

Lösungshinweise zum 11. Übungsblatt

1. Raute

Ein Viereck mit vier kongruenten Seiten heißt Raute.

a) Beweisen Sie:

Eine Raute besitzt zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen, die beiden Diagonalgeraden (Geraden durch gegenüberliegende Eckpunkte).

3 BE

b) Geben Sie zwei (weitere) Eigenschaften der Raute an, die direkt aus der Aussage in a) folgen und begründen Sie diese kurz. (Hier sind keine formalen Beweise gefordert!)

2 BE

a) Es ist die Raute $ABCD$ gegeben.

Per Definition gilt: $[AB] \cong [BC] \cong [CD] \cong [DA]$

Daraus folgt mit Satz 1.13 direkt: B und D liegen auf der Symmetrieachse zu A und C , es gilt also $S_{BD}(A) = C$ und $S_{BD}(C) = A$ (S_{BD} ist involutorisch) sowie $S_{BD}(B) = B$ und $S_{BD}(D) = D$ (Achsenpunkte sind Fixpunkte). Insgesamt gilt also $S_{BD}(ABCD) = ABCD$ und damit ist die Diagonale BD Symmetrieachse der Raute $ABCD$.

Mit Satz 1.13 folgt auch: A und C liegen auf der Symmetrieachse zu B und D , es gilt also $S_{AC}(B) = D$ und $S_{AC}(D) = B$ (S_{AC} ist involutorisch) sowie $S_{AC}(A) = A$ und $S_{AC}(C) = C$ (Achsenpunkte sind Fixpunkte). Insgesamt gilt also $S_{AC}(ABCD) = ABCD$ und damit ist die Diagonale AC Symmetrieachse der Raute $ABCD$.

Aus $S_{AC}(B) = D$ und $S_{AC}(D) = B$ folgt mit Satz 1.19, dass BD Fixgerade bzgl. S_{AC} ist und damit nach Definition 1.19 senkrecht auf AC steht.

#

b) Eigenschaften der Raute:

- Die Raute ist ein Parallelogramm.

Begründung: Die beiden Diagonalen bilden $ABCD$ jeweils auf sich selbst ab und stehen senkrecht aufeinander, da sie jeweils Fixgeraden bzgl. der anderen Abbildung sind. Damit stellt ihre Verkettung eine Punktspiegelung am Diagonalschnittpunkt dar.

- In einer Raute sind die Diagonalen auch Winkelhalbierende entsprechender Innenwinkel.

Begründung: Die von den Diagonalen erzeugten Teile der Innenwinkel werden bei Geradenspiegelung an der Diagonalen auf sich selbst abgebildet und sind damit kongruent.

- Gegenüberliegende Winkel in einer Raute sind kongruent.

Begründung: Sie werden bei der Achsenspiegelung an der Diagonalen, die nicht durch ihren Scheitel verläuft aufeinander abgebildet.

2. Flächeninhalt des Dreiecks

Beweisen Sie:

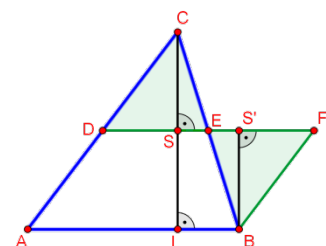
Ist g die Länge einer Dreiecksseite (gewählte Grundseite) und h_g die zugehörige Höhe, dann gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$$

4 BE

Beweis:

- Sei o.B.d.A. $[AB] = c$ die gewählte Dreiecksseite des Dreiecks ABC und h_c die zugehörige Höhe, also die Länge $|CL|$ der Lotstrecke des von C auf AB gefällten Lotes.
- Nach Satz 3.10 gibt es ein Parallelogramm, dass mit ABC in der Seite $[AB]$ übereinstimmt und zerlegungsgleich zu ABC ist.



