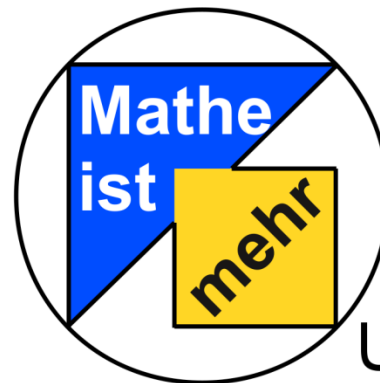




Didaktisches Seminar SS 2011



Mathematik-Labor
Uni Koblenz-Landau

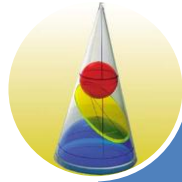


- ▶ **Lernort außerhalb der Schule**
- ▶ **Ziel**
 - ▶ Mathematische Durchdringung von Phänomenen
- ▶ **Schulklassen**
- ▶ **Kleingruppenarbeit**
- ▶ **ca. 3 Stunden Bearbeitungszeit**
- ▶ **Auseinandersetzung mit einem Thema**



Naturwissenschaften

- Linsen
- Brechung
- Lochkamera
- Schatten
- Spiegel
- Biomechanik
- Schiefer Wurf
- Kristallstrukturen



Mathematische Themen

- Unendlich
- Figurierte Zahlen
- Kryptologie
- Rollkurven
- Historische Instrumente
- Gleichdicks
- Strahlensätze

