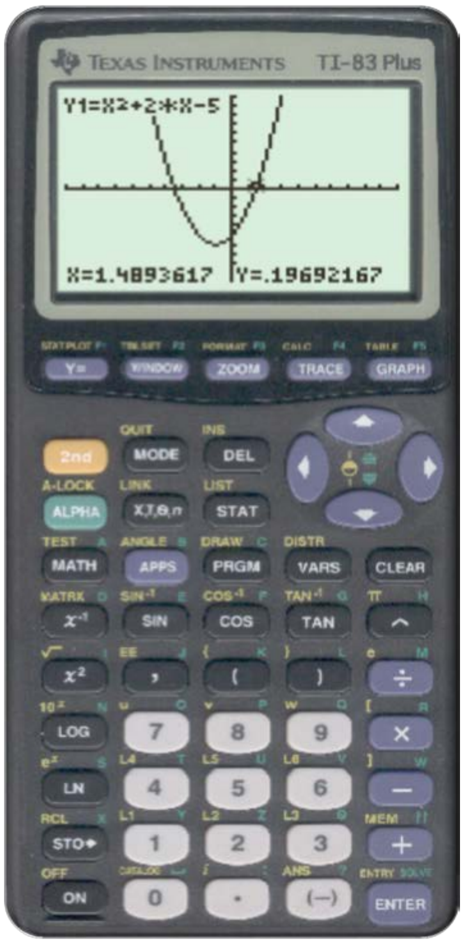
Systematisches Probieren

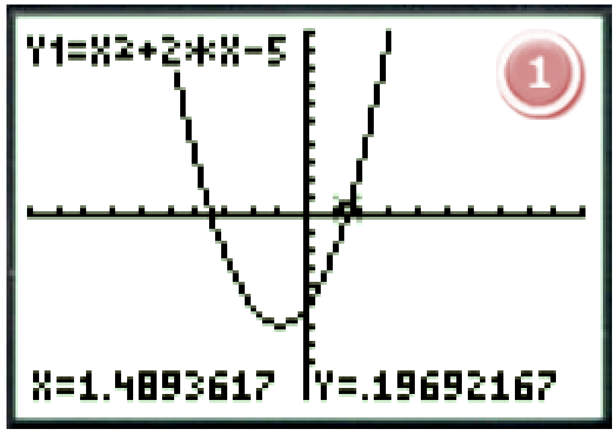
$$x^3 + x^2 - 1 = 0$$

x	$x^3 + x^2 - 1$
0	-1
1	1
$0{,}5$	$-0{,}625$
$0{,}8$	$0{,}125$
$0{,}7$	$-0{,}167$
$0{,}75$	$-0{,}015625$
$0{,}77$	$0{,}049433$
$0{,}76$	$0{,}016576$
$0{,}755$	$0{,}0003939$
$0{,}753$	$-0{,}006033$
$0{,}754$	$-0{,}002823$

Graphische Lösungsverfahren

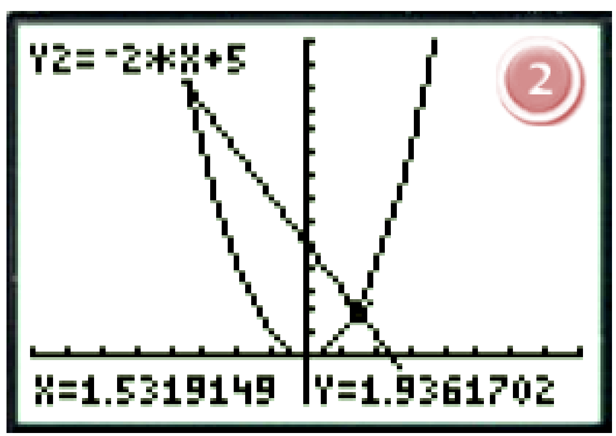
$x^2 + 2x - 5 = 0$





$x^2 + 2x - 5 = 0$

x-Koordinaten der Schnitt-punkte des zum (Funktions-) Term $x^2 + 2x - 5$ gehörenden Graphen mit der x-Achse

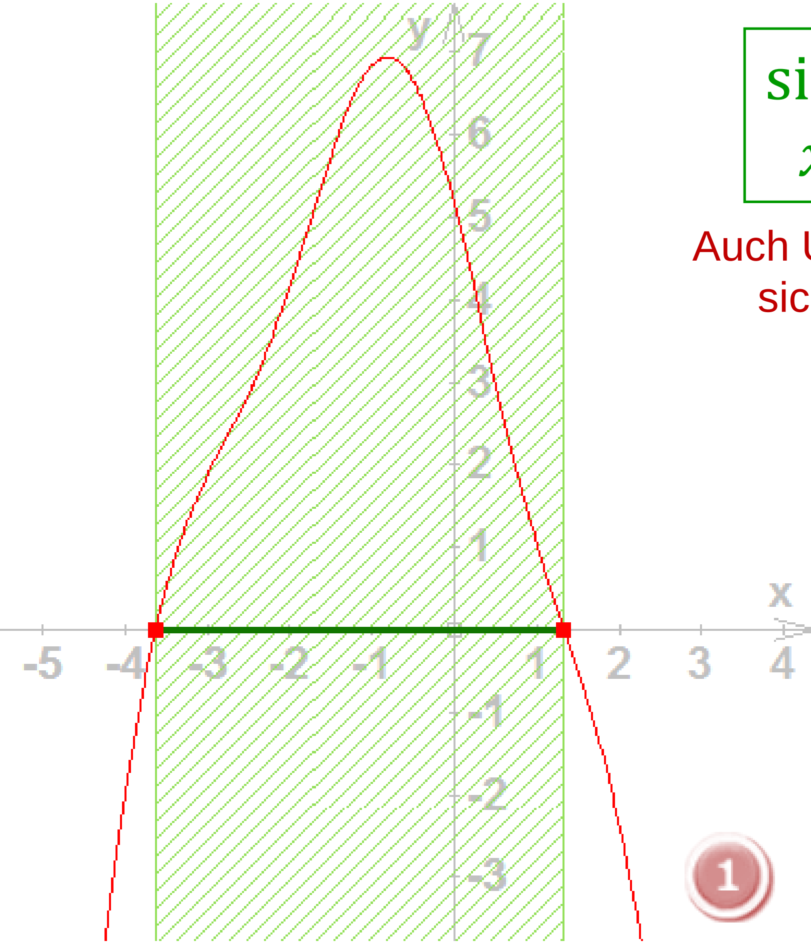


$x^2 = -2x + 5$

x-Koordinaten der Schnitt-punkte der zu den (Funktions-) Termen x^2 und $-2x + 5$ gehörenden Graphen