- (3) Die Mittelparallele von ABC bzgl. der Seite $[AB]$ schneidet nach Satz 2.39 die Seiten $[BC]$ im Punkt E mit $[BE] \cong [CE]$ und die Seite $[AC]$ im Punkt D mit $[AD] \cong [DC]$.
- (4) Das Dreieck DEC wird am Punkt E gespiegelt. Dabei gilt:
- $P_E(E) = E$ [Definition Punktspiegelung]
 - $P_E(D) = F \wedge F \in DE \parallel AB$ [Definition Punktspiegelung]
 - $P_E([CD]) = [BF] \wedge BF \parallel CD$ [paralleltreue der P.sp.]
 - Aus i., ii. und iii. folgt:
 $P_E(DEC) = FEB \wedge ABFD$ ist ein Parallelogramm, das zerlegungsgleich zum Dreieck ABC ist.
- (5) Die Höhe des Parallelogramms $ABFD$ bzgl. der Seite $[AB]$ ist der Abstand $d(AB, DE)$ der beiden parallelen Geraden AB und DE . Wegen $[EF] \subset DE$ und $B \in AB$ ist die Höhe des Parallelogramms identisch mit der zur Seite $[EF]$ gehörenden Höhe $|BS'|$ (Vgl. die Skizze bzgl. der Bezeichnungen) des Dreiecks FEB .
- Insgesamt ergibt sich: $|LS| = d(AB, DE) = |BS'|$
- (6) Wegen $DE \parallel AB$ und Satz 1.26 ist das von C auf AB gefällten Lot auch Senkrechte zur Geraden DE . Damit ist $|CS|$ die Höhe des Dreiecks DEC bzgl. der Seite $[DE]$.
- (7) Wegen der Längen- und Paralleltreue der Punktspiegelung folgt mit (5):
 $|CS| = |BS'| = d(AB, DE)$
- (8) $h_c = |CL| = |CS| + |LS| = d(AB, DE) + d(AB, DE) = 2 \cdot d(AB, DE) \Rightarrow d(AB, DE) = \frac{1}{2} \cdot h_c$
- (9) $A_{\text{Parallelogramm } ABFD} = g \cdot h_g = c \cdot d(AB, DE) = c \cdot \frac{1}{2} \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

#

3. Kathetensatz

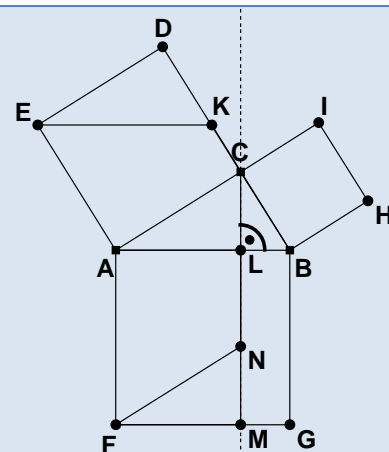
Definition: Ein Quadrat ist ein Rechteck mit vier kongruenten Seiten.

Beweisen Sie:

Bei jedem rechtwinkligen Dreieck hat ein Kathetenquadrat denselben Flächeninhalt wie ein Rechteck mit der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt als Seitenlängen.

Hinweis:

Zeigen Sie (mit den Bezeichnungen in der Figur), dass gilt: $A_{FMLA} = A_{FNCA} = A_{BKEA} = A_{CDEA}$



7 BE

- (1) Zu zeigen: $A_{CDEA} = A_{BKEA}$
- Zu zeigen: $B \in DC$
 - $DC \perp AC$ [Trägergeraden benachbarter Seiten im Quadrat $CDEA$.]
 - $BC \perp AC$ [Trägergeraden der Seiten die im rechtwinkligen Dreieck ABC am rechten Winkel anliegen.]
 - $BC = DC$ [Nach Satz 1.21 gibt es zur Geraden AC im Punkt C genau eine Senkrechte.]
 - Also gilt: $B \in DC$
 - Zu zeigen: $BKEA$ ist ein Parallelogramm.
 - $BKEA$ entsteht dadurch, dass man durch E die Parallele g zu AB einzeichnet.
 - K ist der Schnittpunkt von g mit DC .
 - DC ist Trägergerade von $[BK]$ [$K, B \in DC$]
 - $DC \parallel EA$ [Trägergeraden gegenüberliegender Seiten im Quadrat $ACDE$]

Wegen $EK = g \parallel AB$ und $DC \parallel EA$ ist $ABKE$ ein Parallelogramm.

- Das Kathetenquadrat $CDEA$ ist ein besonderes Parallelogramm. Beide Parallelogramme $BKEA$ und $CDEA$ haben dieselbe Grundseite, nämlich $[AE]$, und, weil AE parallel zu DC ist, auch dieselbe Höhe $|AC|$, den Abstand der beiden parallelen Geraden.
- Nach Satz 3.11 sind Parallelogramme die in der Länge einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen zerlegungsgleich und damit flächeninhaltsgleich. Es gilt also: $A_{CDEA} = A_{BKEA}$

