Lösungshinweise zum 8. Übungsblatt

1. *Eigenschaften der Punktspiegelung*
Beweisen Sie:
a) Jede Gerade durch das Zentrum Z ist Fixgerade bzgl. der Punktspiegelung P_Z. *2 BE*
b) Jede Punktspiegelung P_Z bildet eine beliebige Gerade g auf eine zu g parallele Gerade g' ab. *3 BE*

a) Nach Definition 2.20 gilt für Punktsspiegelungen, dass das Zentrum Z der Mittelpunkt der Strecke $[PP']$ ist, mit $P' = P_Z(P)$. Das heißt aber, dass gilt: $[PZ] \cong [ZP'] \wedge P\text{-}Z\text{-}P'$.
Wenn Z aber zwischen P und P' liegt, dann sind P, Z und P' insbesondere kollinear und P' liegt auf PZ. Folglich wird jeder Punkt einer Geraden durch das Zentrum Z der Punktspiegelung wieder auf diese Gerade abgebildet.

#

b) Zu zeigen: $P_Z(g) = g' \Rightarrow g \parallel g'$
- Nach Satz 2.30b ist jede Punktsspiegelung P_Z durch die Verkettung $S_m \circ S_k$ zweier Geradenspiegelungen an zueinander senkrechten Geraden k und m ersetzbar, die sich im Zentrum der Punktspiegelung schneiden.
- Man wählt die Gerade m so, dass sie die nach Satz 1.23 (Starkes Parallelenaxiom) eindeutig existierende Parallele zu g durch den Punkt Z ist.
- Dann ist die Gerade k die nach Satz 1.21 eindeutig existierende Senkrechte zu m in Z.
- Nach Satz 1.26 ist k dann auch senkrecht zu g.
- Nach Definition 1.19 ist g dann eine Fixgerade bzgl. S_k. Es gilt also: $S_k(g) = g$
- Weil g parallel zu m ist und nach Satz 1.17 (Parallelentreue der Achsenspiegelung) parallele Geraden auf parallele Geraden abgebildet werden, folgt aus $g \parallel m$ also $g' \parallel m'$.
- Da die Symmetrieachse m aber Fixpunktgerade der Geradenspiegelung S_k ist gilt:
  $m' = S_k(m) = \text{m}$.
- Aus $g \parallel m$ und $g' \parallel m$ folgt nach Satz 1.3 (|| ist eine Äquivalenzrelation.) direkt $g' \parallel g$.

#

2. *Eigenschaften des Parallelogramms*
Beweisen Sie:
a) In einem Parallelogramm sind gegenüberliegenden Seiten kongruent. *2 BE*
b) Die Diagonalen eines Parallelogramms halbieren sich gegenseitig. *2 BE*
c) In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Innenwinkelwinkel kongruent. *1 BE*

a) Das Parallelogramm ist punktsymmetrisch bzgl. des Diagonalenschnittpunkts Z als Zentrum (Satz 2.36). Damit wird jede Seite durch P_Z auf die gegenüberliegende Seite abgebildet.
Nach Satz 2.30b ist jede Punktspiegelung P_Z durch die Verkettung $S_m \circ S_k$ zweier Geradenspiegelungen an zueinander senkrechten Geraden k und m ersetzbar, die sich im Zentrum der Punktspiegelung schneiden. Jede dieser Geradenspiegelungen ist nach Satz 1.16 streckentreu, bildet also mit (GS_3)Strecken auf kongruente Strecken ab. Da die Streckenkongruenz nach (SK_2) eine Äquivalenzrelation und somit insbesondere transitiv ist, folgt, dass auch die Originalstrecke kongruent zur Bildstrecke bei der Verkettung der beiden Achsenspiegelung ist.

#

b) Das Parallelogramm *ABCD* ist punktsymmetrisch bzgl. des Diagonalenschnittpunkts *Z* als Zentrum (Satz 2.36). Es gilt also $P_Z(A) = C$. Nach Definition 2.20 ist *Z* der Mittelpunkt der Strecke [*AC*]. Analog folgt: *Z* ist der Mittelpunkt der Strecke [*BD*].