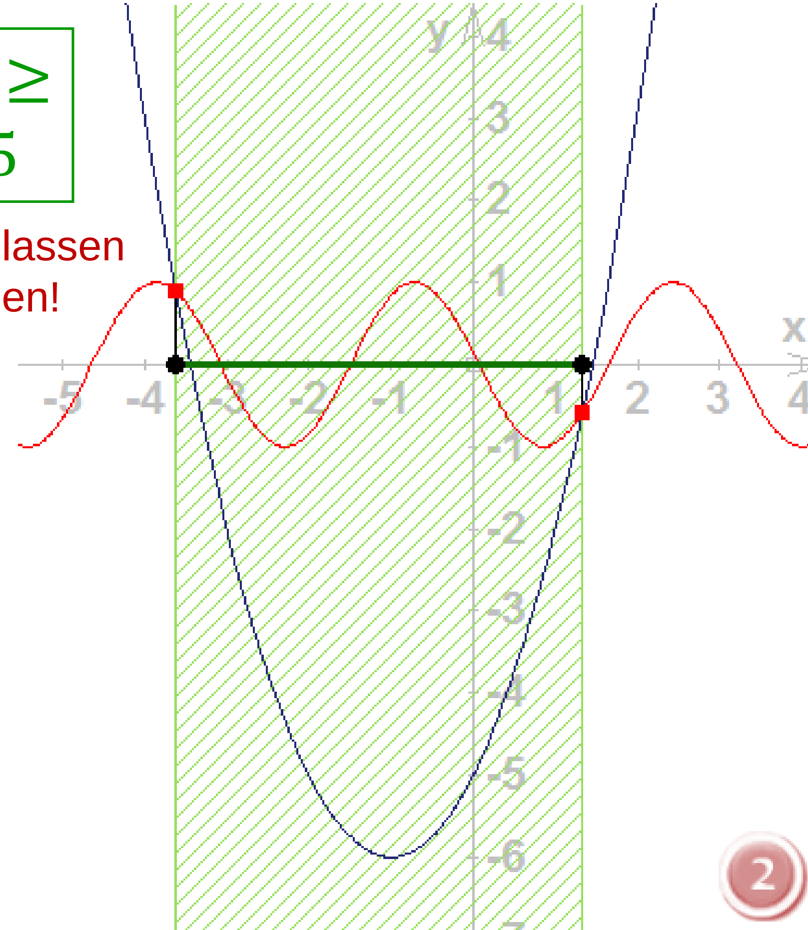
Graphische Lösungsverfahren

Abramovich (2014): One-Variable Equations and Inequalities: Computational Experiment and Formal Demonstration.
In: Computational Experiment Approach to Advanced Secondary Mathematics Curriculum. Dordrecht: Springer, p. 25 -36



$$\sin(2x+3) \geq x^2 + 2x - 5$$

Auch Ungleichungen lassen sich graphisch lösen!



$$\mathbf{\sin(2x+3) - (x^2 + 2x - 5) = 0}$$

$$\mathbf{\sin(2x+3) = x^2 + 2x - 5}$$

Numerisch-iterative Lösungsverfahren

$$1,5^x = 3 \cdot \cos(x)$$

Algorithmus

1. Wertetabelle für ein Intervall berechnen
2. Teilintervall auswählen, das eine Lösung enthält
3. Teilintervall spreizen und neue Wertetabelle berechnen
4. Wiederholen von 2. und 3. bis die Lösung genau genug ist

x	$1,5^x$	$3 \cdot \cos(x)$	$T_1(x) - T_2(x)$
-6	0,0878	2,8805	-2,7927
-5	0,1317	0,8510	-0,7193
-4	0,1975	-1,9609	2,1585
-3	0,2963	-2,9700	3,2663
-2	0,4444	-1,2484	1,6929
-1	0,6667	1,6209	-0,9542
0	1,0000	3,0000	-2,0000
1	1,5000	1,6209	-0,1209
2	2,2500	-1,2484	3,4984
3	3,3750	-2,9700	6,3450
4	5,0625	-1,9609	7,0234

Numerisch-iterative Lösungsverfahren

x	$1{,}5^x$	$3\cdot\cos(x)$	$T_1(x) - T_2(x)$
-2	0,4444	-1,2484	1,6929
-1,9	0,4628	-0,9699	1,4327
-1,8	0,4820	-0,6816	1,1636
-1,7	0,5019	-0,3865	0,8885
-1,6	0,5227	-0,0876	0,6103
-1,5	0,5443	0,2122	0,3321
-1,4	0,5669	0,5099	0,0570
-1,3	0,5903	0,8025	-0,2122
-1,2	0,6147	1,0871	-0,4723
-1,1	0,6402	1,3608	-0,7206
-1	0,6667	1,6209	-0,9542

x	$1{,}5^x$	$3\cdot\cos(x)$	$T_1(x) - T_2(x)$
-1,4	0,5669	0,5099	0,0570
-1,39	0,5692	0,5394	0,0297
-1,38	0,5715	0,5689	0,0025
-1,37	0,5738	0,5983	-0,0246
-1,36	0,5761	0,6277	-0,0516
-1,35	0,5785	0,6570	-0,0786
-1,34	0,5808	0,6863	-0,1054
-1,33	0,5832	0,7154	-0,1323
-1,32	0,5855	0,7445	-0,1590
-1,31	0,5879	0,7736	-0,1856
-1,3	0,5903	0,8025	-0,2122

Numerisch-iterative Lösungsverfahren …

- liefern im Prinzip beliebig viele Dezimalstellen einer Lösung.
- liefern Lösungen nicht als geschlossene Terme, sondern als abbrechende Dezimalbrüche vorgegebener Länge.
- liefern nur Lösungen aus einem endlichen Startintervall.
- funktionieren *nicht*, wenn die Gleichung von Parametern abhängt.
- beantworten *nicht* die Frage nach *allen* Lösungen einer Gl.
- genügen für die meisten praktischen Anwendungen.
- werden interaktiv vom Benutzer gesteuert.
  - Rechenpraxis: Automatisch ablaufende Verfahren.
  - Probleme: Startintervall, Konvergenzgeschwindigkeit, …

Ein Startintervall für diese Verfahren kann wie beim graphischen Lösen von Gleichung bestimmt werden.

Gegenoperatoren

$$x \cdot 3 + 4 = 19$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\cdot 3"] \arrow[d, phantom, "="] & x \cdot 3 \arrow[r, "+4"] & x \cdot 3 + 4 \arrow[d, phantom, "="] \\
5 & 15 \arrow[l, ":3"'] & 19 \arrow[l, "-4"']
\end{tikzcd}$$

$$x = 5$$

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Gegenoperatoren → Äquivalenzumformung

$$\boldsymbol{x \cdot 3 + 4 = 19}$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\cdot 3"] \arrow[d, phantom, "="] & x \cdot 3 \arrow[r, "+4"] & x \cdot 3 + 4 \arrow[d, phantom, "="] \\
5 & 15 \arrow[l, ": 3"'] & 19 \arrow[l, "-4"']
\end{tikzcd}$$

