

Lösungshinweis zum 5. Übungsblatt

1. Folgerungen aus den Gruppenaxiomen

Beweisen Sie die folgenden Aussagen (3) bis (6) mit Hilfe der Gruppenaxiome und den bereits bewiesenen Folgerungen aus den Gruppenaxiomen:

(3) Eindeutige Existenz eines neutralen Elements:

$$\exists! e \in G \quad \forall a \in G \quad e \circ a = a$$

(4) Eindeutige Existenz eines inversen Elements

$$\forall a \in G \quad \exists! a^{-1} \in G \quad a^{-1} \circ a = e$$

(5) Eigenschaften der Inversen

a) $e^{-1} = e$

b) $(a^{-1})^{-1} = a$

c) $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

(6) Eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen

a) $\exists! x \in G \quad x \circ a = b$

b) $\exists! y \in G \quad a \circ y = b$

8 BE

Beweise:

(3) Annahme: Es gibt neben e ein weiteres neutrales Element e' .

$$\forall a \in G \quad e' \circ a = a \Rightarrow e' \stackrel{(2)}{=} e' \circ e = e \quad \color{red}{\bullet} \text{ Widerspruch zur Annahme}$$

(4) Annahme: Es gibt neben a^{-1} ein weiteres inverses Element a' zu a .

$$\begin{aligned} a' \circ a = e &\Rightarrow a' \stackrel{(2)}{=} a' \circ e \stackrel{(1)}{=} a' \circ (a \circ a^{-1}) \stackrel{(G1)}{=} (a' \circ a) \circ a^{-1} \\ &= e \circ a^{-1} \stackrel{(G2)}{=} a^{-1} \quad \color{red}{\bullet} \text{ Widerspruch zur Annahme} \end{aligned}$$

(5) a) $e^{-1} \circ e \stackrel{(G3)}{=} e \wedge e \circ e \stackrel{(G2)}{=} e \stackrel{(3)}{\Rightarrow} e^{-1} = e$

b) $(a^{-1})^{-1} \circ a^{-1} \stackrel{(G3)}{=} e \wedge a \circ a^{-1} \stackrel{(1)}{=} e \stackrel{(4)}{\Rightarrow} (a^{-1})^{-1} = a$

c) $(a \circ b)^{-1} \circ (a \circ b) \stackrel{(G3)}{=} e \wedge$
 $(b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b) \stackrel{(G1)}{=} b^{-1} \circ (a^{-1} \circ (a \circ b)) \stackrel{(G1)}{=} b^{-1} \circ ((a^{-1} \circ a) \circ b) \stackrel{(G3)}{=} b^{-1} \circ (e \circ b)$
 $\stackrel{(G2)}{=} b^{-1} \circ b \stackrel{(G3)}{=} e$
 $\stackrel{(4)}{\Rightarrow} (a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

(6) a) Annahme: $x \circ a = b$ (*) $\wedge \exists_{x' \neq x} x' \circ a = b$ (**)

$$\begin{aligned} x' &\stackrel{(2)}{=} x' \circ e \stackrel{(1)}{=} x' \circ (a \circ a^{-1}) \stackrel{(G1)}{=} (x' \circ a) \circ a^{-1} \stackrel{(**)}{=} b \circ a^{-1} \stackrel{(*)}{=} (x \circ a) \circ a^{-1} \\ &\stackrel{(G1)}{=} x \circ (a \circ a^{-1}) \stackrel{(1)}{=} x \circ e \stackrel{(2)}{=} x \quad \color{red}{\bullet} \text{ Widerspruch zur Annahme} \end{aligned}$$

b) Analog a)

2. Gruppe der Kongruenzabbildungen

Beweisen Sie den Satz 2.6:

Die Menge \mathbf{K} aller Kongruenzabbildungen einer Ebene ε auf sich bildet zusammen mit der Verkettung $\circ : \mathbf{K} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ eine Gruppe.