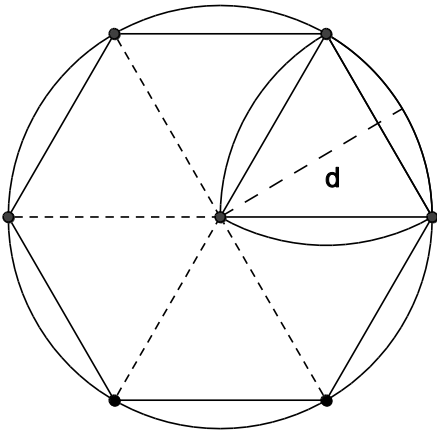


Alltagsbezüge

- Einparken
- Baggerarmsteuerung
- Lotto
- Kürzeste Wege
- Vermessung



**Experimentieren
mit realen Modellen**

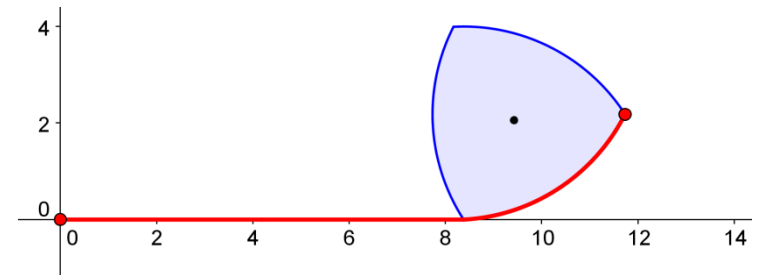


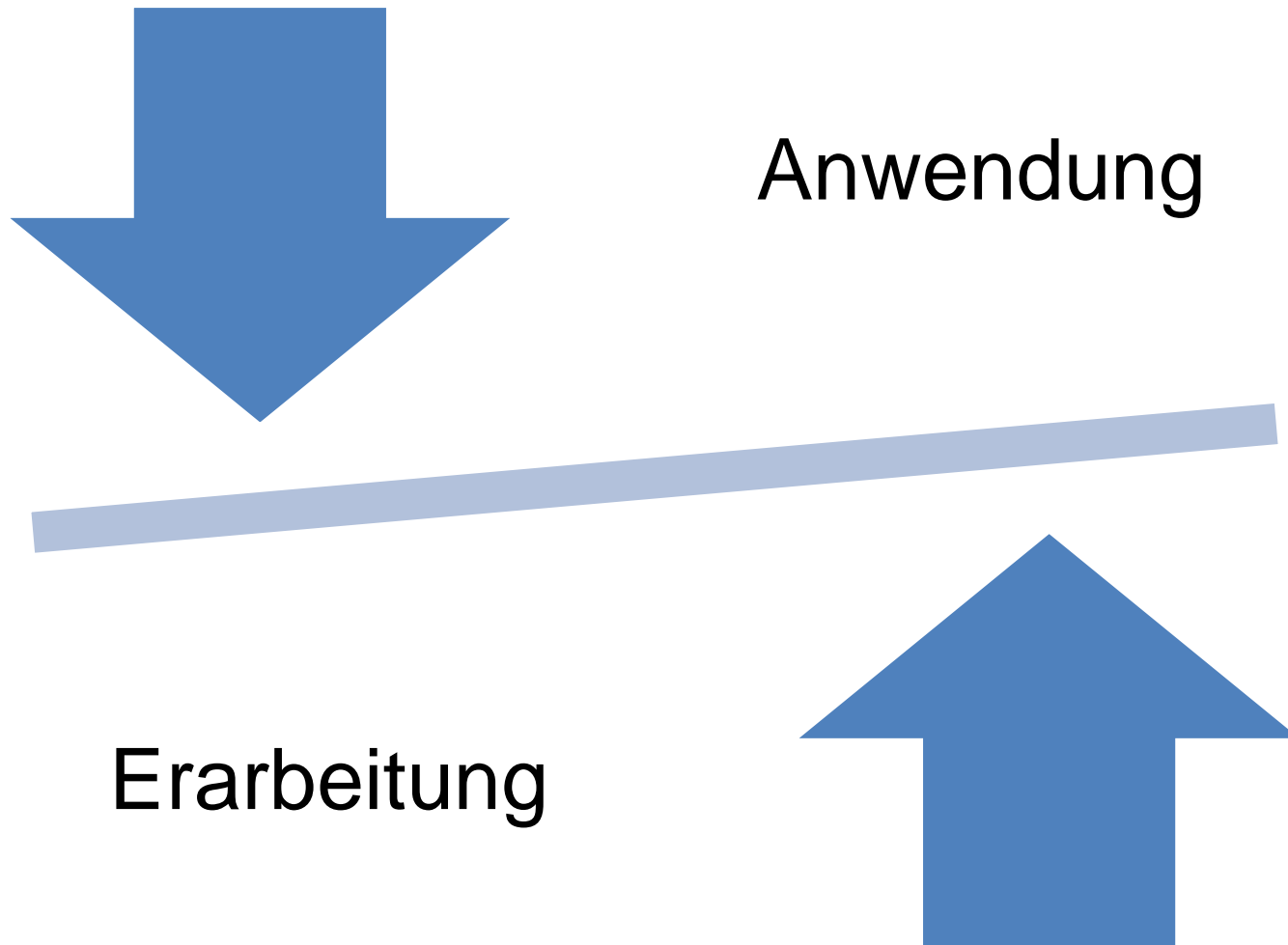
Mathematisieren

*gestufte
Hilfen*



**Computersimulationen
systematisch variieren**







- ▶ **Entwicklung einer Erarbeitungsstation „Strahlensätze“**
 - ▷ Einbindung in den Unterricht im Klassenverband
 - ▷ Vier (alle) 9. Klassen der KARS kommen im Oktober an drei aufeinanderfolgenden Wochen jeweils für eine Doppelstunde
 - ▷ Themenkomplex
 - ▶ Ähnlichkeit
 - ▶ Zentrische Streckung
 - ▶ Strahlensätze
 - ▶ Anwendungen
 - ▷ Vermessung
 - ▷ Strahlenoptik
 - ▷ Historische Instrumente
 - ▷ ...



Während bislang die Schülerinnen und Schüler Streckenlängen nur aus maßstabsgerechten Zeichnungen entnehmen können, stehen mit den Strahlensätzen nun Techniken zur Verfügung, Streckenlängen zu berechnen. Vielfältige Sachsituationen und Messmethoden unterstreichen die Einsatzmöglichkeiten etwa auch bei der Vermessung. Alternativ zur elementargeometrischen Einführung können die Strahlensätze auch im Zusammenhang mit der zentrischen Streckung als deren Eigenschaften abgeleitet werden (vgl. L3 „Raum und Form“).