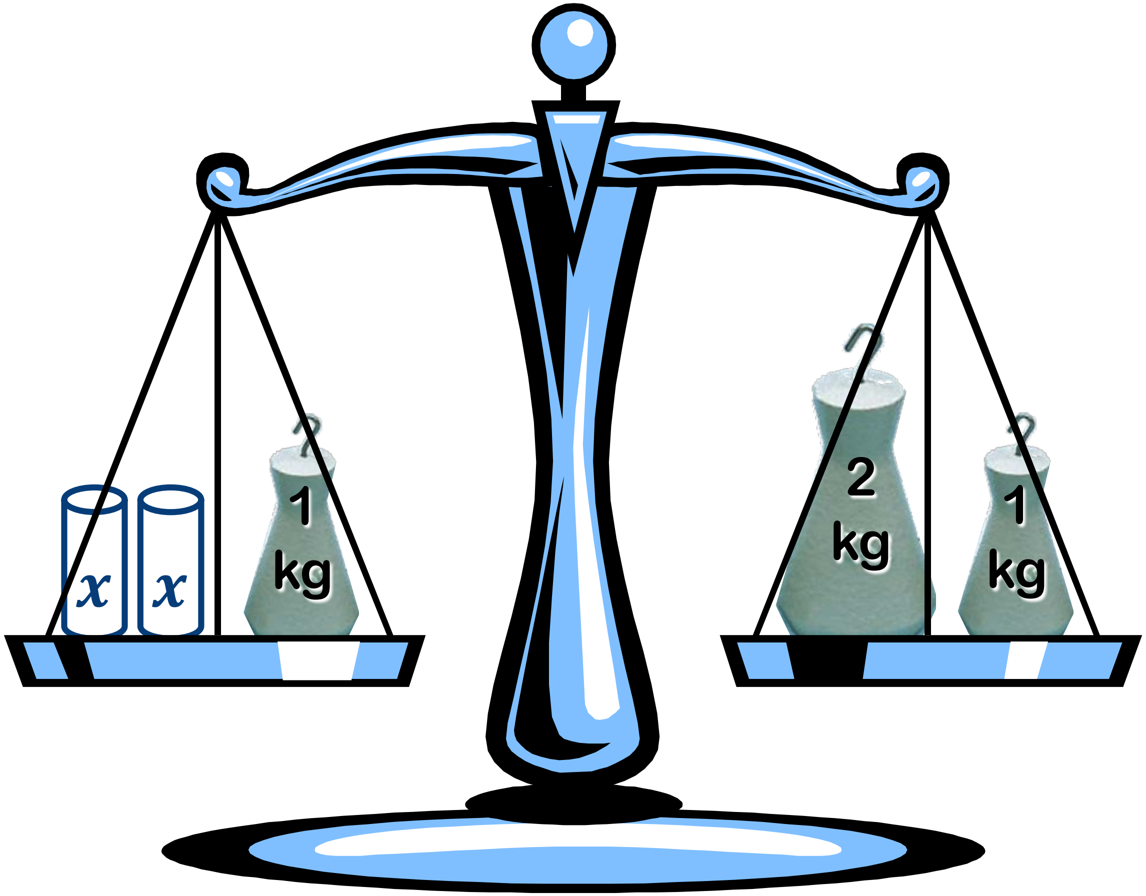
$$\boldsymbol{x = 5}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & x \cdot 3 + 4 = 19 & \\
-4 & & -4 \\
 & x \cdot 3 = 15 & \\
:3 & & :3 \\
 & x = 5 &
\end{array}$$

Äquivalenzumformungen im Waagemodell

$$2x + 1 = 3$$

1 kg auf beiden Seiten wegnehmen.



$$2x + 1 = 3$$

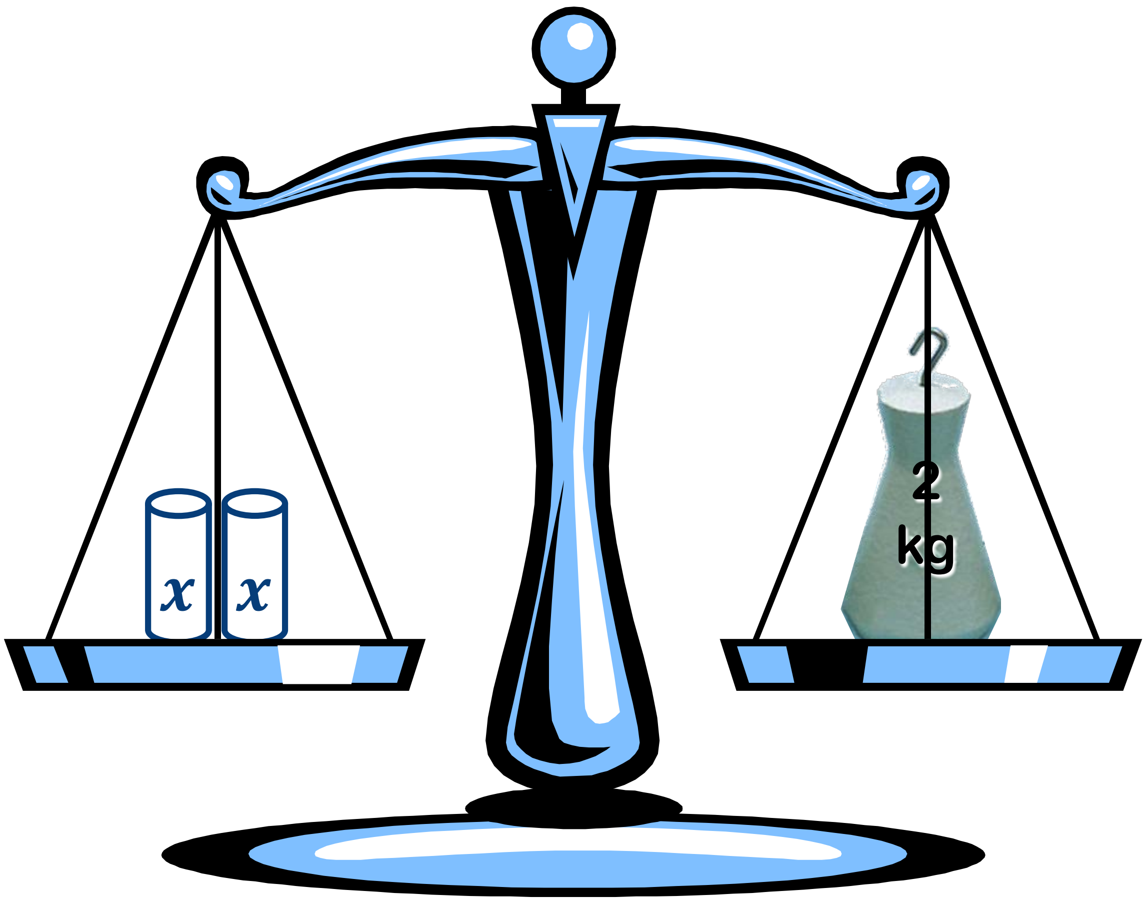
Äquivalenzumformungen im Waagemodell

$$2x + 1 = 3$$

1 kg auf beiden Seiten wegnehmen.

$$2x = 2$$

Massen auf beiden Seiten halbieren.



