

Lösungshinweise zum 2. Übungsblatt

1. Relation „verbindbar“

Beweisen Sie: Die Relation „verbindbar in \mathcal{E} bzgl. $\mathbf{M} \subset \mathcal{E}$ “ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{E} \setminus \mathbf{M}$.

3 BE

z.z. verbindbar in „ \mathcal{E} bzgl. $\mathbf{M} \subset \mathcal{E}$ “ ist

- a) reflexiv
- b) symmetrisch
- c) transitiv

zu a) z.z. Q ist verbindbar mit Q in „ \mathcal{E} bzgl. $\mathbf{M} \subset \mathcal{E}$ “

$$\begin{aligned} Q &\in \mathcal{E} \setminus \mathbf{M} \\ \Rightarrow \{Q\} \cap \mathbf{M} &= \emptyset \\ \Leftrightarrow [QQ] \cap \mathbf{M} &= \emptyset, \quad \text{da nach Def. 1.4 gilt: } [QQ] = \{Q\} \\ \Rightarrow Q &\text{ ist verbindbar mit } Q \text{ in „}\mathcal{E}\text{ bzgl. } \mathbf{M} \subset \mathcal{E}\text{“} \end{aligned}$$

zu b) z.z. P ist verbindbar mit Q in „ \mathcal{E} bzgl. $\mathbf{M} \subset \mathcal{E}$ “

$$\Leftrightarrow Q \text{ ist verbindbar mit } P \text{ in „}\mathcal{E}\text{ bzgl. } \mathbf{M} \subset \mathcal{E}\text{“}$$

P ist verbindbar mit Q in „ \mathcal{E} bzgl. $\mathbf{M} \subset \mathcal{E}$ “

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \exists \wp \subset \mathcal{E}: \wp &\text{ hat } P \in \mathcal{E} \text{ als } AP \text{ und } Q \in \mathcal{E} \text{ als } EP \wedge \wp \cap \mathbf{M} = \emptyset \\ \Leftrightarrow \exists P_1, \dots, P_n \in \mathcal{E}: [PP_1] \cup [P_1P_2] \cup \dots \cup [P_nQ] &= \wp \wedge \wp \cap \mathbf{M} = \emptyset \\ \Leftrightarrow \exists P_1, \dots, P_n \in \mathcal{E}: [QP_n] \cup [P_nP_{n-1}] \cup \dots \cup [P_1P] &= \wp \wedge \wp \cap \mathbf{M} = \emptyset \\ \Leftrightarrow \exists \wp \subset \mathcal{E}: \wp &\text{ hat } Q \in \mathcal{E} \text{ als } AP \text{ und } P \in \mathcal{E} \text{ als } EP \wedge \wp \cap \mathbf{M} = \emptyset \\ \Leftrightarrow Q &\text{ ist verbindbar mit } P \text{ in „}\mathcal{E}\text{ bzgl. } \mathbf{M} \subset \mathcal{E}\text{“} \end{aligned}$$

zu c) z.z. Q ist verbindbar mit R in „ \mathcal{E} bzgl. $\mathbf{M} \subset \mathcal{E}$ “ \wedge R ist verbindbar mit S in

$$\text{„}\mathcal{E}\text{ bzgl. } \mathbf{M} \subset \mathcal{E}\text{“} \Rightarrow Q \text{ ist verbindbar mit } S \text{ in „}\mathcal{E}\text{ bzgl. } \mathbf{M} \subset \mathcal{E}\text{“}$$

Q ist verbindbar mit R in „ \mathcal{E} bzgl. $\mathbf{M} \subset \mathcal{E}$ “ \wedge R ist verbindbar mit S in „ \mathcal{E} bzgl. $\mathbf{M} \subset \mathcal{E}$ “

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \exists P_1, \dots, P_n \in \mathcal{E}: [QP_1] \cup [P_1P_2] \cup \dots \cup [P_nR] &= \wp_1 \wedge \wp_1 \cap \mathbf{M} = \emptyset \\ \wedge \exists O_1, \dots, O_m \in \mathcal{E}: [RO_1] \cup [O_1O_2] \cup \dots \cup [O_mS] &= \wp_2 \wedge \wp_2 \cap \mathbf{M} = \emptyset \\ \Rightarrow \wp_3 = \wp_1 \cup \wp_2 = [QP_1] \cup [P_1P_2] \cup \dots \cup [P_nQ] \cup [RO_1] \cup [O_1O_2] \cup \dots \cup [O_mS] \\ \wedge (\wp_1 \cup \wp_2) \cap \mathbf{M} &= (\wp_1 \cap \mathbf{M}) \cup (\wp_2 \cap \mathbf{M}) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \\ \Rightarrow \wp_3 = \wp_1 \cup \wp_2 &\text{ hat } Q \text{ als } AP \text{ und } S \text{ als } EP \wedge \wp_3 \cap \mathbf{M} = \emptyset \\ \Leftrightarrow Q &\text{ ist verbindbar mit } S \text{ in „}\mathcal{E}\text{ bzgl. } \mathbf{M} \subset \mathcal{E}\text{“} \end{aligned}$$

2. Dreieck ABC

Definition: Ein **Dreieck** ist ein Polygon, das genau drei *nicht* kollineare Eckpunkte besitzt.