In diesem Zusammenhang treten immer wieder einfache Bruchgleichungen auf, wobei ein elementares Lösungsverfahren und die Besonderheiten dieser Gleichungen (Definitions- und Lösungsmenge) thematisiert werden. Im Bereich der Vertiefung (**V**) werden zum einen die Umkehrungen der Strahlensätze untersucht und zum anderen einfache Bruchgleichungen mit Parametern gelöst. Umfangreiche Übungen im Umgang mit Bruchtermen, insbesondere auch das Addieren und Subtrahieren solcher Terme, sind dazu nicht erforderlich.

Die Einführung in die Trigonometrie kann entweder über Beziehungen der Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck und deren anschließende Erweiterung auf Winkelgrößen über 90° erfolgen oder über die Betrachtung trigonometrischer Funktionen zur Beschreibung periodischer Vorgänge (vgl. L4 „Funktionaler Zusammenhang: Nicht-lineare Funktionen“). Bei der Betrachtung trigonometrischer Funktionen fällt auf, dass die Funktionsargumente Winkelgrößen und keine reellen Zahlen sind. Dazu wird in der Vertiefung (**V**) das Bogenmaß als weiteres Winkelmaß eingeführt.

Die Berechnungen an Körpern werden auf weitere räumliche Objekte ausgedehnt. In der Basis (**B**) werden Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden bestimmt, in der Erweiterung (**E**) auch von Kegel und Kugel. Bei der Volumenbestimmung sollen auch experimentelle Methoden zum Einsatz kommen. Weiterhin ist nicht daran gedacht, alle Formeln herzuleiten, vielmehr sollen die Schülerinnen und Schüler sich gerade bei Anwendungsaufgaben auch im Umgang mit einer Formelsammlung üben. Reflektierend soll der Aufbau der Formeln für Oberflächeninhalt und Volumen gerader und spitzer Körper betrachtet werden. Mit der Herstellung entsprechender Körper wird durch den Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen (Schrägbild, Netz und Modell) das räumliche Vorstellungsvermögen geschult (vgl. L3 „Raum und Form“).

Beim Gebrauch der Fachsprache ist zwischen Objekt und Objekteigenschaft (z. B. Fläche und Flächeninhalt) zu unterscheiden.



Kompetenzen	Inhalte	Hinweise und Vernetzung
<p>K1: Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und Vermutungen begründet äußern</p> <p>K1: Mathematische Argumentationen entwickeln</p> <p>K3: Den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen</p> <p>K3: Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen</p> <p>K5: Mit Variablen, Termen und Gleichungen arbeiten</p> <p>K1: Lösungswege beschreiben und begründen</p> <p>K5: Lösungs- und Kontrollverfahren ausführen</p> <p>K6: Die Fachsprache adressatengerecht verwenden</p>	<p>STRAHLENSÄTZE</p> <p>E Beziehungen zwischen Streckenlängen zentrisch gestreckter Figuren herstellen (Strahlensätze) und in Sachsituationen anwenden</p> <p>Einfache Bruchgleichungen unter Beachtung der Definitionsmenge lösen</p> <p>Fachbegriffe: 1. und 2. Strahlensatz, Bruchgleichung, Definitionsmenge</p>	<p>↗ L3: Raum und Form (Geometrische Abbildungen)</p> <p>Verschiedene Methoden der Messung unzugänglicher Strecken</p> <p>Försterdreieck, Jakobsstab, Messkeil, Proportionalzirkel</p> <p>DIN-Papierformate</p> <p>📏 Messungen im Gelände</p> <p>Gemeint sind damit solche Bruchgleichungen, wie sie bei Verwendung der Strahlensätze auftreten können, z. B. $\frac{x}{2-x} = \frac{5}{3}$</p> <p>Strategie: Multiplikation mit den Nennern</p> <p>Exemplarisch soll bewusst werden, dass vor Angabe der Lösungsmenge entweder die Probe erforderlich oder die Definitionsmenge zu beachten ist</p> <p>↗ L4: Funktionaler Zusammenhang: Terme und Gleichungen</p>



Wurden in den Klassenstufen 7 und 8 die Kongruenzabbildungen behandelt, so erzeugen Schülerinnen und Schüler nun in der Basis (**B**) ähnliche Figuren. Darauf aufbauend werden in der Erweiterung (**E**) zentrische Streckungen durchgeführt und analysiert sowie der funktionale Aspekt deutlich gemacht. Die Strahlensätze (vgl. L2 „Messen und Größen“) können dabei als Eigenschaften zentrischer Streckungen abgeleitet werden. Umgekehrt kann auch die elementargeometrische Einführung der Strahlensätze zur Behandlung der zentrischen Streckungen führen. Neben der Konstruktion per Hand wird auch dynamische Geometriesoftware eingesetzt.