$$2x = 2$$

Äquivalenzumformungen im Waagemodell

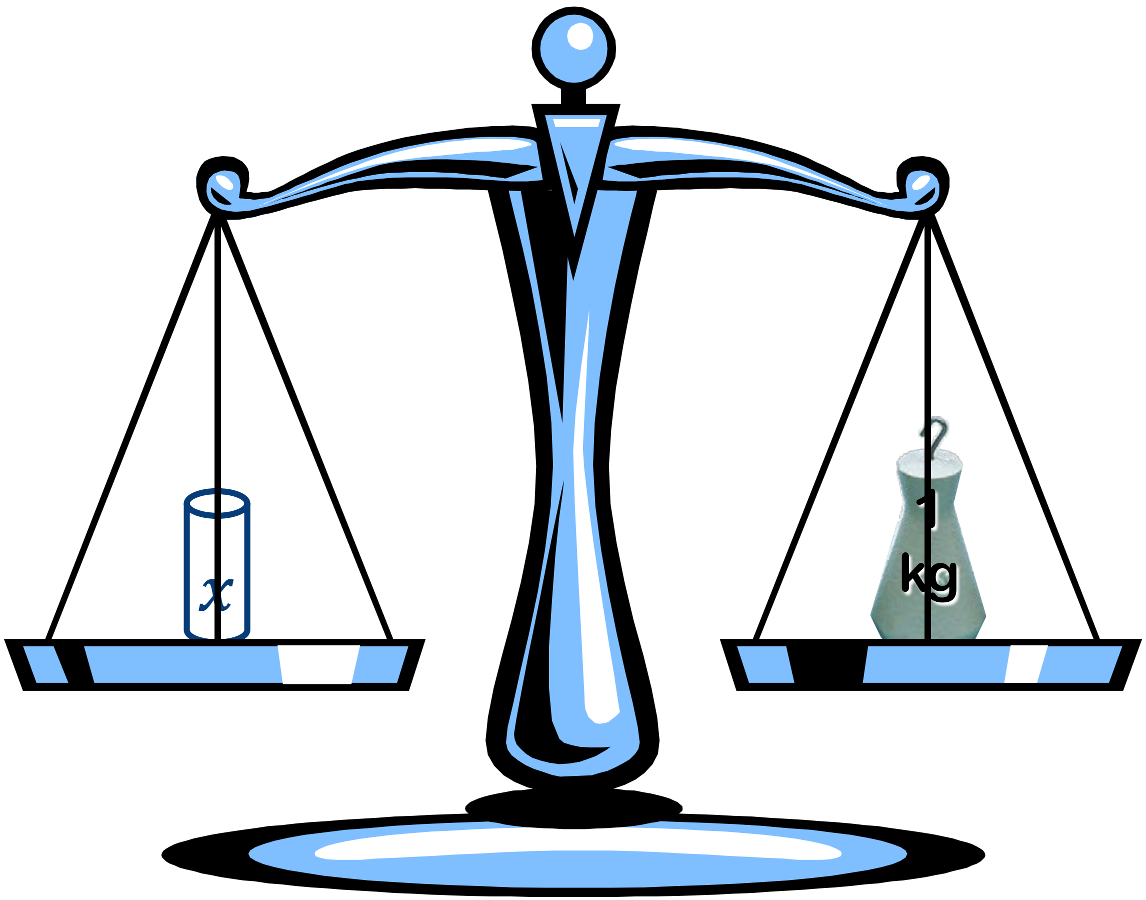
$$2x + 1 = 3$$

1 kg auf beiden Seiten wegnehmen.

$$2x = 2$$

Massen auf beiden Seiten halbieren.

$$x = 1$$



$$x = 1$$

Äquivalenzumformungen im Waagemodell

Waagemodell

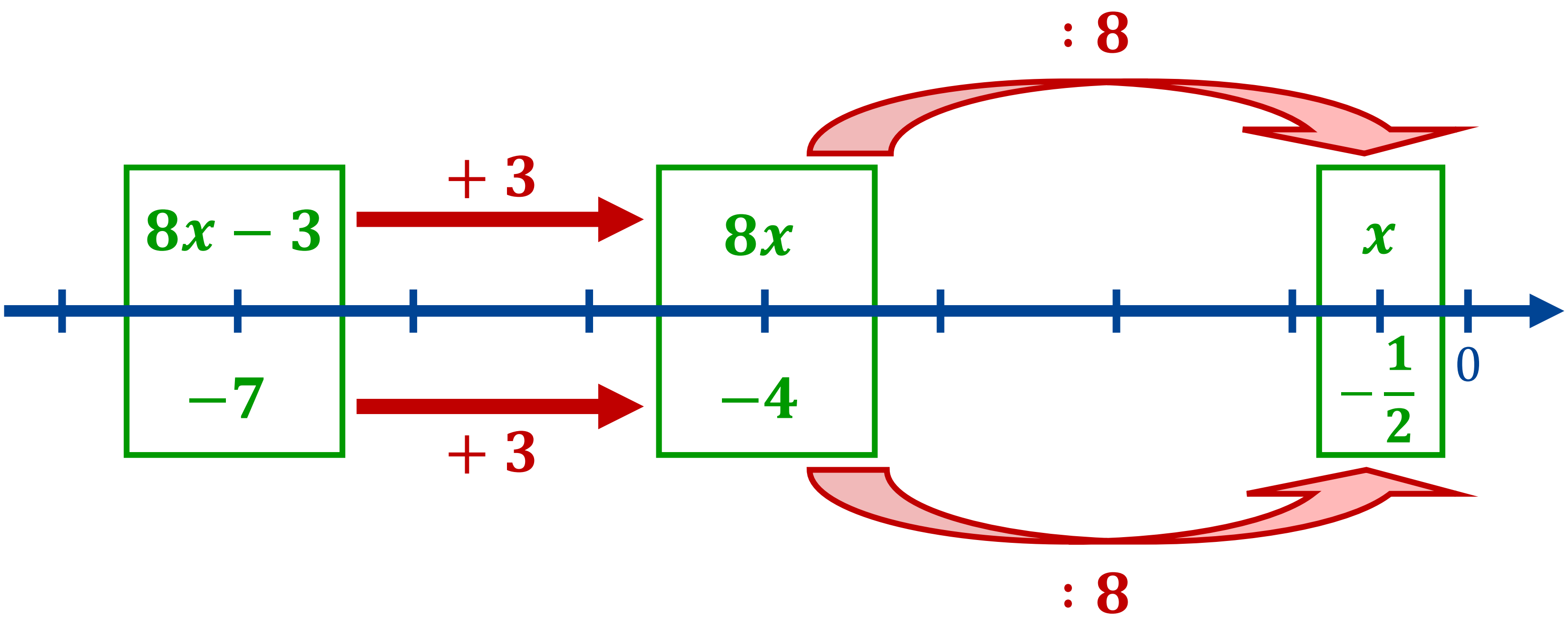
- lässt sich in einfachen Fällen gut zur Veranschaulichung nutzen.
- ist, wie jedes Modell, nur begrenzt nutzbar!