In einem Dreieck ABC liegt ein Punkt D zwischen A und B und ein Punkt E zwischen B und C . Beweisen Sie, dass die Strecken $[AE]$ und $[CD]$ sich in einem Punkt F schneiden.

6 BE

Voraussetzungen:

$$\begin{aligned} \text{Dreieck } ABC \wedge A-D-B \wedge B-E-C \\ \Rightarrow A, B, C \text{ sind nicht kollinear} \wedge D \in AB \wedge E \in BC \\ \Rightarrow C \notin AB \wedge B \notin AC \wedge A \notin BC \end{aligned}$$

Behauptung: $\exists_{F \in \varepsilon} [AE] \cap [CD] = \{F\}$

Beweis:

Beweisidee: Anwendung des Satzes von Pasch auf die Gerade AE und das Dreieck DBC
($D \in BCA^+$)

z.z. $AE \cap]BC[= \{E\} \neq \emptyset \wedge D \notin g \wedge B \notin g \wedge C \notin g$

- (1) $A \notin BC \wedge E \in BC$ n.V.
 $\Rightarrow AE \cap BC = \{E\}$
 $\Rightarrow AE \cap]BC[= \{E\} \wedge B \notin AE \wedge C \notin AE$ wegen $B-E-C$
- (2) $E \in]BC[$
 $\Rightarrow AE \cap AB = \{A\}$ wegen A, B, C nicht kollinear
 $\Rightarrow AE \cap [DB] = \emptyset$ wegen $[DB] \subset AB$ und $A-D-B$
 $\Rightarrow AE \cap]DB[= \emptyset \wedge D \notin AE$

Nach Satz von Pasch folgt:

$\exists_{F \in \varepsilon} AE \cap [CD] = \{F\}$ (*)

- (i) $F \in ABC^+$, da wegen $D \in AB \wedge C \in ABC^+ \wedge$ Satz 1.4b gilt: $]DC[\subset ABC^+$
(ii) $D \in ACB^+$, da wegen $A \in AC \wedge B \in ACB^+ \wedge$ Satz 1.4b gilt:
 $]AB[\subset ACB^+ \wedge A-D-B$
 $\Rightarrow F \in ACB^+$ wegen Satz 1.4b und $F \in]DC[$
(iii) $F \in]DC[\wedge$ Satz 1.4b $\Rightarrow F \in BCA^+$

Aus (i), (ii) und (iii) folgt:

$\Rightarrow F \in ABC^+ \cap ACB^+ \cap BCA^+$

$\Rightarrow F$ liegt also im Inneren von ABC

Mit (*) folgt daraus: $F \in]AE[$

#

3. Parallele Trägergeraden

Beweisen Sie: Von den Trägergeraden dreier Seiten eines konvexen Polygons können höchstens zwei zueinander parallel sein.

6 BE

Annahme: Die Trägergeraden von drei Seiten sind parallel zueinander.

Seien g, h, k die drei Trägergeraden, dann gilt: $g \parallel h \wedge g \parallel k \wedge h \parallel k$

Zunächst ist zu zeigen, dass die drei Geraden verschieden, also echt parallel sind.

Seien P_1, \dots, P_n die Eckpunkte des konvexen Polygons.

Da das Polygon konvex ist, sind alle Trägergeraden von Polygonseiten auch Stützgeraden des Polygons.

Seien $P_1, P_2 \in g \Rightarrow \forall_{i \in \{3, \dots, n\}} P_i \in gP_3^+$ (Halbebene bzgl. g in der P_3 liegt)

Da das Polygon konvex ist, hat jede Seite maximal einen Punkt (den gemeinsamen Eckpunkt) mit einer anderen Seite gemeinsam.

$$\Rightarrow \exists_{i \in \{3, \dots, n\}} P_i \in h \wedge P_i \in gP_3^+$$

$$\Rightarrow g \neq h$$

$$\Rightarrow g \text{ **echt** parallel zu } h \text{ (i)}$$

Analog kann man zeigen, dass h **echt** parallel zu k (ii) und g **echt** parallel zu k (iii).

Aus (i), (ii) und (iii) folgt dann:

$$\Rightarrow \exists_{k, l \in \{3, \dots, n\}} (P_k, P_e \in h \wedge P_k, P_e \notin g \wedge P_k, P_e \notin k) \wedge$$

$$\exists_{i, j \in \{3, \dots, n\}} (P_i, P_j \in k \wedge P_i, P_j \notin g \wedge P_i, P_j \notin h)$$

Jetzt kann man die drei Geraden anordnen, z. B. zuerst kommt g , dann h , dann k .

Man wähle die mittlere Gerade.

$$h \text{ mittlere Gerade} \Rightarrow g \subset hP_1^+ \wedge k \subset hP_1^-$$

$$P_1, P_2 \in g \Rightarrow P_1, P_2 \in hP_1^+ \quad (*)$$

$$P_i, P_j \in k \Rightarrow P_i, P_j \in hP_1^- \quad (**)$$

Aus (*) und (**) ergibt sich ein Widerspruch zu h Stützgerade, denn dann müssten P_1, P_2, P_i und P_j in derselben Halbebene bzgl. h liegen.

\Rightarrow Die Annahme, dass die Trägergeraden dreier Seiten eines konvexen Polygons parallel zueinander sind ist falsch.

\Rightarrow Von den Trägergeraden eines konvexen Polygons können höchstens zwei zueinander parallel sein.

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt:

15 BE