Die Aussage des Satzes von Pythagoras leiten Schülerinnen und Schüler im Bereich der Basis (**B**) anschaulich her. Bei der Anwendung in Sachsituationen erfahren sie die praktische Bedeutung des Satzes bei der Berechnung von Längen. Ergänzend wird auch die geometrische Bedeutung durch Visualisierung über Flächeninhalte („Pythagorasfigur“) bewusst gemacht. In der Erweiterung (**E**) wird über die anschauliche Herleitung hinaus ein Beweisverfahren erarbeitet und präsentiert. Bei der Untersuchung der Umkehrung des Satzes von Pythagoras lernen Schülerinnen und Schüler, Voraussetzung und Behauptung einer Satzaussage zu unterscheiden. Auch die Aussagen der anderen Sätze der Satzgruppe des Pythagoras (Kathetensatz, Höhensatz) sowie ihre Zusammenhänge werden erarbeitet; dabei genügt es, einen der beiden Sätze zu beweisen. In der Vertiefung (**V**) wird ein weiterer Beweis des Satzes von Pythagoras erarbeitet und mit den vorherigen Begründungen verglichen.


Schrägbilder und Netze von Pyramide und Kegel werden erarbeitet und im Zusammenhang mit Berechnungen an diesen Körpern (vgl. L2 „Messen und Größen“) genutzt.

Kompetenzen	Inhalte	Hinweise und Vernetzung
<p>K2: Vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten</p> <p>K5: Mathematische Werkzeuge sinnvoll und verständlich einsetzen</p>	<p>GEOMETRISCHE ABBILDUNGEN</p> <p>B Ähnliche Figuren durch Vergrößern bzw. Verkleinern erzeugen</p>	<p>Beispiele aus dem Alltag, z. B. Modellautos, Matrioschka-Puppen, Schattenprojektionen</p> <p>Winkelinvarianz nutzen</p> <p>→ Anfertigen maßstabgerechter Zeichnungen (Arbeitslehre, Technisches Zeichnen)</p> <p>→ Pantograf (Storchenschnabel) bauen und anwenden (Werken)</p>



Kompetenzen	Inhalte	Hinweise und Vernetzung
<p>K1: Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und Vermutungen begründet äußern</p> <p>K1: Mathematische Argumentationen entwickeln</p> <p>K6: Überlegungen und Ergebnisse verständlich darstellen und präsentieren</p> <p>K6: Die Fachsprache adressatengerecht verwenden</p> <p>K5: Mathematische Werkzeuge sinnvoll und verständlich einsetzen</p> <p>K1: Mathematische Argumentationen entwickeln</p> <p>K6: Die Fachsprache adressatengerecht verwenden</p> <p>K2: Vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten</p> <p>K2: Geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden</p> <p>K6: Die Fachsprache adressatengerecht verwenden</p>	<p>B Auswirkungen maßstabsgetreuer Vergrößerungen und Verkleinerungen auf Winkelgrößen, Streckenlängen und Flächeninhalt untersuchen und beschreiben</p> <p>Fachbegriff: Ähnlich</p> <p>E Zentrische Streckungen durchführen und hinsichtlich ihrer Bestimmungsstücke untersuchen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Streckfaktor • Streckzentrum <p>Fixelemente und Invarianten der zentrischen Streckung kennen und bei Konstruktionen anwenden</p> <p>Fachbegriffe: Zentrische Streckung; Streckfaktor, Streckzentrum</p>	<p>Irreführende Darstellungen in Bilddiagrammen → Beleuchtungsstärke in Abhängigkeit von der Entfernung zur Lichtquelle (Physik)</p> <p>↷ L4: Funktionaler Zusammenhang Auch negative Streckfaktoren benutzen → Zentralperspektive (Bildende Kunst)</p> <p>☞ Dynamische Geometriesoftware</p>