  (vgl. etwa negative Zahlen, irrationale Zahlen, schwierig bei Bruchzahlen, Division, Multiplikation, …)

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Äquivalenzumformungen im Modell der Zahlengeraden

$$8x - 3 = -7$$



$$x = -\frac{1}{2}$$

Äquivalenzumformungen

$$8x + 2 - 3x + 5 = 17$$

Zusammenfassen:

$$5x + 7 = 17$$

Beidseitig 7 subtrahieren:

$$5x + 7 = 17 \quad | - 7$$

$$5x = 10$$

Beidseitig durch 5 dividieren:

$$5x = 10 \quad | : 5$$

$$x = 2$$

Äquivalenzumformungen
Umformungsregeln

$\boldsymbol{a = b}$ ist äquivalent zu $\boldsymbol{a + c = b + c}$

$\boldsymbol{a = b}$ ist äquivalent zu $\boldsymbol{a - c = b - c}$

$\boldsymbol{a = b}$ ist für $c \neq 0$ äquivalent zu $\boldsymbol{a \cdot c = b \cdot c}$

$\boldsymbol{a = b}$ ist für $c \neq 0$ äquivalent zu $\boldsymbol{a : c = b : c}$

Anwenden von Lösungsformeln

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

oder

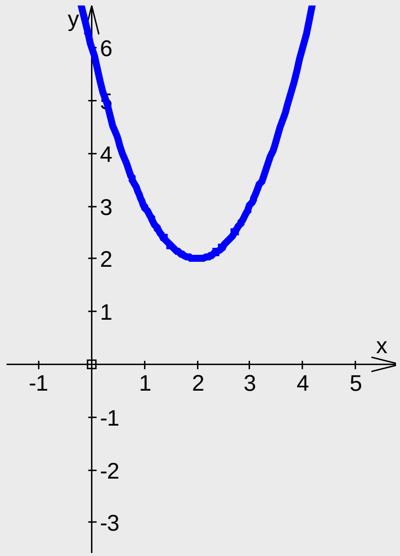
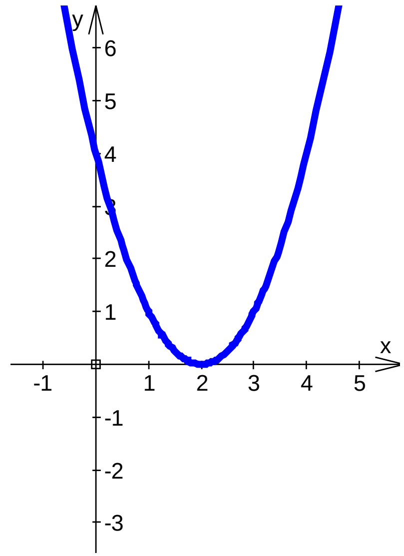
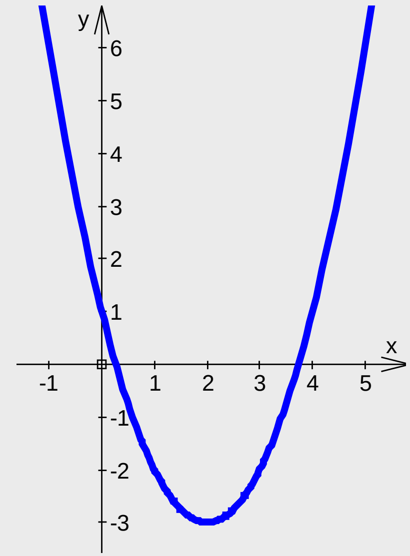
$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

oder

$$x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

keine Lösung	eine Lösung	zwei Lösungen
$b^2 - 4ac < 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac > 0$
		
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$

Quadratische Gleichungen
Lösungsformel

- **Grundsätzliches:**
  - Jede quadratische Gleichung lässt sich in die Form
$$ax^2 + bx + c = 0$$
mit $a \neq 0$ (Sonst ist die Gleichung nicht quadratisch.) schreiben.
  - Die Gleichung muss so umgeformt werden, dass nur ein quadratisches „x-Glied“ vorkommt, aber kein zusätzliches lineares.
  - **Idee:** Anwendung der „Plusformel“/1. Binomischen Formel
$$(a+b)^2 = a^2 + \boxed{2ab} + b^2 \quad (*)$$
  - Um die binomische Formel von rechts nach links anwenden zu können, muss der Summenterm quadratisch ergänzt werden.

Quadratische Gleichungen
Lösungsformel

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$(a+b)^2 = a^2 + \boxed{2ab} + b^2 \ (*)$$

Die Wurzel darf nur gezogen werden, wenn $b^2 - 4ac \geq 0$. Wegen $\sqrt{x^2} = |x|$ gilt dann:

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}$$

Quadratische Gleichungen
Lösungsformel

Hier sind genau genommen vier Fallunterscheidungen notwendig, von denen aber je zwei zusammen fallen. Damit ergibt sich:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, & falls \left(x + \frac{b}{2a} \geq 0 \wedge a > 0\right) \vee \left(x + \frac{b}{2a} < 0 \wedge a < 0\right) \\ x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, & falls \left(x + \frac{b}{2a} < 0 \wedge a > 0\right) \vee \left(x + \frac{b}{2a} \geq 0 \wedge a < 0\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, & falls \left(x + \frac{b}{2a} \geq 0 \wedge a > 0\right) \vee \left(x + \frac{b}{2a} < 0 \wedge a < 0\right) \\ x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, & falls \left(x + \frac{b}{2a} < 0 \wedge a > 0\right) \vee \left(x + \frac{b}{2a} \geq 0 \wedge a < 0\right) \end{cases}$$

Satz von Vieta: Bei einer quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

gilt für die Parameter p, q und die Lösungen x_1, x_2 der Gleichung:

$$p = -(x_1 + x_2) \quad \text{und} \quad q = x_1 \cdot x_2$$

Beispiel:
$x^2 - 5x + 6 = 0$

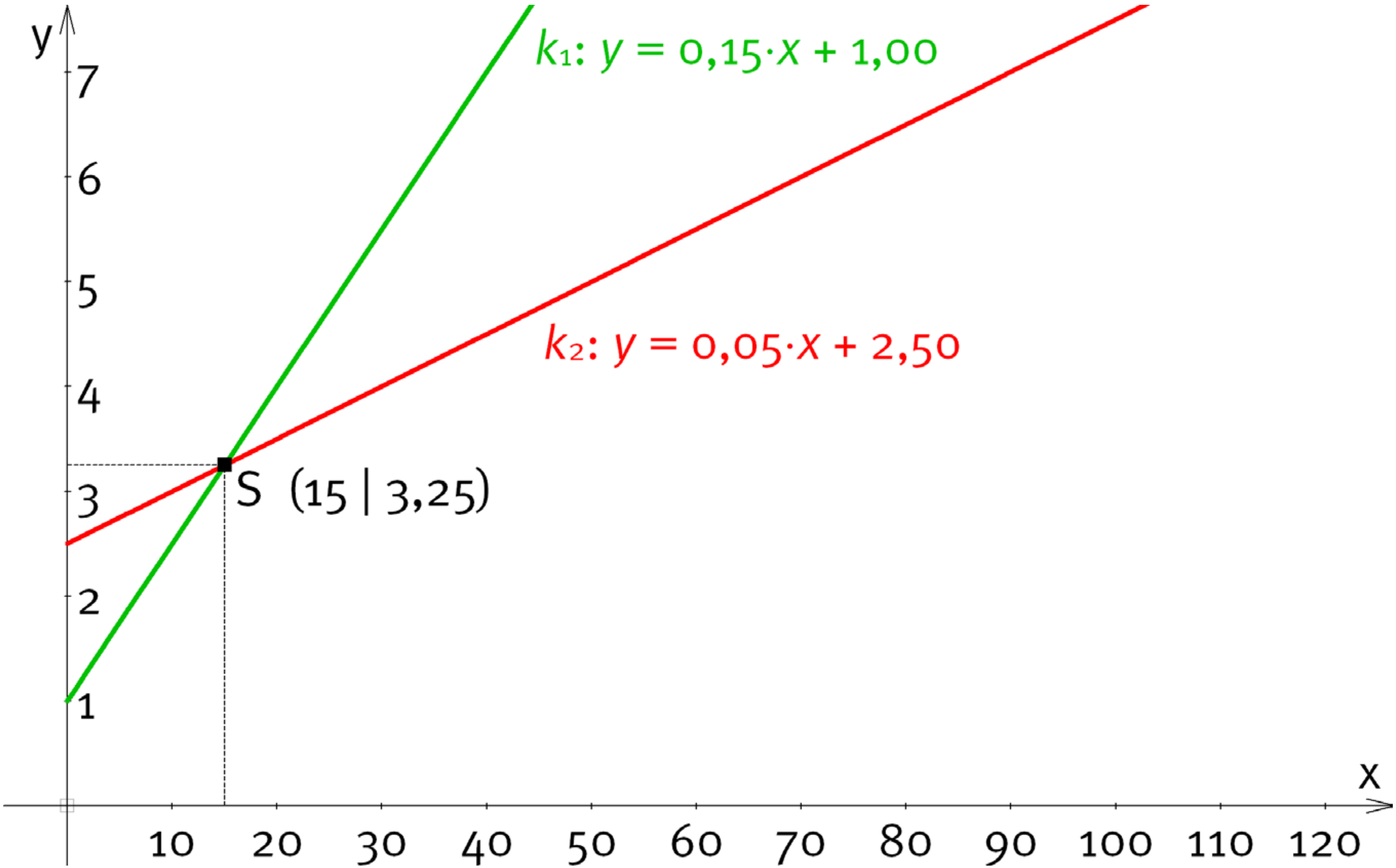
Kapitel 4: Gleichungen

4.3 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Günstigster Handy-Tarif

- **Tarif 1: Geringe Grundgebühr**
  - Monatliche Grundgebühr: $g_1 = 1{,}00$ €
  - Preis pro Einheit, „Minutenpreis“: $m_1 = 0{,}15$ €
  - Telefoneinheiten (Minuten): x
  - Monatliche Kosten: $k_1(x) = m_1 \cdot x + g_1$
- **Tarif 2: Geringer Minutenpreis**
  - Monatliche Grundgebühr: $g_2 = 2{,}50$ €
  - Preis pro Einheit, „Minutenpreis“: $m_2 = 0{,}05$ €
  - Telefoneinheiten (Minuten): x
  - Monatliche Kosten: $k_2(x) = m_2 \cdot x + g_2$
- **Ab wie vielen Telefoneinheiten ist Tarif 2 günstiger?**

Günstigster Handy-Tarif



Günstigster Handy-Tarif

- **Gesucht**
  ist zunächst ein Paar $(x|y)$, das die beiden Gleichungen

  $k_1: y = 0{,}15x + 1$ (I)

  $k_2: y = 0{,}05x + 2{,}5$ (II)

  gleichzeitig erfüllt, also eine Lösung für dieses **lineare Gleichungssystem** darstellt.

- **Lösungsverfahren (Sek. I)**
  für lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Variablen (Unbekannten):
  - Gleichsetzungsverfahren
  - Additionsverfahren
  - Einsetzungsverfahren

- **Ziel**
  Eliminieren einer Variable, um zu einer Gleichung mit einer Unbekannten zu kommen, die einfach gelöst werden kann.

Günstigster Handy-Tarif

(I) $y = 0{,}15 \cdot x + 1$

(II) $y = 0{,}05 \cdot x + 2{,}5$

Gleichsetzungsverfahren

- Gleichsetzen von (I) und (II) liefert:

$$\begin{aligned} 0{,}15 \cdot x + 1 &= 0{,}05 \cdot x + 2{,}5 && |-0{,}05 \cdot x \quad |-1 \\ 0{,}1 \cdot x &= 1{,}5 && |\cdot 10 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

- Einsetzen in (II) liefert:

$$\begin{aligned} y &= 0{,}05 \cdot 15 + 2{,}5 \\ &= 0{,}75 + 2{,}5 \\ &= 3{,}25 \end{aligned}$$

- Die Lösung ist das geordnete Paar $(15|3{,}25)$.

Additionsverfahren

- Subtraktion der Gleichung (II) von der Gleichung (I), also (I) – (II), liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= 0{,}1 \cdot x - 1{,}5 && |+1{,}5 \\ 1{,}5 &= 0{,}1 \cdot x && |\cdot 10 \\ 15 &= x \end{aligned}$$

- Einsetzen in (II) liefert:

$$\begin{aligned} y &= 0{,}05 \cdot 15 + 2{,}5 \\ &= 0{,}75 + 2{,}5 \\ &= 3{,}25 \end{aligned}$$

- Die Lösung ist das geordnete Paar $(15|3{,}25)$.

Günstigster Handy-Tarif

(I) $y = 0{,}15 \cdot x + 1$

(II) $y = 0{,}05 \cdot x + 2{,}5$

Einsetzungsverfahren

- Auflösen der Gleichung (II) nach x liefert:

$$y = 0{,}05 \cdot x + 2{,}5 \quad |-2{,}5$$

$$y - 2{,}5 = \frac{5}{100} \cdot x \quad |:\frac{5}{100}$$

$$20 \cdot (y - 2{,}5) = x$$

- Einsetzen in (I) liefert:

$$y = \frac{15}{100} \cdot [20 \cdot (y - 2{,}5)] + 1$$

$$y = 3 \cdot (y - 2{,}5) + 1$$

$$y = 3y - 7{,}5 + 1$$

$$y = 3y - 6{,}5 \quad |-y \quad |+6{,}5$$

$$6{,}5 = 2y \quad |:2$$

$$3{,}25 = y$$

- Einsetzen in (II) liefert:

$$3{,}25 = 0{,}05 \cdot x + 2{,}5 \quad |-2{,}5$$

$$0{,}75 = \frac{5}{100} \cdot x \quad |:\frac{5}{100}$$

$$15 = x$$

- Die Lösung ist das geordnete Paar $(15|3{,}25)$.

