

Lösungshinweise zum 9. Übungsblatt

1. Eigenschaft der Schubspiegelung

Beweisen Sie: Bei einer Schubspiegelung wird die Verbindungsstrecke $[PP']$ eines Punkts P und seines Bildpunkts P' von der Schubspiegelungsachse halbiert.

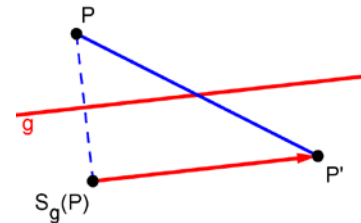
4 BE

Beweis:

- (1) Die Schubspiegelung $G_{g,\vec{v}}$ ist die Verkettung einer Achsenspiegelung S_g an einer Geraden g und einer Verschiebung $T_{\vec{v}}$ mit Verschiebungsvektor \vec{v} , wobei $\vec{v} \parallel g$ ist.

$$G_{g,\vec{v}}(P) = (T_{\vec{v}} \circ S_g)(P) = T_{\vec{v}}(S_g(P)) = P'$$

- (2) g halbiert als Symmetrieachse die Strecke $[PS_g(P)]$.
 (3) Aus $\vec{v} \parallel g$ folgt: $S_g(P)P' \parallel g$
 (4) Mit Satz 2.39 (Mittelparallele im Dreieck) folgt aus (1), (2) und (3):
 Im Dreieck $PS_g(P)P'$ trifft g die Seite $[PP']$ in ihrem Mittelpunkt.



2. Abbildungen und DGS

Konstruieren Sie für beide Aufgaben jeweils zunächst die angegebene Konfiguration mit GeoGebra. (GeoGebra kann unter www.geogebra.org kostenlos heruntergeladen werden.) Es lohnt sich die fertige Konstruktion durch Ziehen an bewegbaren Punkten zu variieren und die Auswirkungen zu beobachten. Beantworten Sie die angegebenen Fragen und begründen Sie Ihre Antwort jeweils.

- a) Gegeben sind zwei im Punkt T zueinander senkrechte Geraden p und q . Spiegeln Sie einen Punkt P zunächst an p nach $R = S_p(P)$ und anschließend R an q nach $Q = S_q(R)$.
- Was für ein Dreieck PQR ergibt sich?
 - Welche Bedeutung hat der Punkt T in diesem Dreieck?
 - Drehen Sie die beiden zueinander senkrechten Geraden p und q um deren Schnittpunkt T . Auf welcher Ortslinie bewegt sich der Punkt R dabei?
 - Welcher aus der Schulgeometrie bekannte Satz steckt hinter dieser Figur?
- b) Gegeben ist das Rechteck $ABCD$. Ein Dreieck $F = PQR$ wird nacheinander an den Trägergeraden AB nach $F' = S_{AB}(F)$, F' dann an BC nach $F'' = S_{BC}(F')$, F'' dann an CD nach $F''' = S_{CD}(F'')$ und schließlich F''' dann an DA nach $F'''' = S_{DA}(F''')$ gespiegelt.
- Welche Abbildung ergibt sich als Verkettung der vier Achsenspiegelungen?

6 BE

2 BE

a) Antworten:

- **Das Dreieck PQR ist rechtwinklig.**

Begründung:

- (1) Wegen $R = S_p(P)$ ist nach Satz 1.19 die Gerade PR Fixgerade der Abbildung S_p .
 Damit gilt nach Definition 1.19:

$$PR \perp p$$

- (2) Wegen $Q = S_q(R)$ ist nach Satz 1.19 die Gerade QR Fixgerade der Abbildung S_q .
 Damit gilt nach Definition 1.19:

$$QR \perp q$$

- (3) Nach Voraussetzung gilt: $p \perp q$

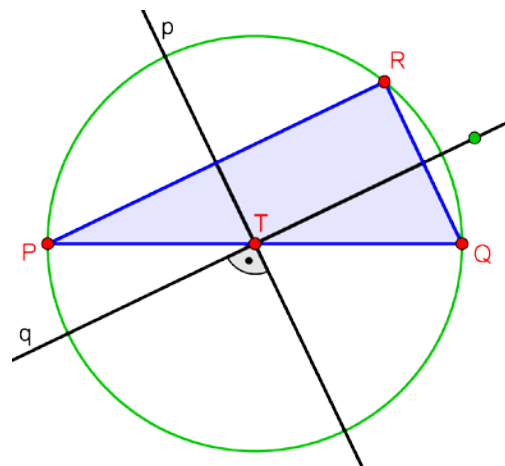
- (4) Nach Satz 1.22 folgt aus (2) und (3):

$$QR \parallel p$$

- (5) Aus (1) und (4) folgt mit Satz 1.26:

$$PR \perp QR$$

Also ist PQR ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei R .