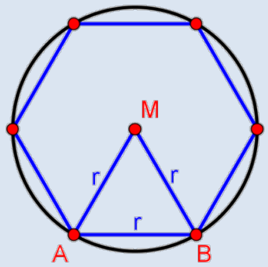
#

c) Auch hier lässt sich wieder die Punktspiegelung die das Parallelogramm auf sich selbst abbildet durch die Verkettung zweier Achsenspiegelungen ersetzen, die jeweils einzeln Winkel auf dazu kongruente Winkel abbilden. Wegen der Transitivität der Winkelkongruenz sind damit auch das Urbild und das Bild eines Winkels bei der Verkettung der Achsenspiegelungen kongruent zueinander.

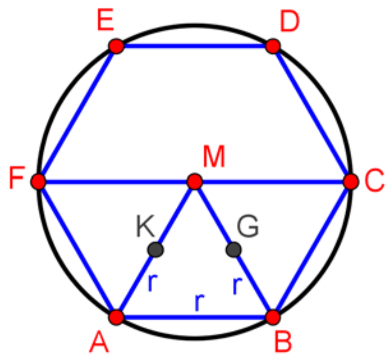
#

3. *Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks*

Beweisen Sie mit Hilfe geeigneter Punktspiegelungen, dass durch sukzessives Abtragen des Radius eines Kreises als Sehne auf dem Kreis ein regelmäßiges Sechseck entsteht.



5 BE



- Das Dreieck *ABM* ist gleichseitig, wobei *M* der Mittelpunkt des Kreises $k(M, r)$ ist und die Punkte *A* und *B* auf dem Kreis liegen. Es gilt also $|AB| = |BM| = |AM| = r$
- Punktspiegelungen sind nach Satz 2.34 längentreu und bilden nach Satz 2.35b Geraden auf parallele Geraden ab. (*)
- Wegen (*) wird bei der Punktspiegelung an $G = M_{[BM]}$ das gleichseitige Dreieck *ABC* auf das gleichseitige Dreieck *CMB* abgebildet. Wegen $|MC| = r$ liegt *C* auf der Kreislinie $k(M, r)$. Außerdem ist die Trägergerade von [CM] parallel zur Trägergeraden von [AB].
- Entsprechend gilt für die Punktspiegelung von *ABC* an $K = M_{[BM]}$, dass *F* auf $k(M, r)$ liegt und die Trägergerade von [*FM*] parallel zur Trägergeraden von [*AB*] ist.
- Da es durch *M* aber nur eine Gerade geben kann die parallel zur Trägergeraden von [*AB*] ist (Satz 1.23: Starkes Parallelenaxiom), sind die Punkte *F*, *M* und *C* kollinear.
- Punktspiegelung an *M* bildet das Viereck (Trapez) *ABCF* auf das Viereck *DEFC* ab.
- Da die Punktspiegelung längentreu ist, folgt $r = |AM| = |MD|$ und $r = |BM| = |ME|$
- Alle Eckpunkte der Gesamtfigur – des Sechsecks *ABCDEF* – liegen also auf der Kreislinie $k(M, r)$.
- Außerdem folgt aus $[BC] = P_G([AM])$, dass $[BC] \cong [AM]$ und damit $|BC| = |AM| = r$.
- Weiter ergibt sich:
  - $[AF] = P_K([BM]) \Rightarrow [AF] \cong [BM] \Rightarrow |AF| = |BM| = r$
  - $[DE] = P_M([AB]) \Rightarrow [DE] \cong [AB] \Rightarrow |DE| = |AB| = r$
  - $[EF] = P_M([BC]) \Rightarrow [EF] \cong [BC] \Rightarrow |EF| = |BC| = r$
  - $[CD] = P_M([AF]) \Rightarrow [CD] \cong [AF] \Rightarrow |CD| = |AF| = r$
- Insgesamt ergibt sich: $|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FA| = r$

#

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt: ***15 BE***