Lösungen linearer Gleichungssysteme

Satz

- Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Die zugehörige Lösungsmenge ist entweder

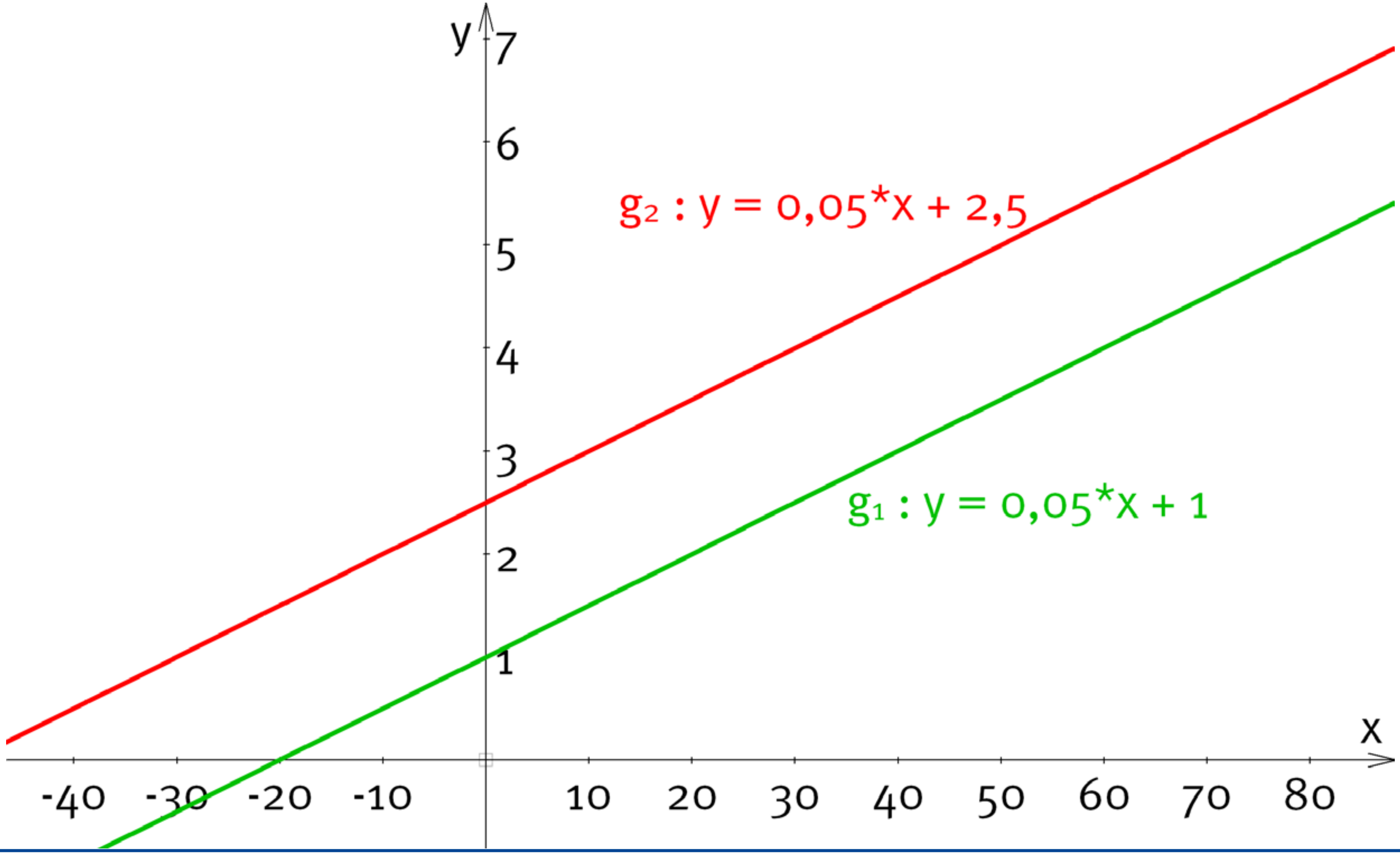
- leer,
- ein geordnetes Zahlenpaar $(x|y)$ oder
- eine unendliche Menge von Zahlenpaaren.

Bemerkung

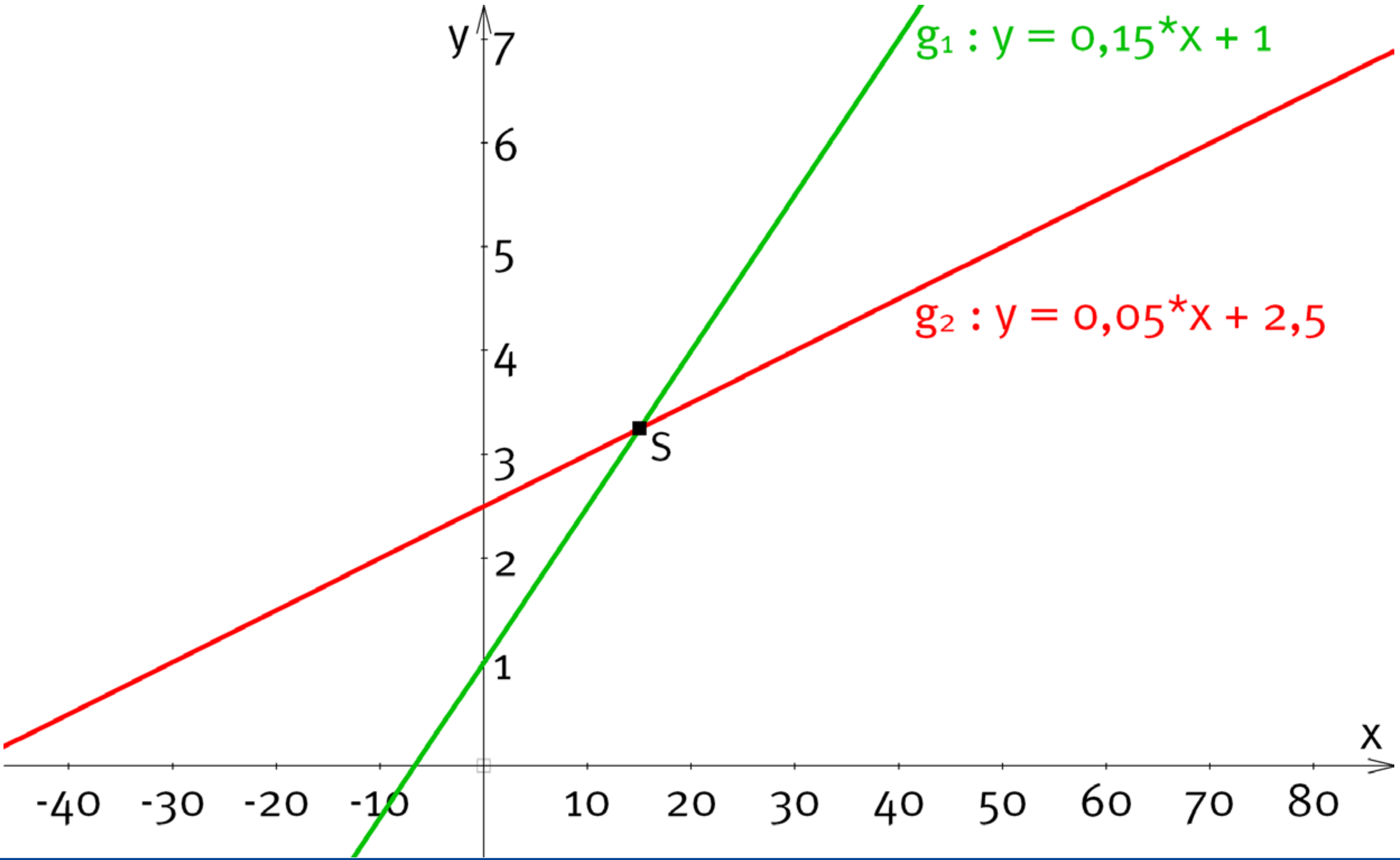
- Graphisch interpretiert entsprechen diese drei Fälle genau den möglichen Lagebeziehungen der beiden durch $a_1x + b_1y = c_1$ und $a_2x + b_2y = c_2$ gegebenen Geraden.