Kompetenzen	Inhalte	Hinweise und Vernetzung
K1: Mathematische Argumentationen entwickeln	V Ähnliche Figuren durch Verkettung einer zentrischen Streckung mit Kongruenzabbildungen aufeinander abbilden <ul style="list-style-type: none">• Ähnlichkeitsabbildung	Auch auf Abbildungen hinweisen, bei denen Bild und Urbild nicht zueinander ähnlich sind (z. B. Schrägprojektion, Zerrspiegel)  Selbstähnliche Figuren



L2: Messen und Größen (8 Stunden) Strahlensätze	L3: Raum und Form (8 Stunden) Zentrische Streckung
	L2: Messen und Größen (4 Stunden) Bruchgleichungen

Einsatz einer dynamischen Geometriesoftware

L3: Raum und Form (8 Stunden) Geometrische Abbildungen	L2: Messen und Größen (12 Stunden) Strahlensätze, einfache Bruchgleichungen
	L3: Raum und Form (12 Stunden) Satzgruppe des Pythagoras

Projekt „Beweisen im Mathematikunterricht“

Messungen im Gelände

LEHRPLANBEZUG

a) Inhaltsbezogen

L2: Messen und Größen

- Strahlensätze
- Trigonometrische Beziehungen

b) Kompetenzbezogen

K3: Den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen

K3: Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen

K5: Mit Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen, Diagrammen, Tabellen arbeiten

K6: Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse dokumentieren, verständlich darstellen und präsentieren, auch unter Nutzung geeigneter Medien

FACHÜBERGREIFENDE BEZÜGE

Deutsch: Umgang mit Sachtexten

Physik: Astronomie

Werken: Nachbau der Vermessungsinstrumente

HINWEISE FÜR DEN UNTERRICHT

Zur einfachen Höhenbestimmung eignet sich das **Försterdreieck** (ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck): Man hält das Dreieck mit einer Kathete waagrecht und stellt sich in passender Entfernung zu einem Baum auf, sodass dessen Spitze über die Hypotenuse angepeilt werden kann; der Abstand des Beobachters zum Baumstamm plus die Augenhöhe des Beobachters entspricht der Höhe des Baums (sofern der Boden keine Erhebungen aufweist). Beim Vermessen stellen die Schülerinnen und Schüler fest, dass die Messwerte der einzelnen Gruppen abweichen. Hier gilt es, eine Fehleranalyse zu betreiben (Welche Fehlertypen können auftreten? Wie stark wirken sich diese auf das Ergebnis aus?), das verwendete Gerät zu optimieren (z. B. durch Anbringen einer Libelle an einer Kathete) oder für verschiedene Vorhaben zu modifizieren (Wie muss das Dreieck verändert werden, um möglichst hohe Gegenstände zu vermessen? Wie wirkt sich dies auf die Fehlertoleranz aus? ...).

In seiner Anwendung variabler ist der **Jakobsstab**: Dieser besteht aus einem skalierten Basisstab, auf dem ein Querholz verschoben werden kann. Um beispielsweise die relative Höhe eines sich in Sichtweite befindlichen Berges zu bestimmen, hält man den Basisstab waagrecht und verschiebt das Querholz so lange, bis darüber die Bergspitze angepeilt wird. Aus einer Karte lässt sich die eigene Entfernung zum Fußpunkt der Bergspitze ablesen (Maßstabsrechnen) und mithilfe des zweiten Strahlensatzes die gewünschte Höhe bestimmen. Früher wurde der Jakobsstab zur Winkelbestimmung z. B. in der Nautik benutzt: Der Höhenwinkel der Sonne oder des Polarsterns lässt sich durch Anpeilen von Horizontlinie und Sonne bzw. Fixstern bestimmen. Das dauernde Anpeilen der Sonne führte bei vielen Seefahrern zur Erblindung – daher auch die Augenklappe bei Piraten.