- **Der Punkt T ist Mittelpunkt der Seite $[PQ]$.**

Begründung:

- (1) Die Abbildung $S_q \circ S_p$ lässt sich nach Satz 2.30a durch die Punktspiegelung P_T ersetzen. Es gilt also: $Q = P_T(P)$
- (2) Nach Definition 2.20 ist T der Mittelpunkt der Strecke $[PQ]$.

- **Der Punkt R bewegt sich auf dem Kreis $k(T, |PT|)$.**

Begründung:

- (1) Da $T \in p$ und $R = S_p(P)$ folgt mit Satz 1.13, dass gilt: $[PT] \cong [RT]$
- (2) Mit Definition 1.15 folgt: $|PT| = |RT|$
- (3) Mit Definition 2.19 ergibt sich: $R \in k(T, |PT|)$

- **Hinter dieser Figur steckt der Satz des Thales:** Dreiecke deren Ecken so auf einem Kreis liegen, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist, sind rechtwinklig.

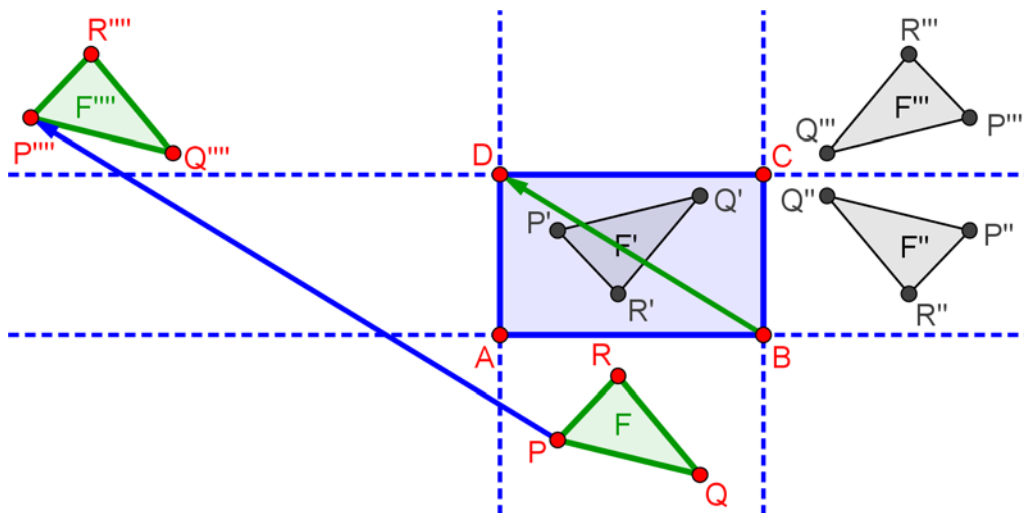
Begründung:

- (1) Der Punkt T ist Mittelpunkt der Seite $[PQ]$.
- (2) Aus (1) folgt $|PT| = |TQ|$.
- (3) Mit Definition 2.19 ergibt sich: $Q \in k(T, |PT|)$
- (4) Wegen $P, Q, R \in k(T, |PT|)$ und (1) ist $k(T, |PT|)$ der Thaleskreis über $[PQ]$.

b) Die Verkettung der vier Achsenspiegelungen ist eine Verschiebung $T_{2 \cdot \overline{BD}}$.

Begründung:

- (1) Da $ABCD$ ein Rechteck ist, gilt: $AB \perp BC$ und $CD \perp DA$.
- (2) Mit Satz 2.30a und Satz 2.45a folgt: $S_{DA} \circ S_{CD} \circ S_{BC} \circ S_{AB} = P_D \circ P_B = T_{2 \cdot \overline{BD}}$



3. Eigenschaft der Verschiebung

Beweisen Sie:

Alle zum Verschiebungsvektor parallele Geraden sind Fixgeraden der Verschiebung.

3 BE

Beweis:

- (1) Nach Satz 2.44 ist jede Verschiebung $T_{\vec{v}}$ darstellbar als Verkettung $S_h \circ S_g$ zweier Geradenspiegelungen, deren Achsen g und h senkrecht auf dem Verschiebungsvektor stehen und parallel zueinander sind.
- (2) Eine Gerade k , die parallel zum Verschiebungsvektor ist, steht wegen Satz 1.26 senkrecht auf g und h .
- (3) Nach Definition 1.19 ist k damit Fixgerade bzgl. S_g und S_h . Es folgt also:

$$T_{\vec{v}}(k) = (S_h \circ S_g)(k) = S_h(S_g(k)) = S_h(k) = k$$

Damit ist k Fixgerade der Verschiebung.

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt:

15 BE