8 BE

(G0) Abgeschlossenheit bzgl. der Verkettung

Die Menge der Kongruenzabbildungen ist bzgl. der Verkettung *abgeschlossen*, weil sich nach dem Dreispiegelungssatz (Satz 2.4) jede Kongruenzabbildung durch höchstens drei Achsenspiegelungen darstellen lässt und nach Satz 2.5 umgekehrt jede Verkettung von beliebig vielen Achsenspiegelungen wieder eine Kongruenzabbildung ist.

Demnach ist jede Verkettung von Kongruenzabbildungen wieder eine Kongruenzabbildung. #

(G1) Assoziativität

Zu zeigen ist: $\forall \varphi, \psi, \sigma \in \mathbf{K} \quad (\varphi \circ \psi) \circ \sigma = \varphi \circ (\psi \circ \sigma)$

Für einen beliebigen Punkt P der Ebene ε gilt:

$$\text{i) } ((\varphi \circ \psi) \circ \sigma)(P) = (\varphi \circ \psi)(\sigma(P)) = \varphi(\psi(\sigma(P)))$$

$$\text{ii) } (\varphi \circ (\psi \circ \sigma))(P) = \varphi((\psi \circ \sigma)(P)) = \varphi(\psi(\sigma(P)))$$

$$\text{i), ii) } \Rightarrow (\varphi \circ \psi) \circ \sigma = \varphi \circ (\psi \circ \sigma) \quad \#$$

(G2) Existenz eines (links-)neutralen Elements

Zu zeigen ist: $\exists \text{id}_\varepsilon \in \mathbf{K} \quad \forall \varphi \in \mathbf{K} \quad \text{id}_\varepsilon \circ \varphi = \varphi$

Für einen beliebigen Punkt P der Ebene ε gilt: $(\text{id}_\varepsilon \circ \varphi)(P) = \text{id}_\varepsilon(\varphi(P)) = \varphi(P)$

$$\Rightarrow \text{id}_\varepsilon \circ \varphi = \varphi \quad \#$$

(G3) Existenz eines (links-)inversen Elements φ^{-1} zu φ

Zu zeigen ist: $\forall \varphi \in \mathbf{K} \quad \exists \varphi^{-1} \in \mathbf{K} \quad \varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}_\varepsilon$

Jede Achsenspiegelung S_g ist nach Satz 1.15 eine involutorische Abbildung der Ebene auf sich.

Es gilt also: $S_g^{-1} = S_g$

Da sich nach dem Dreispiegelungssatz (Satz 2.4) jede Kongruenzabbildung als Verkettung von höchstens drei Achsenspiegelungen darstellen lässt, ist noch zu zeigen, dass auch für die Verkettung von drei Achsenspiegelungen S_g, S_h und S_k in der Ebene ε eine Umkehrabbildung existiert.

Behauptung:

Die Umkehrabbildung zu $S_k \circ S_h \circ S_g$ ist die Abbildung $S_g \circ S_h \circ S_k$

Beweis:

$$\begin{aligned} (S_g \circ S_h \circ S_k) \circ (S_k \circ S_h \circ S_g) &\stackrel{\text{(G1)}}{=} S_g \circ S_h \circ (S_k \circ S_k) \circ S_h \circ S_g \stackrel{\text{Satz 1.15}}{=} S_g \circ S_h \circ \text{id}_\varepsilon \circ S_h \circ S_g \stackrel{\text{(G2)}}{=} S_g \circ S_h \circ S_h \circ S_g \\ &\stackrel{\text{(G1)}}{=} S_g \circ (S_h \circ S_h) \circ S_g \stackrel{\text{Satz 1.15}}{=} S_g \circ \text{id}_\varepsilon \circ S_g \stackrel{\text{(G2)}}{=} S_g \circ S_g \stackrel{\text{Satz 1.15}}{=} \text{id}_\varepsilon \end{aligned}$$

Der Beweis umfasst in seinen letzten Schritten auch, dass die Umkehrabbildung zu $S_h \circ S_g$ die Abbildung $S_g \circ S_h$ ist. Damit ist (G3) bewiesen. #

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt:

16 BE