

## Lösungshinweise zum 6. Übungsblatt

### 1. Verkettungen von Achsenspiegelungen sind in der Regel nicht kommutativ

Beweisen Sie:

Wenn in einer Ebene  $\varepsilon$  zwei Geraden  $g$  und  $h$  weder parallel zueinander sind noch senkrecht aufeinander stehen, dann gilt für die Achsenspiegelungen  $S_g$  und  $S_h$  an diesen Geraden immer  $S_h \circ S_g \neq S_g \circ S_h$ .

5 BE

Beweis:

Es reicht zu zeigen, dass es einen Punkt  $P$  mit  $(S_h \circ S_g)(P) \neq (S_g \circ S_h)(P)$  gibt. Sei  $P \in g$  und  $P \notin h$ .

Dann gilt:

$$(S_h \circ S_g)(P) = S_h(S_g(P)) \stackrel{P \in g}{=} S_h(P) = P' \notin g, \text{ da } h \neq g \text{ und } g \not\perp h \text{ ist. (*)}$$

$$(S_g \circ S_h)(P) = S_g(S_h(P)) = S_g(P') = P''$$

Da  $P' \notin g$  folgt mit Satz 1.25:  $P'' \neq P'$

Damit folgt  $(S_h \circ S_g)(P) = P' \neq P'' = (S_g \circ S_h)(P),$

also  $(S_h \circ S_g)(P) \neq (S_g \circ S_h)(P)$

#

(\*) Anmerkung: Wäre  $g \perp h$ , dann wäre  $g$  nach Definition 1.19 Fixgerade bzgl.  $S_h$  und mit  $P \in g$  wäre auch  $S_h(P) = P' \in g$ .

### 2. Fixpunkte bei der Verkettung von zwei Achsenspiegelungen

a) Beweisen Sie:

Eine Verkettung von zwei Achsenspiegelungen an den Geraden  $g$  und  $h$  in einer Ebene  $\varepsilon$  mit  $g \neq h$  und  $g \parallel h$  besitzt keinen Fixpunkt.

2 BE

b) Beweisen Sie:

Eine Verkettung von zwei Achsenspiegelungen an den Geraden  $g$  und  $h$  in einer Ebene  $\varepsilon$  mit  $g \cap h = \{S\}$  besitzt genau einen Fixpunkt, nämlich den Achsenschnittpunkt  $S$ .

2 BE

a) Beweis:

$$g \neq h \wedge g \parallel h \Leftrightarrow g \cap h = \emptyset$$

Es sei  $P$  ein beliebiger Punkt der Ebene  $\varepsilon$ .

**1. Fall:  $P \in g$**

(1)  $(S_h \circ S_g)(P) = S_h(S_g(P)) = S_h(P) = P'$

(2) Wegen  $g \cap h = \emptyset$  und  $P \in g$  gilt  $P \notin h$ .

(3) Mit  $S_h(P) = P'$  und Satz 1.25 folgt:  $P' \neq P$

Damit gilt für jeden Punkt der Geraden  $g$ , dass er kein Fixpunkt der Abbildung  $S_h \circ S_g$  ist.

**2. Fall:  $P \notin g$**

(1) Da  $P \notin g$  ist, folgt mit Satz 1.25:  $P' = S_g(P) \neq P$

(2) Annahme:  $P$  ist ein Fixpunkt der Abbildung  $S_h \circ S_g$ . Dann gilt:  $S_h(P') = P.$

(3) Nach Satz 1.15 gilt mit (1):  $S_g(P') = P$

(4) Mit **(GS<sub>2</sub>)** folgt aus (2) und (3):  $g = h$  ❗ **Widerspruch zur Voraussetzung  $g \neq h$**

#

b) Beweis:

Für  $g \cap h = \{S\}$  ist  $S$  Fixpunkt von  $S_h \circ S_g$ , weil  $S$  als Achsenpunkt Fixpunkt von  $S_g$  und von  $S_h$  ist.

Es gilt also:  $(S_h \circ S_g)(S) = S_h(S_g(S)) = S_h(S) = S$

Ist  $P$  ein beliebiger Punkt der Ebene  $\varepsilon$  mit  $S \neq P$ , dann beweist man genau wie in a), dass  $P$  kein Fixpunkt sein kann.