(2) Zu zeigen: $A_{FMLA} = A_{FNCA}$

- Zu zeigen: $AF \parallel CM$
 $CM \perp AB$ [Lotgerade zu AB durch C .]
 $AF \perp AB$ [Trägergeraden benachbarter Seiten im Quadrat $FGBA$.]
 $AF \parallel CM$ [Nach Satz 1.22 sind Geraden parallel zueinander, wenn beide senkrecht auf einer dritten Geraden stehen.]
- Zu zeigen: $FNCA$ ist ein Parallelogramm.
 $FNCA$ entsteht dadurch, dass man durch F die Parallele k zu AC einzeichnet.
 N ist der Schnittpunkt von k mit CM .
Wegen $FN = k \parallel AC$ und $AF \parallel CM$ ist $FNCA$ ein Parallelogramm.
- Zu zeigen: $FMLA$ ist ein Rechteck und damit ein besonderes Parallelogramm.
 $CM \perp AB$ [Lotgerade zu AB durch C .]
 $CM \perp FG$ [Folgt aus $FG \parallel AB$ (Trägergeraden gegenüberliegender Seiten des Quadrats $FGBA$) und $CM \perp AB$ mit Satz 1.26]
 $AF \perp AB$ [Trägergeraden benachbarter Seiten im Quadrat $FGBA$.]
 $AF \perp FG$ [Trägergeraden benachbarter Seiten im Quadrat $FGBA$.]
Damit ist $FMLA$ ein Viereck mit vier rechten Innenwinkeln, folglich ein Rechteck und als solches ein spezielles Parallelogramm.
- Beide Parallelogramme $FMLA$ und $FNCA$ haben dieselbe Grundseite, nämlich $[AF]$, und wegen $AF \parallel CM$ auch dieselbe Höhe $|FM|$, den Abstand der beiden parallelen Geraden.
- Nach Satz 3.11 sind Parallelogramme die in der Länge einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen zerlegungsgleich und damit flächeninhaltsgleich. Es gilt also: $A_{FMLA} = A_{FNCA}$

(3) Zu zeigen: $A_{FNCA} = A_{BKEA}$

- Beweisidee: Es wird gezeigt, dass gilt: $D_{A, 90^\circ}(FNCA) = BKEA$
- $D_{A, 90^\circ}(A) = A$ [Das Drehzentrum A ist Fixpunkt der Abbildung.]
- $|AF| = |AB|$ [Die Seiten des Quadrats $FGBA$ sind kongruent.]
 $\angle FAB = 90^\circ$ [Benachbarte Seiten des Quadrats $FGBA$ stehen senkrecht aufeinander.]
- $D_{A, 90^\circ}(F) = B$ [Definition 2.23]
- $|AC| = |AE|$ [Die Seiten des Quadrats $ACDE$ sind kongruent.]
 $\angle CAE = 90^\circ$ [Benachbarte Seiten des Quadrats $ACDE$ stehen senkrecht aufeinander.]
- $D_{A, 90^\circ}(C) = E$ [Definition 2.23]
- Noch zu zeigen: $D_{A, 90^\circ}(N) = K$
 - $D_{A, 90^\circ}$ lässt sich durch die Verkettung zweier Achsenspiegelungen ersetzen. Da Achsenspiegelungen parallelentreu sind, bildet auch $D_{A, 90^\circ}$ parallele Geraden auf parallele Geraden ab. (*)
 - $\{N\} = CM \cap FN$ mit $CM \parallel AF$ und $FN \parallel AC$ (**)

- Wegen (*) und (**) muss $D_{A, 90^\circ}(N)$ auf einer Parallelen durch $D_{A, 90^\circ}(C) = E$ zu $D_{A, 90^\circ}(AF) = AB$ liegen.
- Da es zu einer Gerade durch einen Punkt nur genau eine Parallele geben kann (Satz 1.23: Starkes Parallelenaxiom) und EK diese Parallele zu AB ist, folgt:
 $D_{A, 90^\circ}(N) \in EK$ (I)
- Wegen (*) und (**) muss $D_{A, 90^\circ}(N)$ auf einer Parallelen durch $D_{A, 90^\circ}(F) = B$ zu $D_{A, 90^\circ}(AC) = AE$ liegen.
- Da es zu einer Gerade durch einen Punkt nur genau eine Parallele geben kann (Satz 1.23: Starkes Parallelenaxiom) und DC diese Parallele zu AE ist, folgt:
 $D_{A, 90^\circ}(N) \in DC$ (II)
- Aus (I) und (II) folgt: $D_{A, 90^\circ}(N) \in EK \cap DC = \{K\}$
- Daraus folgt: $D_{A, 90^\circ}(N) = K$
- Damit ergibt sich:
$$D_{A, 90^\circ}(FNCA) = BKEA$$
- Die beiden Parallelogramme $ABKE$ und $FNCA$ sind, weil sie durch die Drehung $D_{A, 90^\circ}$ aufeinander abgebildet werden, kongruent und damit flächeninhaltsgleich.

Insgesamt ergibt sich aus (1), (2) und (3), dass $A_{FMLA} = A_{FNCA} = A_{BKEA} = A_{CDEA}$ ist. Insbesondere hat also das Kathetenquadrat $CDEA$ denselben Flächeninhalt wie das Rechteck $FMLA$.

#

Hinweis: Der Beweis des zweiten Teils des Kathetensatzes (rechte Seite der Figur) verläuft analog.

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt:

16 BE