Lösungen linearer Gleichungssysteme

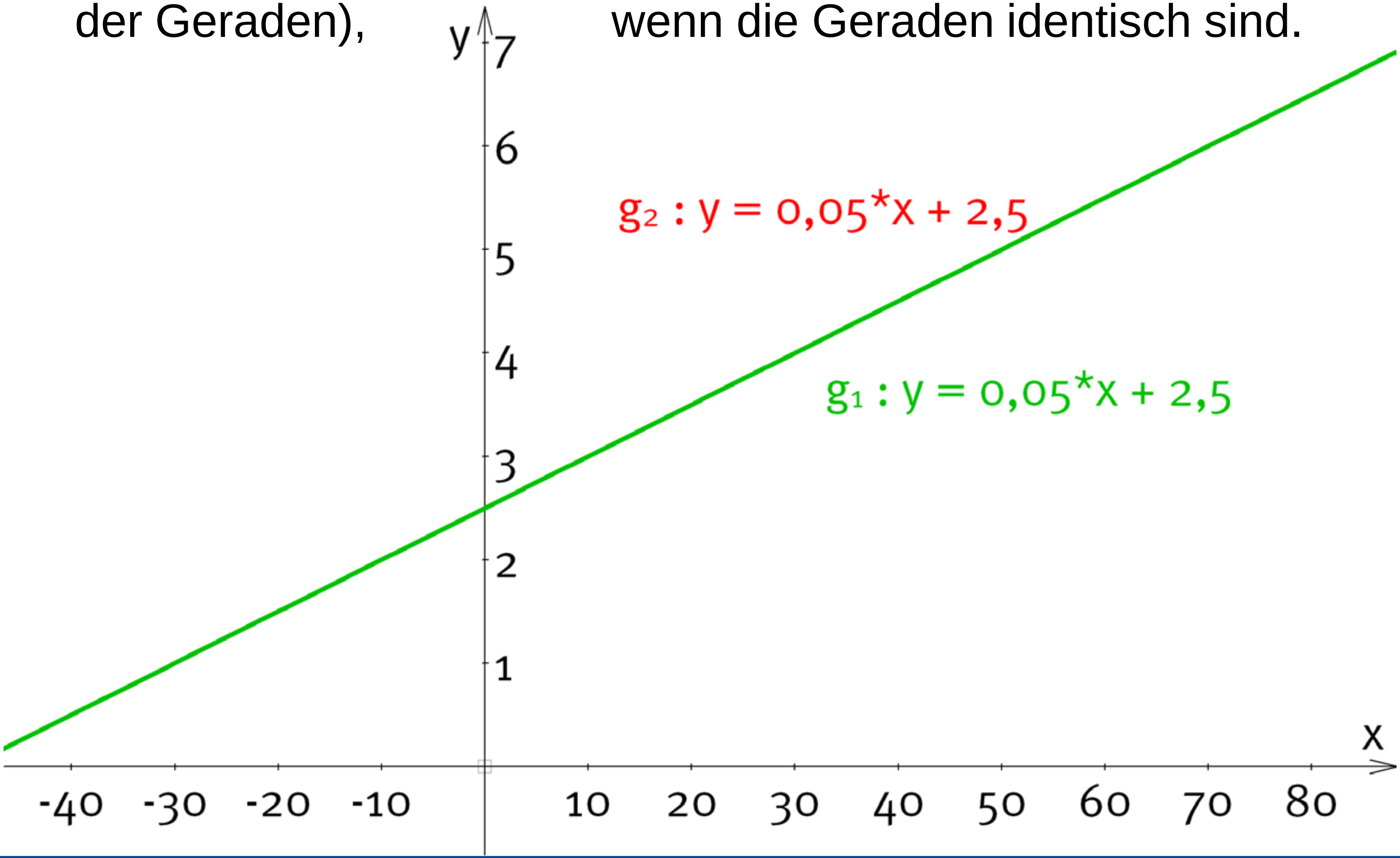
- **Die Lösungsmenge ist**
  - leer, wenn die Geraden parallel sind.



- **Die Lösungsmenge ist**
  - ein geordnetes Paar (ein Punkt), wenn die Geraden sich schneiden.



- **Die Lösungsmenge ist**
  - eine unendliche Menge von geordneten Zahlenpaaren (alle Punkte der Geraden), wenn die Geraden identisch sind.



Kapitel 4: Gleichungen

4.4 Gleichungen in der Sekundarstufe I

Gleichungen in der Sekundarstufe I

- **Orientierungsstufe**
  - Einfache Gleichungen (mit einer Variablen) lösen
- **7./8. Klasse**
  - Wertetabellen zu Termen; Grundmenge (ggf. Definitionsmenge)
  - Äquivalenz von Termen und von Gleichungen bzw. Ungleichungen; Grundmenge (ggf. Definitionsmenge)
  - Gleichungen und Ungleichungen über verschiedenen Grundmengen, Lösungsmenge, Intervalle
  - Äquivalenzumformungen (ÄU) bei Gleichungen und Ungleichungen der Form $ax + b = c$
  - Sachaufgaben (SA) (auch offene Aufgaben, Aufgabenvariation)
  - Proportionalität: fehlende Größen berechnen, SA, grafische Lös.

Gleichungen in der Sekundarstufe I

- **7./8. Klasse** (Fortsetzung)
  - lineare Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen
  - Textaufgaben; Lösen ggf. mithilfe einer Text-Term-Tabelle
  - $\wedge$-Verknüpfung bzw. $\vee$-Verknüpfung von linearen Gleichungen bzw. Ungleichungen
  - einfache Bruchgleichungen mit einer Variablen
  - Relation und Umkehrrelation: Zusammenhang zwischen deren Gleichungen bzw. Ungleichungen; Umkehrfunktion
  - Funktionen mit Gleichungen folgender Form:
    $$y = mx \quad \text{bzw.} \quad y = mx + t$$
  - lineare Ungleichungen mit zwei Variablen
  - einfache Bruchgleichungen mit einer Variablen
    $$\frac{T_1(x)}{T_2(x)} = \frac{T_3(x)}{T_4(x)}$$

9./10. Klasse

- Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen:
  - grafische und algebraische Lösung (Gleichsetzungsverfahren, Einsetzungsverfahren, Additionsverfahren);
  - auch Aufgaben mit geometrischen Problemstellungen algebraisch lösen
- Systeme linearer Ungleichungen mit zwei Variablen:
  - grafische Lösung
- quadratische Gleichungen:
  - grafische Lösung, Lösen mit quadratischer Ergänzung, Lösungsformel; Diskriminante und Lösbarkeit
  - quadratische Gleichungen mit Parametern; Satz des Vieta mit Anwendungen; quadratische Ungleichungen
- einfache Wurzelgleichungen
  - Beachtung der Definitionsmenge; Äquivalenzumformungen

- **9./10. Klasse** (Fortsetzung)
  - Berechnen der Koordinaten der Schnittpunkte von Funktionsgraphen
    - (maximal quadratische Bestimmungsgleichungen mit maximal einem Parameter)
  - Tangentialprobleme und Diskriminante
  - Gleichungen der Form
    $$a \cdot b^{x+c} + d = 0$$
  - Trigonometrische Gleichungen