**1. Fall:  $P \in g$**

- (1)  $(S_h \circ S_g)(P) = S_h(S_g(P)) = S_h(P) = P'$
- (2) Wegen  $g \cap h = \{S\}$  und  $S \neq P \in g$  gilt  $P \notin h$ .
- (3) Mit  $S_h(P) = P'$  und Satz 1.25 folgt:  $P' \neq P$

Damit gilt für jeden Punkt der Geraden  $g$ , dass er kein Fixpunkt der Abbildung  $S_h \circ S_g$  ist.

**2. Fall:  $P \notin g$**

- (1) Da  $P \notin g$  ist, folgt mit Satz 1.25:  $P' = S_g(P) \neq P$
- (2) Annahme:  $P$  ist ein Fixpunkt der Abbildung  $S_h \circ S_g$ . Dann gilt:  $S_h(P') = P$ .
- (3) Nach Satz 1.15 gilt mit (1):  $S_g(P') = P$
- (4) Mit **(GS<sub>2</sub>)** folgt aus (2) und (3):  $g = h$  ❗ **Widerspruch zur Voraussetzung  $g \neq h$**

#

**3. Seitenlängen im Dreieck**

Beweisen Sie mit Hilfe von Satz 1.13:

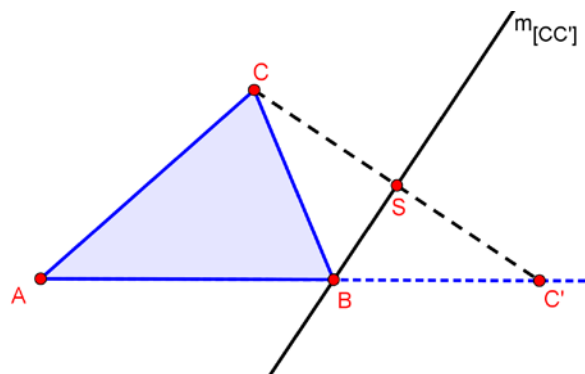
Die Summe der Längen zweier Dreiecksseiten ist immer von der Länge der dritten Seite verschieden.

6 BE

**Beweis:**

**Bemerkung:** Die Länge einer Strecke ist als die Menge aller Strecken definiert, die kongruent zur vorgegebenen Strecke ist. Es muss also mit der Kongruenz bzw. der Nichtkongruenz von Strecken argumentiert werden.

**Beweisidee:** Zu zeigen ist, dass die Strecke, die sich durch aneinanderhängen zweier Dreiecksseiten auf einer Halbgeraden ergibt, nicht kongruent zur dritten Dreiecksseite sein kann.



Es werden o.B.d.A. die Seite  $[AC]$  mit der Summe der Seiten  $[AB]$  und  $[BC]$  des Dreiecks verglichen. (Für die beiden anderen Kombinationen ist der Beweis durch umbenennen der Eckpunkte direkt verwendbar.)

$B$  legt auf der Geraden  $AB$  zwei Halbgeraden fest, nämlich  $[BA$  und die dazu entgegengesetzte Halbgerade  $[BA^-$ , also die Halbgerade auf der der Punkt  $A$  nicht liegt.

- (1) Zunächst wird die Strecke  $[BC]$  auf der Halbgerade  $[BA^-$  abgetragen.
- (2) Nach **(SK<sub>1</sub>)** gibt es genau einen Punkt  $C' \in [BA^-$  mit  $[BC] \cong [BC']$ .
- (3)  $m_{[CC']}$  ist die Symmetrieachse von  $C$  und  $C'$ . Wegen Satz 1.13 und (2) gilt:  $B \in m_{[CC']}$
- (4) Da  $ABC$  ein Dreieck ist, sind die Punkte  $A, B$  und  $C$  nicht kollinear und es gilt:  $C \notin AB$
- (5) Nach (2) liegt  $C'$  auf  $AB$  und mit (4) und Satz 1.4b folgt:  $]CC'[ \subset ABC^+$
- (6) Also muss auch der Schnittpunkt  $S$  von  $m_{[CC']}$  und  $]CC'[$  in der offenen Halbebene  $ABC^+$  liegen und es folgt:  $S \notin AB$ .
- (7) Mit (6) folgt:  $m_{[CC']} = SB \neq AB \Rightarrow m_{[CC']} \cap AB = \{B\} \Rightarrow A \notin m_{[CC']}$
- (8) Aus (7) folgt mit Satz 1.13:  $[AC] \not\cong [AC']$

Da  $[AC']$  sich durch aneinandersetzen von  $[AB]$  und  $[BC]$  ergibt, ist die Behauptung bewiesen.

#

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt:

15 BE