Zur Messung von Höhenwinkeln eignet sich auch der **Pendelquadrant**: Ein Viertelkreis wird mit der Gradskala (0° bis 90°) beschriftet und ein Lot im Kreismittelpunkt angebracht. Visiert man über die 0° -Linie einen Punkt, so lässt sich über die Lotschnur an der Winkelskala direkt dessen Höhenwinkel ablesen – eine ausreichende Entfernung von Beobachter zum anvisierten Punkt vorausgesetzt. Die Weiterentwicklung von Jakobsstab und Pendelquadrant war der **Spiegelsextant**, der wesentlich genauere Winkelmessungen ermöglichte.

Zur trigonometrischen Vermessung eignet sich ein **Theodolit**. Dieser muss mithilfe von Libellen lotrecht aufgestellt werden. Über ein Zielpfeilrohr und entsprechende Winkelskalen lassen sich Horizontal- und Vertikalwinkel recht exakt bestimmen.

Im Unterricht lassen sich die verschiedenen Messinstrumente durch praktisches Tun (z. B. Höhenbestimmung eines Kirchturms oder des Schulgebäudes) miteinander vergleichen. Dabei geht es neben einer Vorgangsbeschreibung („Bedienungsanleitung“) und den mathematischen Berechnungen auch um die Fehleranalyse: Welches Verfahren ist am genauesten? Welche Fehler können gemacht werden? Wie stark wirkt sich die Ungenauigkeit eines Messwertes auf das Ergebnis aus?

Ebenso bietet sich Stationenarbeit oder die Einbindung außerschulischer Fachkräfte an.

► Problem der Reihenfolge

- ▷ Ähnlichkeit – Strahlensätze – Zentrische Streckung (Schroedel)
- ▷ Zentrische Streckung – Ähnlichkeit – Strahlensätze (Westermann)
- ▷ Strahlensätze – zentrische Streckung – Ähnlichkeit (Ehrenwirth, bsv)
- ▷ Zentrische Streckung – Strahlensätze – Ähnlichkeit (Klett, Diesterweg, Oldenbourg, Schroedel Neue Wege, Cornelsen Fokus Mathematik)
- ▷ Ähnlichkeit (vergrößern, verkleinern) – zentrische Streckung – Strahlensätze – Ähnlichkeit (Abbildung, Dreiecke) (Klett, Schroedel Elemente der Mathematik,)
- ▷ Ähnlichkeit – zentrische Streckung – Strahlensätze (Cornelsen Pluspunkt Mathematik, Westermann Mathematik 9)



▶ Anwendungen

▷ Vermessung

▶ ...

▷ Historische Geräte

▶ Pantograph

▶ Messtisch

▶ Jakobsstab

▶ Försterdreieck

▶ ...

▷ Strahlenoptik

▶ Fotografie

▶ Lochkamera

▶ Abbildung durch Linsen

▶ Schattenwurf

▶ ...



▶ **Didaktisches Seminar (Mathematik-Labor)**

- ▶ **Einarbeitung** in die Inhalte und mögliche didaktische Aufbereitungen
- ▶ **Bearbeiten** einer Station des Mathematik-Labors
- ▶ **Entwicklung** von Lernumgebungen zu den Strahlensätzen einschließlich zugehöriger realer Modelle und Simulationen (GeoGebra)
- ▶ **Erprobung** und **Optimierung** der Lernumgebungen
- ▶ **Betreuung** von Schülerinnen und Schülern bei der Umsetzung im Oktober

▶ **MA-Arbeiten**

- ▶ **Evaluation** (Leistungsentwicklungen, Motivationslage, Art des Arbeitens...)



▶ **Gemeinsame Treffen**

- ▷ Freitags, 10:00 Uhr bis 12:00 Uhr, ML
- ▷ Grundsätzliches, Organisatorisches, Planung, Technisches

▶ **Gruppentreffen**

- ▷ Gruppe 1: Paul, Faas, Fath
 - ▶ Montags, 12:00 Uhr bis 14:00 Uhr, ML
- ▷ Gruppe 2: Dexheimer, Stucky, Grimm
 - ▶ Montags, 16:00 Uhr bis 18:00 Uhr, ML
- ▷ Gruppe 3: Fischer, Ras, Guth
 - ▶ Montags, 16:00 Uhr bis 18:00 Uhr, ML
- ▷ Gruppe 4: Busse, Papastefanou, Konrad
 - ▶ Mittwochs, 14:00 Uhr bis 16:00 Uhr

▶ **Oktober: Durchführung**